4. cvičení z Matematické analýzy 2

14. - 18. října 2019

4.1 Vyšetřete existenci limit:

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$.

(b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4y^2}{x^8+y^4}$.

(c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|^\alpha|y|^\beta}{|x|^\gamma+|y|^\delta}$, kde $\alpha,\beta,\gamma,\delta>0$.

Řešení:

(a) Definiční obor funkce $f(x,y)=\frac{x^2}{x^2+y^2}$ je

$$D(f):\quad (x,y)\neq(0,0)\ .$$

Bod $(0,0)$ je zřejmě hromadný bod množiny $D(f)$. Abychom zjistili, jakou hodnotu by případná limita měla mít, vyzkoušíme se přiblížit k počátku po různých přímkách, konkrétně po přímkách $y=kx$, kde $k\in\mathbb{R}$. Pak máme

$$\lim_{x\to0} f(x,kx)=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{1}{1+k^2}\ .$$

Tato hodnota je ale různá pro různé k. Původní limita funkce f tedy neexistuje.

- -

(b) Definiční obor funkce $f(x,y)=\frac{x^4y^2}{x^8+y^4}$ je

$$D(f):\quad (x,y)\neq(0,0)\ .$$

Bod $(0,0)$ je zřejmě hromadný bod množiny $D(f)$. Abychom zjistili, jakou hodnotu by případná limita měla mít, vyzkoušíme se přiblížit k počátku po různých přímkách, konkrétně po přímkách $y=kx$, kde $k\in\mathbb{R}$. Pak máme

$$\lim_{x\to0} f(x,kx)=\lim_{x\to0}\frac{k^2x^6}{x^8+k^4x^4}=\lim_{x\to0}\frac{k^2x^2}{x^4+k^4}=0\ .$$

Vypadá to, že limita by mohla být $c=0$, ale na druhé straně polynom v čitateli má stupeň $4+2=6$ a ve jmenovateli zase stupeň 8. Abychom lépe pochopili, jak se funkce chová, vyrovnáme vhodnou substitucí stupně mocnin x a y ve jmenovateli:

$$f(|x|^{\frac18},|y|^{\frac14})=\frac{|x|^{\frac48}\cdot|y|^{\frac24}}{|x|+|y|}=\frac{\sqrt{|x|\cdot|y|}}{|x|+|y|}$$

Teď už je vidět, že když ve *výsledném* výrazu bude $|x|=|y|$, tak dostaneme jinou limitu, než je 0. Tedy naše volba křivky $\varphi:(0,+\infty)\to\mathbb{R}^2$ pro *původní* funkci bude

$$\varphi:\ \begin{array}{l} x=t^{\frac18}\\ y=t^{\frac14}\end{array}\ ,\ \text{pro } t>0$$

neboli $y = t^{\frac{1}{4}} = x^2$ pro $x > 0$, což je prostě *parabola*. Po dosazení pak máme

$$\lim_{t\to 0_+} (f\circ\varphi)(t) = \lim_{t\to 0_+} f(t^{\frac{1}{8}}, t^{\frac{1}{4}}) = \lim_{t\to 0_+} \frac{\sqrt{t\cdot t}}{t+t} = \frac{1}{2}\ .$$

Máme různé hodnoty pro různá přiblížení. Původní limita $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4y^2}{x^8+y^4}$ tedy neexistuje.

- -

(c) Definiční obor funkce $f(x,y) = \frac{|x|^\alpha |y|^\beta}{|x|^\gamma + |y|^\delta}$, kde $\alpha,\beta,\gamma,\delta > 0$, je

$$D(f):\quad (x,y) \neq (0,0)\ .$$

Bod $(0,0)$ je zřejmě hromadný bod množiny $D(f)$. Abychom zjistili, jakou hodnotu by případná limita měla mít, přiblížíme se k počátku např. po ose y:

$$\lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} 0 = 0\ .$$

Pokud limita existuje musí tedy být $c = 0$. Po vzoru předchozího příkladu zkusíme opět vyrovnat mocniny ve jmenovateli. Pro $t > 0$ tedy bude

$$f(t^{\frac{1}{\gamma}}, t^{\frac{1}{\delta}}) = \frac{t^{\frac{\alpha}{\gamma}} \cdot t^{\frac{\beta}{\delta}}}{t+t} = \tfrac{1}{2}\cdot t^{\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta}{\delta}-1}\ .$$

Vidíme tedy, že pokud bude $\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\delta} - 1 \leq 0$, tak

$$\lim_{t\to 0_+} f(t^{\frac{1}{\gamma}}, t^{\frac{1}{\delta}}) = \lim_{t\to 0_+} \tfrac{1}{2}\cdot t^{\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta}{\delta}-1} = \begin{cases} \frac{1}{2} & ,\ \text{pro}\ \ \frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta}{\delta}-1 = 0\ , \\ \infty & ,\ \text{pro}\ \ \frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta}{\delta}-1 < 0\ . \end{cases}$$

Pro různá přiblížení máme různé hodnoty (jedna z nich bude výše zmíněná 0), takže v tomto případě limita neexistuje.

Nechť je nyní $\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\delta} - 1 > 0$. Použijeme jednoduchý odhad:

$$|x|^\gamma, |y|^\delta \leq |x|^\gamma + |y|^\delta$$

Pro $(x,y) \neq (0,0)$ tak dostaneme

$$0 \leq f(x,y) = \frac{\left(|x|^\gamma\right)^{\frac{\alpha}{\gamma}} \cdot \left(|y|^\delta\right)^{\frac{\beta}{\delta}}}{|x|^\gamma + |y|^\delta} \leq \frac{\left(|x|^\gamma + |y|^\delta\right)^{\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta}{\delta}}}{|x|^\gamma + |y|^\delta} \leq \left(|x|^\gamma + |y|^\delta\right)^{\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta}{\delta}-1}\ .$$

Z věty o limitě sevřené funkce pak máme, že

$$0 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 \ \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \ \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(|x|^\gamma + |y|^\delta\right)^{\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta}{\delta}-1} = 0$$

kde jsme vyu žili to, že funkce $g(x,y) = \left(|x|^\gamma + |y|^\delta\right)^{\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta}{\delta}-1}$ je spojitá pro $\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\delta} - 1 > 0$, protože je to složení spojitých funkcí (obecné mocniny). V tomto případě tedy $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

Celkově jsme zjistili, že

- pro $\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\delta} > 1$ je limita rovna 0,
- pro $\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\delta} \leq 1$ limita neexistuje.

Připomenutí:
Nechť f je funkce z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$ a nechť a_0 je vnitřní bod jejího definičního oboru. *Derivace podle vektoru* $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$ funkce f v bodě a_0 je definována jako následující (konečná) hodnota

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{h}}(a_0) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(a_0 + t\vec{h})|_{t=0} = \lim_{t\to 0} \frac{f(a_0 + t\vec{h}) - f(a_0)}{t}$$

Neboli: Definiční obor $D(f)$ "projíždíme" po přímce $\varphi(t) = a_0 + t\vec{h}$, kde t představuje čas a $\vec{h}$ tím pádem vektor rychlosti pohybu po dané přímce. A ptáme se, jak se rychle se přitom budou měnit hodnoty funkce f při průchodu bodem a_0. Je zřejmé, že čím větší bude rychlost průchodu $\vec{h}$, tím rychlejší budou i změny hodnot funkce f.

Speciálně definujeme tzv. *parciální derivaci podle i-té proměnné* (dejme tomu, že se bude jmenovat x_i) jako

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_0) := \frac{\partial f}{\partial \vec{e}_i}(a_0)$$

kde $\vec{e}_i = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{i-\text{tá pozice}}, 0, \ldots, 0)$ je vektor standardní báze.

Konkrétně pro funkci $f : D \to \mathbb{R}$, kde $D \subseteq \mathbb{R}^2$ a vnitřní bod $a_0 = (x_0, y_0)$ definičního oboru $D(f) = D$ je

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x, y_0)_{|x=x_0}$$

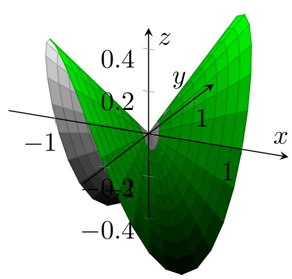
tedy funkci f stačí "obyčejně"derivovat podle proměnné x, kde druhou proměnnou y bereme na chvíli jako konstantu.

4.2 Najděte parciální derivaci $\frac{\partial f}{\partial x}$ funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{pro } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{pro } (x, y) = (0, 0) \ . \end{cases}$$

ve všech bodech $a = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Je funkce $\frac{\partial f}{\partial x}$ spojitá v bodě $a_0 = (0, 0)$?

Řešení:
Graf funkce f:



V bodech $a = (x, y) \neq (0, 0)$ je předpis funkce f v nějakém okolí $U_\varepsilon(a)$ ve tvaru $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Můžeme tak standardně použít postupy o derivování funkcí:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)(a) = \frac{y\sqrt{x^2+y^2} - xy\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-1/2}2x}{(\sqrt{x^2+y^2})^2} =$$

$$= \frac{y(x^2+y^2) - yx^2}{(\sqrt{x^2+y^2})^3} = \frac{y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

Pro bod $a = (0,0)$, který nemá v žádném svém okolí "jednotný" předpis funkce f, musíme použít (explicitní) definici:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} 0 = 0 \ .$$

Celkem jsme tedy dostali, že

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}, & \text{pro } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{pro } (x,y) = (0,0) \ . \end{cases}$$

a podíváme se, jestli je tato funkce spojitá v bodě $(0,0)$. Když si vezmeme např. přiblížení po ose y (tj. $x = 0$) dostaneme, že

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \frac{y^3}{(y^2)^{3/2}} = \begin{cases} 1, & \text{pro } y > 0, \\ -1, & \text{pro } y < 0 \ . \end{cases}$$

Tedy nejenže $\lim\limits_{y\to 0} \frac{\partial f}{\partial x}(0,y)$ není rovna 0 (což je hodnota $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$), ale dokonce tato limita vůbec neexistuje. Tedy ani limita

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$

neexistuje a funkce $\frac{\partial f}{\partial x}$ není spojitá v bodě $(0,0)$.

Na druhou stranu, jak je snadno vidět díky předpisu a spojitosti funkcí, v bodech $a = (x,y) \neq (0,0)$ funkce $\frac{\partial f}{\partial x}$ spojitá je.

Důležitá poznámka: Hodnotu $\frac{\partial f}{\partial x}(a_0)$ nelze obecně počítat jako $\lim\limits_{a\to a_0} \frac{\partial f}{\partial x}(a)$! Často ale ano, a to ovšem právě tehdy, jestliže funkce $\frac{\partial f}{\partial x}$ je spojitá v bodě a_0.

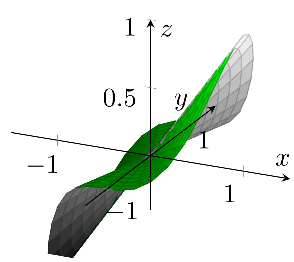
4.3 Najděte parciální derivaci $\frac{\partial f}{\partial x}$ funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & , \ (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & , \ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

ve všech bodech $a = (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Je funkce $\frac{\partial f}{\partial x}$ spojitá v bodě $a_0 = (0,0)$?

Řešení:

Graf funkce f:



V bodech $a = (x,y) \neq (0,0)$ je předpis funkce f v nějakém okolí $U_\varepsilon(a)$ ve tvaru $f(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2}$.

Můžeme tak standardně použít postupy o derivování funkcí:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^3}{x^2+y^2}\right)(a) = \frac{3x^2(x^2+y^2) - 2x\cdot x^3}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

Pro bod $a = (0,0)$, který nemá v žádném svém okolí "jednotný" předpis funkce f, musíme použít (explicitní) definici:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{t^3}{t^2+0} - 0}{t} = 1 \ .$$

Celkem jsme tedy dostali, že

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2}, & \text{pro } (x,y) \neq (0,0), \\ 1, & \text{pro } (x,y) = (0,0) \ . \end{cases}$$

a podíváme se, jestli je tato funkce spojitá v bodě $(0,0)$. Když si vezmeme např. přiblížení po ose y (tj. $x = 0$) dostaneme, že

$$\lim_{y\to 0}\tfrac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \lim_{y\to 0} 0 = 0 \ .$$

Tedy limita

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \tfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$

nemůže být rovna 1, což je hodnota $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, a tedy funkce $\frac{\partial f}{\partial x}$ *není spojitá v bodě* $(0,0)$.

Na druhou stranu, jak je snadno vidět díky předpisu a spojitosti funkcí, v bodech $a = (x,y) \neq (0,0)$ funkce $\frac{\partial f}{\partial x}$ spojitá je.

4.4 Najděte parciální derivaci $\frac{\partial f}{\partial x}$ funkce $f(x,y) = y\cdot x^{x^x}$ v bodě $a = (4,0) \in \mathbb{R}^2$.

Řešení:
Je dobré si uvědomit, jaká je posloupnost operací při umocňování - vyjádříme to závorkami: $x^{x^x} = x^{(x^x)}$. Funkci si přepíšeme do vhodného tvaru

$$f(x,y) = y\cdot x^{x^x} = y\cdot e^{x^x\cdot\ln x} = y\cdot e^{(e^{x\ln x}\cdot\ln x)} \ .$$

Teď můžeme

- buď začít derivovat podle x složenou funkci v obecném tvaru a pak do výsledku dosadit bod $a = (4,0)$ (což bude zdlouhavější)
- nebo naopak nejdříve dosadit y-ovou souřadnici bodu a (tj. $y = 0$) a zderivovat výslednou funkci (jedné proměnné) podle x (což je prostě využití definice).

  Druhý postup je jednodušší a kratší:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(4,0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x,0)_{|x=4} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ 0_{|x=4} = 0 \ .$$

4.5 Pro následující funkce f najděte parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}$ a $\frac{\partial f}{\partial y}$ a obory jejich existence:

(a) $f(x,y) = x^2y + \ln(x+2y)$,

(b) $f(x,y) = (xy)^{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Řešení:
(a) Definiční obor $D(f): x + 2y > 0$ je otevřená množina.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + \frac{1}{x+2y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + \frac{2}{x+2y}$$

Obě parciální derivace evidentně existují na $D(f)$.

(b) Funkci si vhodně přepíšeme jako $f(x,y) = (xy)^{\sqrt{x^2+y^2}} = e^{\ln(xy)\sqrt{x^2+y^2}}$. Definiční obor $D(f)$: $xy > 0$ je opět otevřená množina. Protože funkce je symetrická v proměnných x a y, stačí spočítat jen jednu z derivaci a druhou pak příslušně přepsat:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{\ln(xy)\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \left[\frac{1}{x}\sqrt{x^2+y^2} + \ln(xy)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right] = e^{\ln(xy)\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{y^2 + x^2(1+\ln(xy))}{x\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{\ln(xy)\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{x^2 + y^2(1+\ln(xy))}{y\sqrt{x^2+y^2}}$$

Obě parciální derivace opět existují na $D(f)$.

4.6 Pro následující funkce f najděte parciální derivace a obory jejich existence:

(a) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y}$,

(b) $f(x,y,z) = 3x^2y + 4xyz + 8xy^2z$,

Řešení:
(a) Definiční obor $D(f)$: $y \geq -x^2$. Jeho vnitřek (tj. množina, kde se můžeme ptát na parciální derivace) je otevřená množina $D(f)^\circ : y > -x^2$. Parciální derivace jsou

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \tfrac{1}{2}(x^2+y)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \tfrac{1}{2}(x^2+y)^{-\frac{1}{2}} \cdot 1 = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y}}\ .$$

Obě parciální derivace evidentně existují na $D(f)^\circ$.

(b) Definiční obor je zřejmě celé $\mathbb{R}^3$ a protože jde o polynom, parciální derivace existují všude v $\mathbb{R}^3$. Parciální derivace jsou

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6xy + 4yz + 8y^2z$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 + 4xz + 16xyz$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 4xy + 8xy^2\ .$$

Připomenutí: *Derivace (totální diferenciál)* funkce f z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$ ve vnitřním bodě $a_0 \in D(f)$ definičního oboru $D(f) \subseteq \mathbb{R}^n$ je takové lineární zobrazení (označené jako $f'(a_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$), které je nejlepší aproximací funkce f v bodě a_0 v tomto smyslu:

Rozdíl hodnot funkcí $f(a)$ a

$$g(a) := f(a_0) + f'(a_0)[a - a_0]$$

klesá v okolí bodu a_0 rychleji než $\|a - a_0\|$, tj.

$$\lim_{a \to a_0} \frac{f(a)-g(a)}{\|a-a_0\|} = \lim_{a \to a_0} \frac{f(a)-f(a_0)-f'(a_0)[a-a_0]}{\|a-a_0\|} = 0\ .$$

Funkce g se nazývá *linearizací* funkce f v bodě a_0.

Také to můžeme říct tak, že existuje $\varepsilon > 0$ a funkce ω definovaná na ε-okolí počátku souřadnic $\vec{0}$ taková, že

$$\lim_{\vec{u} \to \vec{0}} \omega(\vec{u}) = 0$$

a platí, že

$$f(a_0 + \vec{h}) = f(a_0) + f'(a_0)[\vec{h}] + \|\vec{h}\| \cdot \omega(\vec{h})$$

pro každý vektor $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$ takový, že $\|\vec{h}\| < \varepsilon$.

Poznámka:

- Pokud existuje derivace $f'(a_0)$, pak také existují derivace $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a_0)$ podle vektoru pro každý vektor $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ a platí, že

  $$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a_0) = f'(a_0)[\vec{u}]\ .$$

  Speciálně, existují pak všechny parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a_0)$ a matice zobrazeni $f'(a_0)$ ve standardní bázi má tvar

  $$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_0)\ , \ldots,\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(a_0) \right)\ .$$

  (Pro jednoduchost zápisu, budeme ztotožňovat zobrazení a jeho matici ve standardní bázi.)

  POZOR: Pouhá existence parciálních derivací ještě nezaručuje existenci (úplné) derivace! Ta je mnohem komplikovanější objekt. Máme ale tuto postačující podmínku:

- Nechť všechny parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ existují a *jsou spojité* na otevřené množině $G \subseteq \mathbb{R}^n$. Pak derivace $f'(a)$ existuje v každém bodě $a \in G$.

Definice: Nechť existuje $f'(a_0)$. *Gradient funkce* f v bode a_0 je takový vektor $\mathrm{grad} f(a_0) \in \mathbb{R}^n$, že pro každé $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$ je

$$f'(a_0)[\vec{h}] = \mathrm{grad} f(a_0) \cdot \vec{h}$$

(kde $\cdot$ je standardní skalární součin). Tedy ve standardní bázi máme

$$\mathrm{grad} f(a_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

a proto gradient i derivaci budeme ztotožňovat.

Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ je *směrem nulového růstu* funkce f v bodě a_0 právě když $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(a_0) = 0$ (a vektor $\vec{v}$ je směr, tj. $\|\vec{v}\| = 1$.)

4.7 Pro funkci $f(x, y) = \mathrm{arctg}(xy^2)$ v bodě $a_0 = (1, 1)$ určete

(a) totální diferenciál a derivaci ve směru $\vec{u} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,

(b) směry největšího a nejmenšího růstu a směry nulového růstu,

(c) tečnou rovinu,

(d) úhel, který tečná rovina svírá se základnou.

Řešení:
Podle předchozí poznámky ze spojitosti parciálních derivací (které vzápětí spočítáme) zjistíme, že derivace v bodě $a_0 = (1,1)$ skutečně existuje.

(a) Pro $a_0 = (1,1)$ tedy máme

$$f'(a_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a_0), \frac{\partial f}{\partial y}(a_0)\right) = \left(\frac{y^2}{1+xy^2}, \frac{2xy}{1+xy^2}\right)(a_0) = \left(\tfrac{1}{2}, 1\right) .$$

Dále je

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a_0) = f'(a_0)[\vec{u}] = \left(\tfrac{1}{2},\ 1\right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \tfrac{3\sqrt{2}}{2}.$$

(b) Jestliže má funkce f v daném bodě a_0 nenulový gradient, což je vektor

$$\mathrm{grad} f(a_0) := \left(\tfrac{\partial f}{\partial x}(a_0), \tfrac{\partial f}{\partial y}(a_0)\right)$$

pak směr tohoto vektoru je směrem největšího růstu funkce f v daném bodě (konkrétní směr je tedy znormovaný vektor $\frac{\mathrm{grad} f(a_0)}{\|\mathrm{grad} f(a_0)\|}$).

Pro vektor $\vec{h}$ takový, že $\|\vec{h}\| = 1$ je největší hodnotou, jaké může nabýt výraz $\frac{\partial f}{\partial \vec{h}}(a_0) = f'(a_0)[\vec{h}]$, hodnota $\|\mathrm{grad} f(a_0)\|$. To je okamžitý důsledek Cauchy-Schwartzovy nerovnosti, která říká, že pro každé dva vektory $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ platí

$$|\vec{v} \cdot \vec{w}| \leq \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|$$

a rovnost zde nastává pouze pokud jsou vektory $\vec{v}$ a $\vec{w}$ lineárně závislé.

Tedy skutečně dostáváme, že pokud $\|\vec{h}\| = 1$, pak

$$\left|\tfrac{\partial f}{\partial \vec{h}}(a_0)\right| = \left|\mathrm{grad} f(a_0) \cdot \vec{h}\right| \leq \|\mathrm{grad} f(a_0)\| \cdot \|\vec{h}\| = \|\mathrm{grad} f(a_0)\| .$$

V našem případě je tedy

$$\|\mathrm{grad} f(a_0)\| = \sqrt{(\tfrac{1}{2})^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

a

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{grad} f(a_0)}{\|\mathrm{grad} f(a_0)\|} = \tfrac{2}{\sqrt{5}} \cdot \left(\tfrac{1}{2}, 1\right) = \left(\tfrac{1}{\sqrt{5}}, \tfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

je směrem největšího růstu.

Směr nejmenšího růstu $\vec{w}$ (neboli největšího poklesu) je směr opačný ke gradientu tedy $\vec{w} = -\vec{v} = \left(-\tfrac{1}{\sqrt{5}}, -\tfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

Směr nulového růstu $\vec{w}$ je takový, že

$$0 = \tfrac{\partial f}{\partial \vec{w}}(a_0) = \mathrm{grad} f(a_0) \cdot \vec{w} .$$

Tedy jde o směry kolmé ke gradientu (tudíž kolmé k vektoru $\vec{v} = \left(\tfrac{1}{\sqrt{5}}, \tfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$) neboli dva navzájem opačné vektory

$$\vec{w}_1 = \left(-\tfrac{2}{\sqrt{5}}, \tfrac{1}{\sqrt{5}}\right) \text{ a } \vec{w}_2 = \left(\tfrac{2}{\sqrt{5}}, -\tfrac{1}{\sqrt{5}}\right) .$$

(c) Tečná rovina je graf linearizace funkce f v daném bodě $a_0 = (x_0, y_0)$. Má tedy rovnici:

$$z = f(a_0) + f'(a_0)[a - a_0]$$

neboli

$$z = f(a_0) + \left(\tfrac{\partial f}{\partial x}(a_0), \tfrac{\partial f}{\partial y}(a_0)\right)\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} = \tfrac{\pi}{4} + \left(\tfrac{1}{2},\ 1\right)\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} = \tfrac{\pi}{4} + \tfrac{1}{2}(x-1) + y - 1$$

$$\tfrac{1}{2}x + y - z = \tfrac{3}{2} - \tfrac{\pi}{4}$$

(d) Úhel $\alpha \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ mezi tečnou rovinou a základnou je ten, který odpovídá největší z možných směrnic přímek, které leží v tečné rovině dané linearizaci g, tedy:

$$\mathrm{tg}(\alpha) = \max \left\{ \frac{|g(a_0 + \vec{h}) - g(a_0)|}{\|\vec{h}\|} \,\middle|\, 0 \neq \vec{h} \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

a úpravou (z Cauchy-Schwartzovy nerovnosti) máme

$$\frac{|g(a_0 + \vec{h}) - g(a_0)|}{\|\vec{h}\|} = \frac{|f'(a_0)[\vec{h}]|}{\|\vec{h}\|} = \frac{|\mathrm{grad} f(a_0) \cdot \vec{h}|}{\|\vec{h}\|} \leq \|\mathrm{grad} f(a_0)\|$$

přičemž poslední nerovnost je nabyta pro $\vec{h} = \mathrm{grad} f(a_0)$. Odsud tedy máme, že

$$\mathrm{tg}(\alpha) = \|\mathrm{grad} f(a_0)\|$$

což je analogie toho, když pro funkci $\varphi(t)$ jedné proměnné v bodě t_0 je úhel tečné přímky daný jako $\mathrm{tg}(\alpha) = |\varphi'(t_0)|$.

V našem případě tudíž dostaneme:

$$\mathrm{tg}(\alpha) = \| \left(\tfrac{1}{2},\ 1\right) \| = \sqrt{(\tfrac{1}{2})^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

tedy

$$\alpha = \mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right) \doteq 48,19^\circ \ .$$

4.8 Pro funkci $f(x, y) = xy + \sin(x - y)$ v bodě $a_0 = (2, 2)$ určete

(a) derivaci a tečnou rovinu,

(b) ve kterém ze směrů $\vec{u}_1 = (0, 1)$ a $\vec{u}_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ má funkce větší růst,

(c) směr největšího a směry nulového růstu,

(d) úhel, který tečná rovina svírá se základnou.

Řešení:

Ze spojitosti parciálních derivací (které vzápětí spočítáme) zjistíme, že derivace v bodě $a_0 = (2, 2)$ skutečně existuje. Dále budeme postupovat podobně jako v příkladu **4.7**.

(a) Pro $a_0 = (2, 2)$ tedy máme

$$f'(a_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a_0), \frac{\partial f}{\partial y}(a_0)\right) = \Big(y + \cos(x - y),\ x - \cos(x - y)\Big)(a_0) = (3, 1) \ .$$

Tečná rovina má rovnici:

$$z = f(a_0) + f'(a_0)[a - a_0] = f(a_0) + \tfrac{\partial f}{\partial x}(a_0) \cdot (x - x_0) + \tfrac{\partial f}{\partial y}(a_0) \cdot (y - y_0) =$$

$$= 4 + 3(x - 2) + y - 2$$

neboli

$$3x + y - z = 4$$

(b) Máme

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}_1}(a_0) = f'(a_0)[\vec{u}_1] = (3,\ 1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

a

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}_2}(a_0) = f'(a_0)[\vec{u}_2] = (3,\ 1) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \sqrt{2}$$

takže větší růst je v $\vec{u}_2$.

(c) Směrem největšího růstu $\vec{v}$ je směr gradientu (pokud je nenulový), tj. je to směr daný vektorem $\mathrm{grad} f(a_0) = (3, 1)$ (konkrétně jde o směr $\vec{v} = \frac{\mathrm{grad} f(a_0)}{\|\mathrm{grad} f(a_0)\|} = \frac{1}{\sqrt{10}}(3, 1)$).

Směry nulového růstu $\vec{w}$ jsou kolmé ke gradientu, tj. jde o směry určené vektory $(1, -3)$ a $(-1, 3)$, konkretní směry (tj. znormované vektory) tedy jsou

$$\vec{w}_1 = \left(\tfrac{1}{\sqrt{10}}, -\tfrac{3}{\sqrt{10}}\right) \text{ a } \vec{w}_2 = \left(-\tfrac{1}{\sqrt{10}}, \tfrac{3}{\sqrt{10}}\right) .$$

(d) Úhel $\alpha \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ tečné roviny se základnou je

$$\mathrm{tg}(\alpha) = \|\mathrm{grad} f(a_0)\| = \|\,(3,\ 1)\,\| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

tedy

$$\alpha = \mathrm{arctg}\left(\sqrt{10}\right) \doteq 72.46^\circ\ .$$