

3. cvičení z Matematické analýzy 2

7. - 11. října 2019

3.1 Zjistěte, zda existují následující limity a pokud ano, určete jejich hodnotu:

(a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2+xy+y^2}{x^2-y^2},$

(b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{|x|+|y|},$

(c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (4,0)} \frac{\operatorname{tg}(xy)}{y}.$

Řešení:

(a) Definiční obor funkce $f(x, y) = \frac{x^2+xy+y^2}{x^2-y^2}$ je

$$D(f) : x \neq y \wedge x \neq -y.$$

Bod $(0, 0)$ je zřejmě hromadný bod množiny $D(f)$. Z tvaru funkce f už snadno vidíme, že na přímce $x = y$ se jmenovatel zlomku vynuluje a čitatel ne (až na bod $(0, 0)$). Takže můžeme použít jednoduché kritérium pro neexistenci (konečné) limity (viz Poznámky k limitám):

- $f(x, y) = \frac{h(x, y)}{g(x, y)}$, kde $h(x, y) = x^2 + xy + y^2$ a $g(x, y) = x^2 - y^2$ jsou spojité funkce
- položíme $M : x = y \wedge (x, y) \neq (0, 0)$
- pro každé $a \in M$ je $g(a) = 0$ a $h(a) \neq 0$
- $a_0 = (0, 0)$ je hromadný bod množiny M

Pak **NEEXISTUJE** (konečná) limita $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$.

Pro pořádek si ještě spočítejme alespoň jedno přiblížení, abychom věděli, že ani případná “nekonečná” limita nemůže existovat:

Vyzkoušíme se přiblížit k bodu $a_0 = (0, 0)$ po přímce $y = kx$, kde $k \neq \pm 1$. Pro $x \rightarrow 0$ máme $(x, kx) \rightarrow (0, 0)$. Takže nás zajímá

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, kx) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + kx^2 + k^2x^2}{x^2 - k^2x^2} = \frac{1 + k + k^2}{1 - k^2}.$$

I z tohoto výsledku už vidíme, že např. pro $k = 0$ je limita 1 a pro $k = 2$ je zase $-\frac{7}{3}$. Takže i toto nám ukazuje, že limita $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2+xy+y^2}{x^2-y^2}$ prostě neexistuje.

(b) Definiční obor funkce $f(x, y) = \frac{xy}{|x|+|y|}$ je

$$D(f) : (x, y) \neq (0, 0).$$

Tedy jmenovatel ve zlomku se vynuluje jen v jediném bodě. Nemáme tudíž možnost použít kritérium pro neexistenci limity (nemáme totiž dost velkou množinu, co by vynulovala jmenovatel). Zde vidíme, jak důležité pro další úvahy je určit si definiční obor funkce.

Co teď dál? Funkce ve jmenovateli by (bez absolutních hodnot) byla vlastně polynomem se stupněm 1. Na druhé straně v čitateli je zase polynom se stupněm 2, který by nejspíš měl převážít jmenovatele. Tušíme tedy, že by limita mohla existovat (a být nulová).

Zkusíme si to na nějakém přiblížení, např. po ose x (tj. při $y = 0$):

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$$

Tedy jediný kandidát na limitu je $c = 0$. Teď ukážeme, že to skutečně limita je. Použijeme přitom tyto odhady:

$$|x|, |y| \leq \underbrace{\sqrt{x^2 + y^2}}_{\|(x,y)-(0,0)\|} \leq |x| + |y|$$

Pro $(x, y) \neq (0, 0)$ tak dostaneme

$$0 \leq \left| f(x, y) - \underbrace{c}_{=0} \right| = \frac{|x| \cdot |y|}{|x| + |y|} \leq \frac{(\sqrt{x^2 + y^2})^2}{|x| + |y|} \leq \frac{(\sqrt{x^2 + y^2})^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Z věty o limitě sevřené funkce pak máme, že

$$0 = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0 \leq \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |f(x, y) - c| \leq \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{x^2 + y^2} = 0$$

kde jsme použili to, že funkce $g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ je spojitá, protože je to složení spojitých funkcí (polynom, odmocnina).

Nebo-li dokázali jsme, že $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = c = 0$.

Obecnější způsob: Existenci limity $\lim_{a \rightarrow a_0} f(a) = c$ si ještě procvičíme pomocí její definice. Má tedy platit, že

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall a \in D(f) \quad 0 < \|a - a_0\| < \delta \Rightarrow |f(a) - c| < \varepsilon.$$

Opět použijeme stejný odhad pro $c = 0$:

$$|f(x, y) - c| = |f(x, y)| \leq \dots \leq \sqrt{x^2 + y^2} = \|(x, y) - (0, 0)\|$$

Pro $\varepsilon > 0$ teď stačí vzít $\delta := \varepsilon$ a pak pro $a_0 = (0, 0)$ a $a = (x, y)$ takové, že $0 < \|a - a_0\| < \delta$ určitě máme, že

$$|f(a) - 0| \leq \dots \leq \|a - a_0\| < \delta = \varepsilon.$$

(c) Definiční obor funkce $f(x, y) = \frac{\operatorname{tg}(xy)}{y}$ je

$$D(f) : xy \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \quad \wedge \quad y \neq 0.$$

Bod $a_0 := (4, 0)$ je zřejmě hromadný bod množiny $D(f)$. Protože nás zajímá $(x, y) \rightarrow (4, 0)$, tak hodnoty x v nějakém okolí bodu $(4, 0)$ jsou nenulové. Proto (pro body $z \in D(f)$ v nějakém okolí a_0) můžeme psát

$$f(x, y) = \frac{\operatorname{tg}(xy)}{y} = \frac{\operatorname{tg}(xy)}{xy} \cdot x$$

což jsme takto udělali proto, abychom mohli vyšetřit $\lim_{(x,y) \rightarrow (4,0)} \underbrace{\frac{\operatorname{tg}(xy)}{xy}}_{=F(x,y)}$ pomocí věty o limitě složené funkce. Ta nám říká, že pokud

- $F(x, y) = h(g(x, y))$, kde $g(x, y) = xy$ a $h(z) = \frac{\operatorname{tg}(z)}{z}$.
- $\lim_{(x,y) \rightarrow a_0} g(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (4,0)} xy = 0$ ($=: b_0$) (neboť g je součin spojitých funkcí)
- $\lim_{z \rightarrow b_0} h(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\sin(z)}{z}}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{\cos(z)}}_{\rightarrow 1} = 1$ ($=: c$)
- a pokud (pro korektní použití) máme ještě zajištěno,
 - * že buď v prstencovém okolí $P_\varepsilon(a_0)$ bodu $a_0 = (4, 0)$ je $g(a) \neq b_0$ pro $a \in P_\varepsilon(a_0) \cap D(g)$ (což snadno zajistíme tím, že omezíme definiční obor funkce g z celého \mathbb{R}^2 jen na $D(g) : y \neq 0$, a i potom stále ještě budeme mít $D(g) \supseteq D(F)$)
 - * nebo že funkce h je spojitá v $b_0 = 0$ (což zajistíme tím, že funkci h spojitě dodefinujeme v $b_0 = 0$).

pak $\lim_{(x,y) \rightarrow a_0} F(x, y) = c$.

Zjistili jsme tedy, že

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (4,0)} \frac{\operatorname{tg}(xy)}{xy} = 1$$

a tudíž

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (4,0)} \frac{\operatorname{tg}(xy)}{y} = \lim_{(x,y) \rightarrow (4,0)} \underbrace{\frac{\operatorname{tg}(xy)}{xy}}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{x}_{\rightarrow 4} = 4.$$

3.2 Zjistěte, zda existují následující limity a pokud ano, určete jejich hodnotu:

- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$,
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{4(x-1)^2 + 3y^2}{|x-1| + y}$,
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2)x^2 y^2$,
- $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (1,1,1)} \frac{xz^2 - y^2 z}{xyz - 1}$.

Řešení:

(a) Definiční obor funkce $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$ je

$$D(f) : (x, y) \neq (0, 0).$$

Tedy jmenovatel ve zlomku se vynuluje jen v jediném bodě. Nemáme tudíž možnost použít kritérium pro neexistenci limity (nemáme totiž dost velkou množinu, co by vynulovala jmenovatel).

Co teď dál? Funkce ve jmenovateli je polynomem se stupněm 2, funkce v čitateli je zase polynom se stupněm 3, který by měl převážit jmenovatele. Tušíme tedy, že by limita mohla existovat (a být nulová).

Zkusíme si nějaké přiblížení, např. po ose x (tj. při $y = 0$):

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$$

Tedy jediný kandidát na limitu je $c = 0$. Teď ukážeme, že to skutečně limita je a to (opět) pomocí odhadu:

$$|x|, |y| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$$

Pro $(x, y) \neq (0, 0)$ tak dostaneme

$$0 \leq |f(x, y) - \underbrace{c}_{=0}| = \frac{|x|^2 \cdot |y|}{x^2 + y^2} \leq \frac{(\sqrt{x^2 + y^2})^3}{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Z věty o limitě sevřené funkce pak máme, že

$$0 = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0 \leq \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |f(x, y) - c| \leq \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{x^2 + y^2} = 0$$

kde jsme použili to, že funkce $g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ je spojitá, protože je to složení spojitých funkcí (polynom, odmocnina).

Nebo-li dokázali jsme, že $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = c = 0$.

Ještě pomocí polárních souřadnic: Můžeme ještě použít odhad pomocí polárních souřadnic (který ale vlastně nepřináší v tomto případě nic nového): body (x, y) v okolí $a_0 = (0, 0)$ vyjádříme jako

$$x = \varrho \cos \varphi \quad \text{a} \quad y = \varrho \sin \varphi$$

a dosadíme:

$$0 \leq |f(\varrho \cos \varphi, \varrho \sin \varphi) - \underbrace{c}_{=0}| = \frac{|\varrho \sin \varphi|^2 \cdot |\varrho \cos \varphi|}{\varrho^2} = \varrho \cdot \underbrace{|\sin \varphi|^2}_{\leq 1} \cdot \underbrace{|\cos \varphi|}_{\leq 1} \leq \varrho =: g(\varrho)$$

Nyní, protože $\lim_{\varrho \rightarrow 0^+} g(\varrho) = 0$ vyplývá z toho (viz Poznámky k limitám), že $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = c = 0$.

(b) Definiční obor funkce $f(x, y) = \frac{4(x-1)^2 + 3y^2}{|x-1|+y}$ je

$$D(f) : \quad y \neq -|x - 1|$$

což znamená, že z roviny musíme vyjmout graf funkce ve tvaru absolutní hodnoty. Bod $(1, 0)$ je evidentně hromadným bodem $D(f)$. V limitě se číselník i jmenovatel blíží k nule. Můžeme zkusit přiblížení po přímkách procházejících tímto bodem, které budou tvaru $y = k(x - 1)$, kde $k \neq \pm 1$. Zjistíme, že všechny dávají limitu 0.

Přesto ale (konečná) limita *neexistuje*. K tomu stačí použít jednoduché kritérium pro neexistenci (konečné) limity (viz Poznámky k limitám):

- $f(x, y) = \frac{h(x, y)}{g(x, y)}$, kde $h(x, y) = 4(x - 1)^2 + 3y^2$ a $g(x, y) = |x - 1| + y$ jsou spojitě funkce
- položíme $M : y = -|x - 1| \wedge (x, y) \neq (1, 0)$
- pro každé $a \in M$ je $g(a) = 0$ a $h(a) \neq 0$
- $a_0 = (1, 0)$ je hromadný bod množiny M

Pak **NEEXISTUJE** (konečná) limita $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} f(x, y)$.

A protože už z alespoň jednoho přiblížení máme hodnotu 0, tak ani případná “nekonečná” limita nemůže existovat.

(c) Pro funkci $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{x^2 y^2} = e^{x^2 y^2 \ln(x^2 + y^2)}$ je její definiční obor

$$D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

Stačí tedy zjistit $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^2 y^2 \ln(x^2 + y^2)$. Zkusíme si přiblížení, např. po ose x (tj. při $y = 0$):

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$$

Tedy jediný kandidát na limitu je $c = 0$. Ze zkušenosti s limitami můžeme už tušit, že limita bude existovat. Použijeme odhad:

$$|x|, |y| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$$

a z něj máme

$$0 \leq \left| x^2 y^2 \ln(x^2 + y^2) \right| \leq (x^2 + y^2)^2 \cdot \left| \ln(x^2 + y^2) \right|.$$

Použitím věty o limitě složené funkce pro předpoklady

- $g(x, y) = x^2 + y^2$ a $h(z) = z^2 \ln z$

- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x, y) = 0 (= b_0)$

- $\lim_{z \rightarrow (b_0)_+} h(z) = \lim_{z \rightarrow 0_+} z^2 \ln z = 0 \stackrel{\text{L'Hospital}}{\leftarrow} \lim_{z \rightarrow 0_+} \frac{(\ln z)'}{(z^{-2})'} = \lim_{z \rightarrow 0_+} \frac{z^{-1}}{-2z^{-3}} = \lim_{z \rightarrow 0_+} \frac{z^2}{-2} = 0$

- v prstencovém okolí bodu $(0, 0)$ je $g(x, y) \neq b_0$

dostáváme

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2)^2 \ln(x^2 + y^2) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} h(g(x, y)) = 0.$$

Z věty o limitě sevřené funkce pak máme

$$0 = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0 \leq \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left| x^2 y^2 \ln(x^2 + y^2) \right| \leq \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left| (x^2 + y^2)^2 \cdot \ln(x^2 + y^2) \right| = 0$$

tedy

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^2 y^2 \ln(x^2 + y^2) = 0$$

a konečně pak

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2)^{x^2 y^2} = e^0 = 1.$$

Ještě pomocí polárních souřadnic: Můžeme opět použít odhad pomocí polárních souřadnic (ale ani zde nedostaneme nic nového): body (x, y) v okolí $a_0 = (0, 0)$ vyjádříme jako

$$x = \varrho \cos \varphi \quad \text{a} \quad y = \varrho \sin \varphi$$

a dosadíme:

$$0 \leq \left| x^2 y^2 \ln(x^2 + y^2) \right| = \varrho^4 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \ln(\varrho^2) \leq \varrho^4 \ln(\varrho^2) =: g(\varrho)$$

A protože $\lim_{\varrho \rightarrow 0_+} g(\varrho) = \lim_{\varrho \rightarrow 0_+} 2\varrho^4 \ln \varrho = 0$ (viz výše) vyplývá z toho (viz Poznámky k limitám), že

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^2 y^2 \ln(x^2 + y^2) = 0.$$

A zbytek by byl stejný.

(d) Pro funkci $f(x, y, z) = \frac{xz^2 - y^2z}{xyz - 1}$ je její definiční obor

$$D_f : \quad xyz \neq 1$$

a bod $(1, 1, 1)$ je tedy hromadným bodem D_f . Stupně polynomů v čitateli i jmenovateli jsou stejné, takže spíš zkusíme, jestli limita vůbec existuje.

Zúžením f na přímkou $x = y = z$ (bez bodu $(x, y, z) = (1, 1, 1)$) dostáváme $f(x, x, x) = \frac{x^3 - x^3}{x^3 - 1} = 0$, takže

$$\lim_{\substack{(x,y,z) \rightarrow (1,1,1) \\ x=y=z}} f(x, y, z) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x, x, x) = 0 .$$

Na druhou stranu zúžením f na přímkou $x = y = 1$ (opět bez bodu $(x, y, z) = (1, 1, 1)$) dostáváme $f(1, 1, z) = \frac{z^2 - z}{z - 1} = z$, takže

$$\lim_{\substack{(x,y,z) \rightarrow (1,1,1) \\ x=y=1}} f(x, y, z) = \lim_{z \rightarrow 1} f(1, 1, z) = \lim_{z \rightarrow 1} z = 1 .$$

Původní limita tedy **NEEXISTUJE**.

Můžeme také použít kritérium pro neexistenci limity:

- $f(x, y, z) = \frac{h(x, y, z)}{g(x, y, z)}$, kde $h(x, y, z) = (xz - y^2)z$ a $g(x, y, z) = xyz - 1$ jsou spojité funkce
- položíme $M : xyz = 1 \wedge y \neq 1$
- pro každé $a \in M$ je $g(a) = 0$ a $h(a) \neq 0$
- $a_0 = (1, 1, 1)$ je hromadný bod množiny M

Pak (konečná) limita $\lim_{a \rightarrow a_0} f(a)$ neexistuje.

3.3 Zjistěte, zda existují následující limity a pokud ano, určete jejich hodnotu:

(a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{|x|^3 + |y|^3},$

(b) $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,1,0)} \frac{\sin(x y^2 z^3)}{xyz},$

(c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y}{y^2 + x},$

(d) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x + y) \sin\left(\frac{1}{x}\right) \sin\left(\frac{1}{y}\right).$

Řešení:

(a) Definiční obor funkce $f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{|x|^3 + |y|^3}$ je

$$D(f) : \quad (x, y) \neq (0, 0).$$

Tedy jmenovatel ve zlomku se vynuluje jen v jediném bodě. Nemůžeme tedy použít kritérium pro neexistenci limity (nemáme totiž dost velkou množinu, co by vynulovala jmenovatel).

Co teď dál? Funkce ve jmenovateli je polynomem se stupněm $2 + 2 = 4$, funkce v čitateli je sice není přímo polynom, ale chová se podobně jako polynom stupně 3. Tušíme tedy, že by čítec převážil jmenovatele a limita by mohla existovat (a být nulová).

Zkusíme si proto nejdříve nějaké přiblížení, např. po ose x (tj. při $y = 0$):

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$$

Tedy jediný kandidát na limitu je skutečně $c = 0$. Ted' ukážeme, že to limita je. K tomu stačí odhadnout funkci f jakoukoliv vhodnou funkcí, která má za limitu nulu. Vzhledem k čitateli v f se bude hodit tento jednoduchý odhad:

$$|x|, |y| \leq \sqrt[3]{|x|^3 + |y|^3}$$

Pro $(x, y) \neq (0, 0)$ tak dostaneme

$$0 \leq |f(x, y) - \underbrace{c}_{=0}| = \frac{|x|^2|y|^2}{|x|^3 + |y|^3} \leq \frac{\left(\sqrt[3]{|x|^3 + |y|^3}\right)^4}{|x|^3 + |y|^3} = \sqrt[3]{|x|^3 + |y|^3}$$

Z věty o limitě sevřené funkce pak máme, že

$$0 = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0 \leq \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |f(x, y) - c| \leq \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt[3]{|x|^3 + |y|^3} = 0$$

kde jsme použili to, že funkce $g(x, y) = \sqrt[3]{|x|^3 + |y|^3}$ je spojitá, protože je to složení spojitých funkcí (abs. hodnota, polynom, odmocnina).

Nebo-li dokázali jsme, že $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = c = 0$.

Poznámka: Kromě eukleidovské normy existují i jiné, tzv. p -normy pro $p \geq 1$ definované jako

$$\|\vec{v}\|_p = \sqrt[p]{|x_1|^p + \dots + |x_n|^p}$$

pro $\vec{v} = (x_1, \dots, x_n)$, a dokonce i ∞ -norma, která je definovaná jako

$$\|\vec{v}\|_\infty := \lim_{p \rightarrow \infty} \|\vec{v}\|_p = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}.$$

Všechny tyto normy jsou souměřitelné v tomto smyslu:

Pro libovolné $p, q \in \langle 1, \infty \rangle$ existuje $K > 0$ takové, že pro všechna $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ platí $\|\vec{v}\|_p \leq K \cdot \|\vec{v}\|_q$.

(b) Definiční obor funkce $f(x, y, z) = \frac{\sin(xy^2z^3)}{xyz}$ je

$$D(f) : x \neq 0 \wedge y \neq 0 \wedge z \neq 0.$$

Bod $a_0 := (0, 1, 0)$ je zřejmě hromadný bod množiny $D(f)$. Pro body $(x, y, z) \in D(f)$ můžeme psát

$$f(x, y, z) = \frac{\sin(xy^2z^3)}{xy^2z^3} \cdot yz^2$$

což jsme takto udělali proto, abychom mohli vyšetřit $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,1,0)} \underbrace{\frac{\sin(xy^2z^3)}{xy^2z^3}}_{=F(x,y,z)}$ pomocí věty o limitě složené funkce. Ta nám říká, že pokud

- $F(x, y, z) = h(g(x, y, z))$, kde $g(x, y, z) = xy^2z^3$ a $h(z) = \frac{\sin z}{z}$.
- $\lim_{(x,y,z) \rightarrow a_0} g(x, y, z) = \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,1,0)} xy^2z^3 = 0 (= b_0)$ (neboť g je součin spojitých funkcí)

- $\lim_{z \rightarrow b_0} h(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1$ ($=: c$)
- a (pro korektní použití) existuje prstencové okolí $P_\varepsilon(a_0)$ bodu $a_0 = (0, 1, 0)$ takové, že pro každé $a \in P_\varepsilon(a_0) \cap D(g)$ je $g(a) \neq b_0$
(což snadno zajistíme tím, že prostě omezíme definiční obor funkce g z celého \mathbb{R}^3 na $D(F)$, tj.
 $D(g) : x \neq 0 \wedge y \neq 0 \wedge z \neq 0$)

pak $\lim_{(x,y,z) \rightarrow a_0} F(x, y, z) = c$.

Zjistili jsme tedy, že

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,1,0)} \frac{\sin(xy^2z^3)}{xy^2z^3} = 1$$

a tudíž

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,1,0)} \frac{\sin(xy^2z^3)}{xyz} = \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,1,0)} \underbrace{\frac{\sin(xy^2z^3)}{xy^2z^3}}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{yz^2}_{\rightarrow 0} = 0.$$

(c) Definiční obor funkce $f(x, y) = \frac{x^2+y}{y^2+x}$ je

$$D(f) : x \neq -y^2.$$

Bod $(0, 0)$ je zřejmě hromadný bod množiny $D(f)$. Z tvaru funkce f už snadno vidíme, že na parabole $x = -y^2$ se jmenovatel zlomku vynuluje a čítecnel ne (až na bod $(0, 0)$). Takže můžeme použít jednoduché kritérium pro neexistenci (konečné) limity (viz Poznámky k limitám):

- $f(x, y) = \frac{h(x, y)}{g(x, y)}$, kde $h(x, y) = x^2 + y$ a $g(x, y) = y^2 + x$ jsou spojité funkce
- položíme $M : x = -y^2 \wedge (x, y) \neq (0, 0)$
- pro každé $a \in M$ je $g(a) = 0$ a $h(a) \neq 0$
- $a_0 = (0, 0)$ je hromadný bod množiny M

Pak **NEEXISTUJE** (konečná) limita $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$.

Pro pořádek si ještě spočítejme alespoň jedno přiblížení, abychom věděli, že ani případná “nekonečná” limita nemůže existovat:

Vyzkoušíme se přiblížit k bodu $a_0 = (0, 0)$ po přímce $y = kx$, kde $k \in \mathbb{R}$. Pro $x \rightarrow 0$ máme $(x, kx) \rightarrow (0, 0)$. Takže nás zajímá

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, kx) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + kx}{k^2x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + k}{k^2x + 1} = k.$$

I z tohoto výsledku už vidíme, že limita závisí na přiblížení. Takže i toto nám ukazuje, že limita $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2+y}{y^2+x}$ prostě neexistuje.

(d) Definiční obor funkce $f(x, y) = (x + y) \sin\left(\frac{1}{x}\right) \sin\left(\frac{1}{y}\right)$ je

$$D(f) : x \neq 0 \wedge y \neq 0.$$

Máme zde případ, kdy omezená funkce je násobena funkcí, která má limitu nula. Stačí tedy použít odhad pro $(x, y) \in D(f)$:

$$0 \leq |f(x, y)| = |x + y| \cdot \underbrace{\left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right|}_{\leq 1} \cdot \underbrace{\left| \sin\left(\frac{1}{y}\right) \right|}_{\leq 1} \leq |x + y|$$

Z věty o limitě sevřené funkce pak máme, že

$$0 = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 0 \leq \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} |f(x, y)| \leq \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} |x + y| = 0$$

kde jsme použili to, že funkce $g(x, y) = |x + y|$ je spojitá, protože je to složení spojitých funkcí (abs. hodnota, polynom).

Nebo-li dokázali jsme, že $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0$.

3.4 Zjistěte, zda existují následující limity a pokud ano, určete jejich hodnotu:

(a) $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + 2y^2}$,

(b) $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 1)} \frac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}$,

(c) $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^3}$.

Řešení:

(a) Definiční obor funkce $f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 + 2y^2}$ je

$$D(f) : (x, y) \neq (0, 0).$$

Tedy jmenovatel ve zlomku se vynuluje jen v jediném bodě. Nemůžeme tedy použít kritérium pro neexistenci limity (nemáme totiž dost velkou množinu, co by vynulovala jmenovatele).

Co teď dál? Funkce ve jmenovateli je polynomem se stupněm 2, funkce v čitateli je zase polynom se stupněm $2 + 2 = 4$, který by měl převážit jmenovatele. Tušíme tedy, že by limita mohla existovat (a být nulová).

Zkusíme si nějaké přiblížení, např. po ose x (tj. při $y = 0$):

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$$

Tedy jediný kandidát na limitu je $c = 0$. Teď ukážeme, že to skutečně limita je a to pomocí odhadu:

$$|x|, |y| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$$

Pro $(x, y) \neq (0, 0)$ tak dostaneme

$$0 \leq \left| f(x, y) - \underbrace{c}_{=0} \right| = \frac{|x|^2 \cdot |y|^2}{x^2 + 2y^2} \leq \frac{(\sqrt{x^2 + y^2})^4}{x^2 + 2y^2} \leq \frac{(\sqrt{x^2 + y^2})^4}{x^2 + y^2} = x^2 + y^2$$

Z věty o limitě sevřené funkce pak máme, že

$$0 = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 0 \leq \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} |f(x, y) - c| \leq \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} x^2 + y^2 = 0$$

kde jsme použili to, že funkce $g(x, y) = x^2 + y^2$ je spojitá, protože je to polynom.
 Nebo-li dokázali jsme, že $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = c = 0$.

(b) Definiční obor funkce $f(x, y) = \frac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}$ je

$$D(f) : x \neq 0 \wedge y \neq 0 \wedge xy \neq -1 .$$

Bod $a_0 := (0, 1)$ je zřejmě hromadný bod množiny $D(f)$.

Použijeme větu o limitě složené funkce. Máme, že

- $f(x, y) = h(g(x, y))$, kde $g(x, y) = xy$ a $h(z) = \frac{\sqrt{z+1}-1}{z}$.
- $\lim_{(x,y) \rightarrow a_0} g(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} xy = 0$ ($=: b_0$) (neboť g je součin spojitých funkcí)
- $\lim_{z \rightarrow b_0} h(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sqrt{z+1}-1}{z} \cdot \frac{\sqrt{z+1}+1}{\sqrt{z+1}+1} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{z(\sqrt{z+1}+1)} = \frac{1}{2}$ ($=: c$)
- existuje prstencové okolí $P_\varepsilon(a_0)$ bodu $a_0 = (0, 1)$ takové, že pro každé $a \in P_\varepsilon(a_0) \cap D(g)$ je $g(a) \neq b_0$ (což snadno zajistíme tím, že prostě omezíme definiční obor funkce g z celého \mathbb{R}^2 na $D(f)$, tj.
 $D(g) : x \neq 0 \wedge y \neq 0 \wedge xy \neq -1$)

a tedy $\lim_{(x,y) \rightarrow a_0} f(x, y) = c$.

Zjistili jsme tedy, že

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{\sqrt{xy+1}-1}{xy} = \frac{1}{2} .$$

(c) Definiční obor funkce $f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^3}$ je

$$D(f) : y^3 \neq -x^2 .$$

Bod $(0, 0)$ je zřejmě hromadný bod množiny $D(f)$. Z tvaru funkce f snadno vidíme, že na křivce $y = -\sqrt[3]{x^2}$ se jmenovatel zlomku vynuluje a čitatel ne (až na bod $(0, 0)$). Takže můžeme použít jednoduché kritérium pro neexistenci (konečné) limity (viz Poznámky k limitám):

- $f(x, y) = \frac{h(x, y)}{g(x, y)}$, kde $h(x, y) = x^2 y^2$ a $g(x, y) = x^2 + y^3$ jsou spojitě funkce
- položíme $M : y = -\sqrt[3]{x^2} \wedge (x, y) \neq (0, 0)$
- pro každé $a \in M$ je $g(a) = 0$ a $h(a) \neq 0$
- $a_0 = (0, 0)$ je hromadný bod množiny M

Pak **NEEXISTUJE** (konečná) limita $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$.

Pro pořádek si ještě spočítejme alespoň jedno přiblížení, abychom věděli, že ani případná “nekonečná” limita nemůže existovat:

Vyzkoušíme se přiblížit k bodu $a_0 = (0, 0)$ po přímce $y = kx$, kde $k \in \mathbb{R}$. Pro $x \rightarrow 0$ máme $(x, kx) \rightarrow (0, 0)$. Takže dostaneme

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, kx) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{k^2 x^4}{x^2 + k^3 x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{k^2 x^2}{1 + k^3 x} = 0 .$$

Proto ani “nekonečná” limita neexistuje.

Celkově máme, že $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^3}$ neexistuje.