2. cvičení z Matematické analýzy 2

30. září - 4. října 2019

Motivace:

Pojem *otevřené* množiny intuitivně zavádíme jako množinu, která s každým bodem obsahuje ještě dost prostoru kolem něj (je to kvůli pozdějšímu použití pro derivování - potřebujeme se k bodu přiblížit “odkudkoliv”).

Pojmem *uzavřené* množiny zase intuitivně myslíme takovou množinu, ze které nemůžeme vypadnout při “limitách posloupností,” tj. taková množina obsahuje všechny body, ke kterým se můžeme z této množiny přiblížit libovolně blízko.

Kupodivu, tyto dva pojmy jsou nakonec navzájem doplňkové (viz níže).

Definice:

Okolím $U_\varepsilon(a_0)$ (tzv. otevřenou koulí) s poloměrem $\varepsilon > 0$ a středem v bodě $a_0 \in \mathbb{R}^n$ označujeme množinu

$$U_\varepsilon(a_0) \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in \mathbb{R}^n \mid ||a - a_0|| < \varepsilon\}$$

kde $||a - a_0||$ je *eukleidovská vzdálenost* bodů a a a_0, tj. pro

$$a_0 = (x_1, \dots, x_n)$$

a

$$a = (y_1, \dots, y_n)$$

je

$$||a - a_0|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}\ .$$

Připomeňme si, že pro množinu $A \subseteq \mathbb{R}^n$ si

- *vnitřek* A° množiny A definujeme jako množinu všech bodů $a \in A$, které jsou v A i s nějakým okolím:

$$a \in A^\circ \stackrel{\text{def}}{\iff} (\exists\ \varepsilon > 0)\ \ U_\varepsilon(a) \subseteq A$$

- *hranice* ∂A množiny A je množina všech bodů $a \in \mathbb{R}^n$, jejichž libovolná okolí zasahují jak do samotné množiny A, tak do jejího doplňku $\mathbb{R}^n \setminus A$:

$$a \in \partial A \stackrel{\text{def}}{\iff} (\forall\ \varepsilon > 0)\quad U_\varepsilon(a) \cap A \neq \emptyset \quad \wedge \quad U_\varepsilon(a) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \neq \emptyset$$

- *uzávěr* $\overline{A}$ množiny A si definujeme jako množinu

$$\overline{A} \stackrel{\text{def}}{=} A \cup \partial A$$

neboli (jak se dá snadno ověřit) jako množinu všech bodů $a \in \mathbb{R}^n$, jejichž libovolná okolí zasahují do množiny A:

$$a \in \overline{A} \iff (\forall\ \varepsilon > 0)\ \ U_\varepsilon(a) \cap A \neq \emptyset$$

Kromě toho ještě platí, že

$$\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ$$

a tedy

$$\overline{A} = A^\circ \ \dot\cup\ \partial A$$

kde "$\cup\!\!\!\cdot$" znamená disjunktní sjednocení. Pro libovolnou množinu A se dále celý prostor $\mathbb{R}^n$ vždy disjunktně rozloží na vnitřek A°, hranici ∂A a vnějšek $(\mathbb{R}^n \setminus A)^\circ$:

$$\mathbb{R}^n = A^\circ \ \dot\cup\ \partial A \ \dot\cup\ (\mathbb{R}^n \setminus A)^\circ$$

2.1 Určete vnitřek, hranici a uzávěr definičních oborů následujících funkcí:

(a) $f(x,y) = \sqrt{\frac{x^2-x+y^2}{2x-x^2-y^2}}$,

(b) $f(x,y) = \frac{\arcsin(x^2+2x+y^2)}{\sqrt{2x-x^2-y^2}}$,

Řešení:
Tento příklad je určený pro "intuitivní" řešení pomocí náčrtů daných množin.

(a) Nechť M je definiční obor funkce f.

$$M:\ (x^2 - x + y^2 \geq 0 \ \wedge\ 2x - x^2 - y^2 > 0) \ \vee\ (x^2 - x + y^2 \leq 0 \ \wedge\ 2x - x^2 - y^2 < 0)$$

Zadání lze upravit na přehlednější tvar. Doplněním na čtverec můžeme nerovnosti vyjádřit jako

$$M:\ \Big((x-\tfrac{1}{2})^2 + y^2 \geq \tfrac{1}{4} \ \wedge\ (x-1)^2 + y^2 < 1\Big) \ \vee\ \Big((x-\tfrac{1}{2})^2 + y^2 \leq \tfrac{1}{4} \ \wedge\ (x-1)^2 + y^2 > 1\Big)$$

což představuje oblasti vně a uvnitř kružnic. Z toho je vidět, že druhá závorka představuje prázdnou množinu, tedy celkem je

$$M:\ \left(x-\tfrac{1}{2}\right)^2 + y^2 \geq \tfrac{1}{4} \ \wedge\ (x-1)^2 + y^2 < 1$$

- (***vnitřek***) M° : $\left(x-\tfrac{1}{2}\right)^2 + y^2 > \tfrac{1}{4} \ \wedge\ (x-1)^2 + y^2 < 1.$
- (***uzávěr***) $\overline{M}$: $\left(x-\tfrac{1}{2}\right)^2 + y^2 \geq \tfrac{1}{4} \ \wedge\ (x-1)^2 + y^2 \leq 1.$
- (***hranice***) $\partial M = \overline{M} \setminus M^\circ$: $\left(x-\tfrac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \tfrac{1}{4} \ \vee\ (x-1)^2 + y^2 = 1$
  (POZOR: je tu jiná logická spojka!)

(b) Nechť M je definiční obor funkce f.

$$M:\ \ -1 \leq x^2 + 2x + y^2 \leq 1 \ \wedge\ 2x - x^2 - y^2 > 0$$

Zadání lze upravit na přehlednější tvar. Doplněním na čtverec můžeme nerovnosti vyjádřit jako

$$M:\ 0 \leq (x+1)^2 + y^2 \leq 2 \ \wedge\ (x-1)^2 + y^2 < 1$$

což představuje průnik uzavřeného kruhu (o poloměru $\sqrt{2}$) a otevřeného kruhu (o poloměru 1).

- (***vnitřek***) M° : $(x+1)^2 + y^2 < 2 \ \wedge\ (x-1)^2 + y^2 < 1.$
- (***uzávěr***) $\overline{M}$: $(x+1)^2 + y^2 \leq 2 \ \wedge\ (x-1)^2 + y^2 \leq 1.$
- (***hranice***) $\partial M = \overline{M} \setminus M^\circ$: $\Big((x+1)^2 + y^2 = 2 \ \wedge\ (x-1)^2 + y^2 \leq 1\Big) \ \vee$
  $\vee\ \Big((x+1)^2 + y^2 \leq 2 \ \wedge\ (x-1)^2 + y^2 = 1\Big)$

2.2 Určete vnitřek, hranici a uzávěr definičních oborů funkcí z příkladu **1.4**, tj. množin:

(a) $M:\ (x > 0\ \wedge\ y - x > 1)\ \vee\ (x < 0\ \wedge\ 0 < y - x < 1)$

(b) $M:\ (x+1)^2 + y^2 \geq 1\ \wedge\ (x-1)^2 + y^2 > 1$

Řešení:
Tento příklad je určený pro "intuitivní" řešení pomocí náčrtů daných množin.

(a)

- (***vnitřek***): Množina M je zadána ostrými nerovnostmi, je tedy otevřená a proto $M^\circ = M$.
- (***uzávěr***) $\overline{M}:\quad (x \geq 0\ \wedge\ y - x \geq 1)\ \vee\ (x \leq 0\ \wedge\ 0 \leq y - x \leq 1)$
- (***hranice***) $\partial M:\quad y = x + 1\ \vee\ (y = x\ \wedge\ x \leq 0)\ \vee\ (x = 0\ \wedge\ y \geq 0)$
  (Hranice jsou části přímek.)

(b)

- (***vnitřek***) $M^\circ:\ (x+1)^2 + y^2 > 1\ \wedge\ (x-1)^2 + y^2 > 1.$
- (***uzávěr***) $\overline{M}:\ (x+1)^2 + y^2 \geq 1\ \wedge\ (x-1)^2 + y^2 \geq 1.$
- (***hranice***) $\partial M = \overline{M} \setminus M^\circ:\quad (x+1)^2 + y^2 = 1\ \vee\ (x-1)^2 + y^2 = 1$

2.3 Určete vnitřek, hranici a uzávěr množin z příkladu **1.5**:

(a) $M:\ (x+1)^2 + y^2 \leq 4\ \wedge\ (x-2)^2 + y^2 \leq 4;$

(b) $M:\ (x-1)^2 - y^2 > 1\ \wedge\ (x-2)^2 + y^2 \leq 4;$

Řešení:
Tento příklad je určený pro "intuitivní" řešení pomocí náčrtů daných množin.

(a)

- (***vnitřek***) $M^\circ:\quad (x+1)^2 + y^2 < 4\quad \wedge\quad (x-2)^2 + y^2 < 4.$
- (***uzávěr***): Množina M je uzavřená (je průnikem dvou uzavřených množin), tedy $\overline{M} = M$.
- (***hranice***) $\partial M:\ \Big((x+1)^2 + y^2 = 4\ \wedge\ (x-2)^2 + y^2 \leq 4\Big) \vee \Big((x+1)^2 + y^2 \leq 4\ \wedge\ (x-2)^2 + y^2 = 4\Big)$
  (Hranice jsou dva oblouky kružnice.)

(b)

- (***vnitřek***) $M^\circ:\ (x-1)^2 - y^2 > 1\ \wedge\ (x-2)^2 + y^2 < 4.$
- (***uzávěr***): Musíme si dát pozor na zápis, protože bod $(0,0)$ v uzávěru naší množiny M není, ačkoliv je průnikem hyperboly a kružnice.

$$\overline{M}:\quad (x-1)^2 - y^2 \geq 1\ \wedge\ (x-2)^2 + y^2 \leq 4\ \wedge\ (x,y) \neq (0,0)\ .$$

- (***hranice***): Hranice je jeden oblouk kružnice a jeden oblouk hyperboly. Opět si musíme dát pozor na zápis, protože bod $(0,0)$ na hranici naší množiny M není.

$$\partial M : \Big((x-1)^2 - y^2 = 1 \ \wedge\ (x-2)^2 + y^2 \leq 4 \ \wedge\ (x,y) \neq (0,0)\Big) \vee$$

$$\vee \Big((x-1)^2 - y^2 \geq 1 \ \wedge\ (x-2)^2 + y^2 = 4 \ \wedge\ (x,y) \neq (0,0)\Big)$$

2.4 Určete vnitřek, hranici, vnějšek a uzávěr množiny $\mathbb{Q}^2 \subseteq \mathbb{R}^2$, kde $\mathbb{Q}$ je množina všech racionálních čísel.

Řešení:
Uvědomíme si, že v libovolném okolí (na reálné přímce) libovolného $r \in \mathbb{R}$ leží jak nějaké racionální číslo, tak také nějaké iracionální číslo. Dále pokud máme $|r_i - s_i| < \frac{\varepsilon}{2}$ pro $i = 1,2$ (kde $r_i, s_i \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$) pak

$$||(r_1, r_2) - (s_1, s_2)|| = \sqrt{(r_1 - s_2)^2 + (r_2 - s_2)^2} \leq \sqrt{\left(\tfrac{\varepsilon}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{\varepsilon}{2}\right)^2} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} < \varepsilon\ .$$

Speciálně tedy v libovolném ε-okolí bodu $a \in \mathbb{R}^2$ leží jak nějaký prvek z $\mathbb{Q}^2$, tak nějaký prvek z $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$. Proto můžeme ihned napsat, že

$$\overline{\mathbb{Q}^2} = \mathbb{R}^2, \quad (\mathbb{Q}^2)^\circ = \emptyset \ \text{ a } \ \partial\mathbb{Q}^2 = \overline{\mathbb{Q}^2} \setminus (\mathbb{Q}^2)^\circ = \mathbb{R}^2.$$

Poznámka: Při zdůvodnění toho, že nějaká množina je otevřená, případně uzavřená, se dá využít následující věta:
Jestliže $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce, pak

- množina $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid f(x_1, \dots, x_n) > 0\}$ je otevřená

  (množina A je otevřená $\Leftrightarrow A = A^\circ$)

- množina $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid f(x_1, \dots, x_n) \geq 0\}$ je uzavřená

  (množina A je uzavřená $\Leftrightarrow A = \overline{A} \Leftrightarrow$ doplněk A je otevřená množina).

Můžeme si všimnout, že vnitřek (uzávěr, resp.) jsme v předchozích příkladech často získali tak, že jsme z neostrých nerovnosti udělali ostré (z ostrých neostré, resp.). Ale POZOR, takhle to obecně nefunguje (viz následující příklad).

2.5 Najděte příklad spojité funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, kdy pro

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) > 0\}$$

a

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) \geq 0\}$$

je

$$\overline{A} \subsetneq B \quad \text{a} \quad A \subsetneq B^\circ$$

(neboli: po přidání neostré nerovnosti je uzávěr obecně MENŠÍ a po ubrání neostré nerovnosti je vnitřek obecně VĚTŠÍ.)

Řešení:
Např. můžeme zvolit funkci

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2, & x < 0, \\ 0, & x \in \langle 0, 1 \rangle, \\ -(x-1)^2, & x > 1 \ . \end{cases}$$

Pak je $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0\}$ a $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 1\}$.

Problém vzniká proto, že zatímco vrstevnice

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = c\}$$

pro hladiny $c \neq 0$ jsou křivky (objekty s dimenzí 1), tak pro $c = 0$ je vrstevnice plocha (objekt s dimenzí 2).

Poznámka č. 2: Všimněme si, že problém vzniká v bodech, kde je derivace nulová. Pokud se tomuto vyhneme, pak už můžeme vnitřky i uzávěry vytvářet změnou nerovností:

Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je spojitě diferencovatelná funkce. Pokud pro každé $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ takové, že $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$, je $f'(x_1, \ldots, x_n) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \neq (0, \ldots, 0)$, pak

- pro $A = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid f(x_1, \ldots, x_n) > 0\}$ je
$$\overline{A} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid f(x_1, \ldots, x_n) \geq 0\}$$
- a pro $B = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid f(x_1, \ldots, x_n) \geq 0\}$ je
$$B^\circ = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid f(x_1, \ldots, x_n) > 0\}.$$

2.6 Sestrojte příklady neprázdných množin M v $\mathbb{R}^2$, že

(a) nemá žádný vnitřní ani vnější bod (= vnitřní bod doplňku množiny M),

(b) nemá žádný hraniční bod,

(c) nemá žádný vnější bod a je uzavřená.

Řešení:

(a) Např. $M = \mathbb{Q}^2$ (jak je vidět z postupu v příkladu **2.4**, tak ani $\mathbb{Q}^2$ ani $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$ nemají vnitřní body).

(b) Žádný hraniční bod nemá určitě celá rovina, tj. $M = \mathbb{R}^2$ (protože její doplněk je prázdný).

Dokonce je to jediná taková množina: Nechť M nemá hraniční bod, tj. $\partial M = \emptyset$. Pak

$$M \subseteq \overline{M} = M^\circ \cup \underbrace{\partial M}_{=\emptyset} = M^\circ \subseteq M$$

tedy dostáváme, že $M = \overline{M}$ a $M = M^\circ$. Množina M je tak současně otevřená a uzavřená. Dá se ukázat (s trochou práce), že jediná taková neprázdná množina v $\mathbb{R}^2$ je jen $M = \mathbb{R}^2$. Je to důsledek tzv. *souvislosti* prostoru $\mathbb{R}^2$.

(c) Opět můžeme zvolit $M = \mathbb{R}^2$.

Opět je to jediná takováto množina, což zjistíme takto: Použijeme rozklad $\mathbb{R}^2$ pomocí M, pro kterou předpokládáme $(\mathbb{R}^2 \setminus M)^\circ = \emptyset$ a $M = \overline{M}$:

$$\mathbb{R}^2 = \underbrace{M^\circ \ \cup\ \partial M}_{=\overline{M}} \ \cup\ \underbrace{(\mathbb{R}^n \setminus M)^\circ}_{=\emptyset} = \overline{M} = M$$

tedy $M = \mathbb{R}^2$.

2.7 Vyšetřete existenci limity $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)^2}{x-y}$.

Řešení:
Definiční obor funkce $f(x,y) = \frac{(x+y)^2}{x-y}$ je

$$D(f): \quad x \neq y\ .$$

Bod $(0,0)$ je zřejmě hromadný bod množiny $D(f)$. Abychom zjistili, jakou hodnotu $c \in \mathbb{R}$ by případná limita měla mít, vyzkoušíme se přiblížit k bodu $a_0 = (0,0)$ po vhodné křivce. Nejjednodušší jsou obvykle přímky. Vezměme si tedy přímku $y = kx$, kde $k \neq 1$. Pro $x \to 0$ máme $(x, kx) \to (0,0)$. Takže nás bude zajímat

$$\lim_{x\to 0} f(x,kx) = \lim_{x\to 0} \frac{(x+kx)^2}{x-kx} = \lim_{x\to 0} \frac{(1+k)^2}{1-k} x = 0\ .$$

Pokud naše původní limita existuje musí mít tedy hodnotu $c = 0$ (to, že jsme prověřili přímky a dostali stejnou hodnotu, ale ještě nic o existenci limity nerika!).

Můžeme se pokusit najít jiná přiblížení (viz níže) anebo můžeme využít jednoduché kritérium pro neexistenci (konečné) limity (viz Poznámky k limitám):

- $f(x,y) = \frac{h(x,y)}{g(x,y)}$, kde $h(x,y) = (x+y)^2$ a $g(x,y) = x - y$ jsou spojité funkce
- položme $M:\ x = y\ \wedge\ (x,y) \neq (0,0)$
- pro každé $a \in M$ je $g(a) = 0$ a $h(a) \neq 0$
- $a_0 = (0,0)$ je hromadný bod množiny M

Pak NEEXISTUJE (konečná) limita $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

(Vzhledem k už nalezené limitě 0 při nějakém přiblížení z toho vyplývá, že ani případná “nekonečná” limita nemůže existovat.)

Zjistili jsme tedy, že $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)^2}{x-y}$ neexistuje.

Poznámka: Jestliže chceme najít přiblížení, pro které vyjde jiná hodnota než 0, můžeme v tomto případě zkusit “variaci konstanty k” a vzít křivku ve tvaru $y(x) = k(x) \cdot x$, kde $k(x)$ je zatím neznámá funkce a kdy chceme, aby pro $x \to 0$ bylo také $y(x) \to 0$. Křivku dosadíme do funkce:

$$f\big(x, y(x)\big) = \frac{\big(x + k(x)\cdot x\big)^2}{x - k(x)\cdot x} = \frac{\big(1 + k(x)\big)^2}{1 - k(x)} \cdot x$$

Nyní bude stačit, když se např. $\frac{x}{1-k(x)}$ bude blížit k nenulové hodnotě $d \in \mathbb{R}$ a současně i $\big(1 + k(x)\big)^2$ se bude blížit ke konečné nenulové hodnotě.

Stačí položit $\frac{x}{1-k(x)} = d$, tj. $k(x) = 1 - \frac{x}{d}$. Musíme ještě ověřit, že v tomto případě je křivka

$$y(x) = k(x)\cdot x = \Big(1 - \frac{x}{d}\Big)\, x$$

stále v definičním oboru $D(f)$ (což by stačilo i jen pro x blízká k 0). To je ale ihned vidět. Dále také zřejmě je $y(x) \to 0$ pro $x \to 0$.

A nakonec vidíme, že

$$f\big(x, y(x)\big) = \cdots = \frac{\big(1 + k(x)\big)^2}{1 - k(x)} \cdot x = d\Big(2 - \frac{x}{d}\Big)^2 \quad \xrightarrow{x\to 0} \quad 4d$$

což je kýžený výsledek.

Současně si všimněme, že k bodu $(0,0)$ se blížíme v tomto případě po parabole $y(x) = x - \frac{x^2}{d}$ jejíž tečna v bodě $(0,0)$ je právě přímka $y = x$, kterou jsme vyloučili z definičního oboru $D(f)$. Toto je v jistém smyslu i návod pro jiné příklady - hledejme křivky “napodobující” hranici definičního oboru v daném bodě.

2.8 Vyšetřete existenci limity $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x+y}$.

Řešení:
Budeme postupovat podobně jako v příkladu **2.7**. Definiční obor funkce $f(x,y) = \frac{xy}{x+y}$ je

$$D(f): \quad x \neq -y \; .$$

Bod $(0,0)$ je zřejmě hromadný bod množiny $D(f)$. Při pohledu na funkci můžeme rovnou využít kritérium pro neexistenci (konečné) limity (viz Poznámky k limitám):

- $f(x,y) = \frac{h(x,y)}{g(x,y)}$, kde $h(x,y) = xy$ a $g(x,y) = x+y$ jsou spojité funkce
- položme $M: \; x = -y \; \wedge \; (x,y) \neq (0,0)$
- pro každé $a \in M$ je $g(a) = 0$ a $h(a) \neq 0$
- $a_0 = (0,0)$ je hromadný bod množiny M

Pak NEEXISTUJE (konečná) limita $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

(Kromě toho při přiblížení po přímce $y = x$ máme $f(x,x) = \frac{x^2}{x+x} = \frac{x}{2} \overset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, takže ani případná "nekonečná" limita neexistuje.)

Zjistili jsme tedy, že $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x+y}$ neexistuje.

Poznámka:

(a) Přiblížení, pro které vyjde jiná hodnota než 0, můžeme opet zkusit hledat ve tvaru $y(x) = k(x) \cdot x$, kde $k(x)$ je zatím neznámá funkce a kdy chceme, aby pro $x \to 0$ bylo také $y(x) \to 0$. Křivku dosadíme do funkce:

$$f\big(x, y(x)\big) = \frac{k(x)\cdot x^2}{x + k(x)\cdot x} = \frac{k(x)}{1+k(x)} \cdot x$$

Nyní bude stačit, když se $\frac{x}{1+k(x)}$ bude blížit k nenulové hodnotě $d \in \mathbb{R}$ a současně i $k(x)$ se bude blížit ke konečné nenulové hodnotě.
Stačí proto položit $\frac{x}{1+k(x)} = d$, tj. $k(x) = \frac{x}{d} - 1$. Křivka

$$y(x) = k(x)\cdot x = \left(\frac{x}{d} - 1\right) x$$

pro $x \neq 0$ je pak stále v definičním oboru $D(f)$. Dále také zřejmě je $y(x) \to 0$ pro $x \to 0$.
A po dosazení dostaneme

$$f\big(x, y(x)\big) = \cdots = \frac{k(x)}{1+k(x)} \cdot x = x - d \overset{x\to 0}{\longrightarrow} -d$$

což jsme potřebovali.

Současně si všimněme, že k bodu $(0,0)$ se opět blížíme po parabole $y(x) = \frac{x^2}{d} - x$ jejíž tečna v bodě $(0,0)$ je právě přímka $y = -x$, kterou jsme vyloučili z definičního oboru $D(f)$.

(b) Vhodné přiblížení můžeme hledat i pomocí polárních souřadnic (a to obvykle tak, že parametrem bude úhel φ, pro který budeme hledat vhodnou funkci vzdálenosti $\varrho(\varphi)$):

$$x(\varphi) = \varrho(\varphi)\cos\varphi$$
$$y(\varphi) = \varrho(\varphi)\sin\varphi$$

tak, aby $\varrho(\varphi) \to 0$ pro $\varphi \to \varphi_0$ pro nějaké vhodné $\varphi_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ neboť chceme mít $\Big(x(\varphi), y(\varphi)\Big) \overset{\varphi\to\varphi_0}{\longrightarrow} (0,0)$ (což je bod, kde limitu hledáme).
Opět dosadíme

$$f\big(x(\varphi), y(\varphi)\big) = \frac{\varrho^2(\varphi)\cos\varphi\sin\varphi}{\varrho(\varphi)\cdot(\cos\varphi + \sin\varphi)} = \frac{\cos\varphi\sin\varphi}{\cos\varphi + \sin\varphi}\varrho(\varphi)$$

Potřebujeme nějak vyvážit, to že $\varrho(\varphi) \to 0$, a jako jediná protiváha se nabízí výraz $\cos\varphi + \sin\varphi$ ve jmenovateli zlomku. Proto zvolíme φ_0 tak, aby $\cos\varphi_0 + \sin\varphi_0 = 0$, tedy např. $\varphi_0 = -\frac{\pi}{4}$.

Dále pro $0 \neq d \in \mathbb{R}$ položíme zase $\frac{\varrho(\varphi)}{\cos\varphi+\sin\varphi} = d$, čímž dostaneme $\varrho(\varphi) := d(\cos\varphi + \sin\varphi)$ a skutečně je pak $\varrho(\varphi) \to 0$ pro $\varphi \to -\frac{\pi}{4}$.
Současně opět (díky tomu, že $\varphi \neq -\frac{\pi}{4}$ a hodnoty φ jsou blízké k $-\frac{\pi}{4}$) budeme mít, že křivka

$$x(\varphi) = d(\cos\varphi + \sin\varphi)\cos\varphi$$
$$y(\varphi) = d(\cos\varphi + \sin\varphi)\sin\varphi$$

je v definičním oboru $D(f)$ (protože pouze body na přímce $y = -x$ mají úhel buď $-\frac{\pi}{4}$ nebo $\frac{3\pi}{4}$).
Zbývá už jen zjistit, k čemu se budou blížit hodnoty funkce f pro tuto křivku:

$$f\big(x(\varphi), y(\varphi)\big) = \cdots = \frac{\cos\varphi\sin\varphi}{\cos\varphi + \sin\varphi}\varrho(\varphi) = d\cos\varphi\sin\varphi \quad \xrightarrow{\varphi\to-\frac{\pi}{4}} \quad -d\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{d}{2}$$

což jsme opět potřebovali.
Opět si všimněme, že úhel φ průvodiče křivky se zase přibližuje k úhlu přímky $y = -x$, která je vyřazena z definičního oboru $D(f)$.