5. cvičení z Matematické analýzy 2

21. - 25. října 2019

5.1 Pro funkci $f(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)$ v bodě $a_0 = (1,1)$ určete

(a) totální diferenciál a derivaci ve směru $\vec{u} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,

(b) směry největšího a nejmenšího růstu a směry nulového růstu,

(c) tečnou rovinu,

(d) úhel, který tečná rovina svírá se základnou.

Řešení:

Definiční obor je $D(f) : y \neq 0$, což je otevřená množina a protože zde všechny parciálních derivace existují a jsou spojité (jak se ihned přesvědčíme), tak derivace v bodě a_0 skutečně existuje. Dále budeme postupovat podobně jako v příkladu **4.7**.

(a) Pro $a_0 = (1,1)$ je

$$f'(a_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a_0), \frac{\partial f}{\partial y}(a_0)\right) = \left(\frac{1}{y(1+(\frac{x}{y})^2)}, -\frac{x}{y^2(1+(\frac{x}{y})^2)}\right)(a_0) = \left(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right) \ .$$

Máme

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}_2}(a_0) = f'(a_0)[\vec{u}_2] = \left(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \sqrt{2}.$$

(b) Směrem největšího růstu $\vec{v}$ je směr gradientu (pokud je nenulový), tj. je to směr daný vektorem $\operatorname{grad} f(a_0) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ (konkrétně jde o směr $\vec{v} = \frac{\operatorname{grad} f(a_0)}{\|\operatorname{grad} f(a_0)\|} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$).

Směrem nejmenšího růstu je směr opačný ke gradientu (pokud je nenulový), tj. je to směr $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Směry nulového růstu $\vec{w}$ jsou kolmé ke gradientu, tj. jde o směry určené vektory $(1,1)$ a $(-1,-1)$, konkrétní směry (tj. znormované vektory) tedy jsou

$$\vec{w}_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \text{a} \quad \vec{w}_2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \ .$$

(c) Tečná rovina má rovnici:

$$z = f(a_0) + f'(a_0)[a - a_0] = f(a_0) + \tfrac{\partial f}{\partial x}(a_0) \cdot (x - x_0) + \tfrac{\partial f}{\partial y}(a_0) \cdot (y - y_0) =$$

$$= \tfrac{\pi}{4} + \tfrac{1}{2}(x-1) - \tfrac{1}{2}(y-1)$$

neboli

$$x - y - 2z = -\tfrac{\pi}{2}$$

(d) Úhel $\alpha \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$ tečné roviny se základnou je

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \|\operatorname{grad} f(a_0)\| = \| \left(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right) \| = \sqrt{(\tfrac{1}{2})^2 + (-\tfrac{1}{2})^2} = \tfrac{\sqrt{2}}{2}$$

tedy

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \doteq 35.26^\circ \ .$$

Poznámka: Nechť pro funkci $f(x,y)$ existuje $\mathrm{grad} f(a_0) \in \mathbb{R}^3$ v bodě $a_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Pak vektor $\vec{U} \in \mathbb{R}^3$ leží ve vektorovém prostoru příslušnému tečné rovině v bodě a_0 právě když je

$$(\mathrm{grad} f(a_0), -1) \cdot \vec{U} = 0 \ ,$$

kde $(\mathrm{grad} f(a_0), -1) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a_0), \frac{\partial f}{\partial y}(a_0), -1 \right)$

Je to proto, ze rovnice tečné roviny má tvar $z = f(a_0) + \mathrm{grad} f(a_0)[a - a_0]$ neboli

$$(\mathrm{grad} f(a_0), -1) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - f(a_0) \end{pmatrix} = 0 \ .$$

Neboli $(\mathrm{grad} f(a_0), -1)$ je normálový vektor tečné roviny (a jejího přidruženého vektorového prostoru).

Nechť je nyní $\vec{U} = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$. Nechť $\vec{u} = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ představuje vektor z jeho prvních dvou souřadnic (neboli $\vec{u}$ je projekce $\vec{U}$ do základny). Pak $\vec{U}$ leží v tečné rovině právě když

$$0 = (\mathrm{grad} f(a_0), -1) \cdot \vec{U} = \alpha \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(a_0) + \beta \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(a_0) + \gamma \cdot (-1) = f'(a_0)[\vec{u}] - \gamma = \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a_0) - \gamma$$

neboli když

$$\gamma = \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a_0), \quad \text{pro} \quad \vec{u} = (\alpha, \beta)$$

tudíž vektor $\vec{U}$ je prostě tvaru

$$\vec{U} = \left(\vec{u}, \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a_0) \right) \ .$$

Současně si všimněme, že úhel $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} \right)$, který svírá vektor $\vec{U} = (\alpha, \beta, \gamma) = \left(\vec{u}, \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a_0) \right)$ se základnou je dán podobně jako předtím úhel tečné roviny (jen s tím rozdílem, že rozlišujeme směr nad a pod rovinou). Pro $\vec{u} \neq (0,0)$ je to tedy

$$\mathrm{tg}(\varphi) = \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = \frac{1}{\|\vec{u}\|} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a_0) = \frac{f'(a_0)[\vec{u}]}{\|\vec{u}\|} \ .$$

5.2 Pro funkci $f(x,y) = e^x \cos y + 2y$ v bodě $a_0 = (0,0)$ určete

(a) totální diferenciál a tečnou rovinu,

(b) směry největšího a nejmenšího růstu a směry nulového růstu,

(c) vektory $\vec{U}_1 = (0, 1, ?)$ a $\vec{U}_2 = (2, 1, ?)$ tak, aby ležely ve vektorovém prostoru odpovídajícímu tečné rovině. Který z vektoru ukazuje směrem většího stoupání v tečné rovině?

(d) úhel, který tečná rovina svírá se základnou.

Řešení:
Definiční obor $D(f) = \mathbb{R}^2$ je cela rovina, což je otevřená množina a protože zde všechny parciálních derivace existují a jsou spojité (jak se přesvědčíme dále), tak derivace v bodě a_0 skutečně existuje. Dále budeme postupovat podobně jako v příkladu **4.7**.

(a) Pro $a_0 = (x_0, y_0) = (0,0)$ máme

$$f'(a_0) = (e^x \cos y, -e^x \sin y + 2)_{|a_0} = (1, 2)$$

Tečná rovina má rovnici:

$$z = f(a_0) + f'(a_0)[a - a_0] = f(a_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(a_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(a_0) \cdot (y - y_0) =$$

$$= 1 + (x - 0) + 2(y - 0)$$

neboli

$$x + 2y - z = -1 \ .$$

(b) Směrem největšího růstu $\vec{v}$ je směr gradientu (pokud je nenulový), tj. je to směr daný vektorem $\mathrm{grad} f(a_0) = (1,2)$ (konkrétně jde o směr $\vec{v} = \frac{\mathrm{grad} f(a_0)}{\|\mathrm{grad} f(a_0)\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)$).

Směr nejmenšího růstu $\vec{w}$ (neboli největšího poklesu) je směr opačný ke gradientu tedy $\vec{w} = -\vec{v} = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

Směry nulového růstu $\vec{w}$ jsou kolmé ke gradientu, tj. jde o směry určené vektory $(2,-1)$ a $(-2,1)$, konkrétní směry (tj. znormované vektory) tedy jsou

$$\vec{w}_1 = \left(\tfrac{2}{\sqrt{5}}, -\tfrac{1}{\sqrt{5}}\right) \ \text{ a } \ \vec{w}_2 = \left(-\tfrac{2}{\sqrt{5}}, \tfrac{1}{\sqrt{5}}\right) \ .$$

(c) Podle poznámky výše potřebujeme zjistit jen derivace podle vektorů $\vec{u}_1 = (0,1)$ a $\vec{u}_2 = (2,1)$:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}_1}(a_0) = f'(a_0)[\vec{u}_1] = (1,\ 2) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2$$

a

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}_2}(a_0) = f'(a_0)[\vec{u}_2] = (1,\ 2) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 4$$

Jde tedy o vektory $\vec{U}_1 = (0,1,2)$ a $\vec{U}_2 = (2,1,4)$, které svírají se základnou postupně úhly

$$\mathrm{tg}(\varphi_1) = \frac{1}{\|\vec{u}_1\|} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{u}_1}(a_0) = \frac{2}{1} = 2$$

$$\mathrm{tg}(\varphi_2) = \frac{1}{\|\vec{u}_2\|} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{u}_2}(a_0) = \frac{4}{\sqrt{5}} \ (< 2)$$

takže větší stoupání v tečné rovině ukazuje vektor v $\vec{U}_1$.

(d) Úhel $\alpha \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$ tečné roviny se základnou je

$$\mathrm{tg}(\alpha) = \|\mathrm{grad} f(a_0)\| = \|\,(1,\ 2)\,\| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

tedy

$$\alpha = \mathrm{arctg}\left(\sqrt{5}\right) \doteq 65.91^\circ \ .$$

5.3 Pomocí diferenciálu (vhodné funkce ve vhodném bodě) spočtěte přibližnou hodnotu výrazu

(a) $\frac{1.03^2}{\sqrt[3]{0.98 \cdot \sqrt[4]{1.05^3}}}$.

(b) $1.04^{2.02 \cdot \sqrt{0.99}}$.

Řešení:

(a) Budeme uvažovat funkci

$$f(x,y,z) = \frac{x^2}{\sqrt[3]{y \cdot \sqrt[4]{z^3}}} = x^2 y^{-\frac{1}{3}} z^{-\frac{1}{4}}$$

(pro jednoduchost s definičním oborem $x, y, z > 0$) a najdeme její linearizaci g v bodě $a_0 = (1,1,1)$, tedy funkci

$$g(a) := f(a_0) + f'(a_0)[a - a_0] \ .$$

Hodnotu v bodě $a_1 = (1.03, 0.98, 1.05)$ pak vyjádříme přibližně jako

$$f(a_1) \doteq g(a_1) = f(a_0) + f'(a_0)[\vec{h}]$$

kde $\vec{h} = a_1 - a_0 = (0.03, -0.02, 0.05)$.

Máme tedy

$$f'(a_0) = \left(2xy^{-\frac{1}{3}}z^{-\frac{1}{4}}, -\tfrac{1}{3}x^2y^{-\frac{4}{3}}z^{-\frac{1}{4}}, -\tfrac{1}{4}x^2y^{-\frac{1}{3}}z^{-\frac{5}{4}}\right)(a_0) = \left(2, -\tfrac{1}{3}, -\tfrac{1}{4}\right)$$

takže

$$f(a_1) \doteq g(a_1) = f(a_0) + f'(a_0)[\vec{h}] = 1 + \left(2, -\tfrac{1}{3}, -\tfrac{1}{4}\right)\begin{pmatrix} 0.03 \\ -0.02 \\ 0.05 \end{pmatrix} =$$

$$= 1 + 0.06 + \tfrac{0.02}{3} - \tfrac{0.05}{4} = 1 + \tfrac{0.65}{12} \doteq 1.05417$$

(Pro srovnání: přesná hodnota zaokrouhlená na 5 desetinných míst je $f(a_1) \doteq 1.05512$.)

(b) Budeme uvažovat funkci

$$f(x, y, z) = x^{y\sqrt{z}} = e^{y\sqrt{z}\ln x}$$

(pro jednoduchost s definičním oborem $x, y, z > 0$) a najdeme její linearizaci g v bodě $a_0 = (1, 2, 1)$. Hodnotu v bodě $a_1 = (1.04, 2.02, 0.99)$ pak vyjádříme přibližně jako

$$f(a_1) \doteq g(a_1) = f(a_0) + f'(a_0)[\vec{h}]$$

kde $\vec{h} = a_1 - a_0 = (0.04, 0.02, -0.01)$.

Máme tedy

$$f'(a_0) = \left(\frac{y\sqrt{z}}{x}e^{y\sqrt{z}\ln x},\ \sqrt{z}\ln x \cdot e^{y\sqrt{z}\ln x},\ \frac{y\ln x}{2\sqrt{z}}e^{y\sqrt{z}\ln x}\right)(a_0) = (2, 0, 0)$$

takže

$$f(a_1) \doteq g(a_1) = f(a_0) + f'(a_0)[\vec{h}] = 1 + (2, 0, 0)\begin{pmatrix} 0.04 \\ 0.02 \\ -0.01 \end{pmatrix} =$$

$$= 1 + 0.08 = 1.08$$

(Pro srovnání: přesná hodnota zaokrouhlená na 5 desetinných míst je $f(a_1) \doteq 1.08202$.)

Věta: Nechť U je otevřená množina v $\mathbb{R}^3$, $\Phi : U \to \mathbb{R}$ je spojitě diferencovatelná na G. Označme

$$M = \{a \in U \mid \Phi(a) = 0\}$$

což je zřejmě vrstevnice funkce Φ.

Jestliže pro každé $a \in M$ platí, že $\mathrm{grad}\Phi(a) \neq \vec{0}$, pak M implicitně definovaná (regulární) plocha. Tečná rovina k M v bodě $a_0 = (x_0, y_0, z_0) \in M$ má rovnici

$$\mathrm{grad}\Phi(a_0) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = 0.$$

Poznámka: Každý graf spojitě diferencovatelné funkce $f : G \to \mathbb{R}$, kde $G \subseteq \mathbb{R}^2$ je otevřená v $\mathbb{R}^2$, můžeme přirozeně chápat jako implicitně definovanou (regulární) plochu pomocí funkce $\Phi : G \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\Phi(x, y, z) := f(x, y) - z$$

protože

$$GRAF\ (f) = \{(x, y, z) \in G \times \mathbb{R} \mid\ z = f(x, y)\ \} = \{(x, y, z) \in G \times \mathbb{R} \mid\ \Phi(x, y, z) = 0\ \}$$

Současně vidíme, že normálový vektor tečné roviny ke grafu funkce f v bodě $A_0 = \big(a_0, f(a_0)\big)$ pro $a_0 \in G$ je

$$\mathrm{grad}\Phi(A_0) = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}(A_0), \frac{\partial\Phi}{\partial y}(A_0), \frac{\partial\Phi}{\partial z}(A_0)\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a_0), \frac{\partial f}{\partial y}(a_0), -1\right) \neq \vec{0}$$

tedy je nenulový.

5.4 (úhly grafů funkcí)
Nalezněte úhel, který svírají

(a) graf funkce $f(x,y) = \ln(\sqrt{x^2+y^2})$ a plocha $M : (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 2$ v bodě $(1,0,?)$.

(b) graf funkce $f(x,y) = e^{\sin xy}$ a plocha $M : (x-1)^2 + \frac{y^2}{2} + (z-3)^2 = 7$ v bodě $(0,2,?)$.

Řešení:
Úhel, který svírají implicitně dané plochy M_1 a M_2, je dán jako úhel mezi jednotlivými tečnými rovinami a ten je zase určen jejich normálovými vektory n_1 a n_2, tj. gradienty funkcí Φ_1 a Φ_2. Z možných dvou (navzájem doplňkových) úhlů mezi tečnými rovinami si volíme ten menší. Tento úhel $\alpha \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ má tedy nezáporný kosinus a je tudíž jednoznačně určen jako

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{||\vec{n}_1|| \cdot ||\vec{n}_2||} \ .$$

(a) Třetí souřadnice bodu $A = (1,0,?)$, který je na grafu funkce f, je dána hodnotou $f(1,0) = \ln(1) = 0$. Tedy jde o bod $A = (1,0,0)$. Je dobře ještě ověřit, že takto určený bod skutečně leží v M.
Graf funkce f si zadejme implicitně pomocí funkce

$$\Phi_1(x,y,z) = f(x,y) - z = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) - z \ .$$

Plocha M je zadaná implicitně funkcí

$$\Phi_2(x,y,z) = (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 - 2 \ .$$

Normálové vektory tečných rovin v $A = (1,0,0)$ jsou

$$\vec{n}_1 = \text{grad } \Phi_1(A) = \Big(\frac{x}{x^2+y^2},\ \frac{y}{x^2+y^2},\ -1\Big)_{|A} = (1,0,-1)$$

$$\vec{n}_2 = \text{grad } \Phi_2(A) = \Big(2(x-1),\ 2(y+1),\ 2(z+1)\Big)_{|A} = (0,2,2)$$

Úhel $\alpha \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ je dán jako $\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{||\vec{n}_1|| \cdot ||\vec{n}_2||} = \frac{2}{\sqrt{2}\sqrt{8}} = \frac{1}{2}$, tedy $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

(b) Třetí souřadnice bodu $A = (0,2,?)$, který je na grafu funkce f, je dána hodnotou $f(0,2) = e^{\sin 0} = 1$. Tedy jde o bod $A = (0,2,1)$. Je dobré ještě ověřit, že takto určený bod skutečně leží v M.
Graf funkce f si zadejme implicitně pomocí funkce

$$\Phi_1(x,y,z) = e^{\sin(xy)} - z \ .$$

Plocha M je zadána implicitně funkcí

$$\Phi_2(x,y,z) = (x-1)^2 + \frac{y^2}{2} + (z-3)^2 - 7 \ .$$

Normálové vektory tečných rovin v $A = (0,2,1)$ jsou

$$\vec{n}_1 = \text{grad } \Phi_1(A) = \Big(y\cos(xy)e^{\sin(xy)},\ x\cos(xy)e^{\sin(xy)},\ -1\Big)_{|A} = (2,0,-1)$$

$$\vec{n}_2 = \text{grad } \Phi_2(A) = \Big(2(x-1),\ y,\ 2(z-3)\Big)_{|A} = (-2,2,-4)$$

Úhel $\alpha \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ je dán jako $\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{||\vec{n}_1|| \cdot ||\vec{n}_2||} = 0$, tedy $\alpha = \frac{\pi}{2}$ a plochy jsou vzájemně kolmé.

5.5 Najděte rovnici tečné roviny k elipsoidu $M: \; x^2+2y^2+z^2=1$, která je rovnoběžná s rovinou $\varrho: \; 4x+2y+z=3$.

Řešení:
Použijeme větu o tečné rovině k implicitně definované ploše v $\mathbb{R}^3$.

V našem případě je $\Phi(x,y,z)=x^2+2y^2+z^2-1$ a $U=\mathbb{R}^3$. Zřejmě $\operatorname{grad}\Phi(a)=(2x,4y,2z)$.

Ověříme si, že v každém bodě $a_0=(x_0,y_0,z_0)\in M$ je skutečně $\operatorname{grad}\Phi(a_0)\neq\vec{0}$ (tj. že v každém bodě M máme k dispozici normálový vektor tečné roviny $\operatorname{grad}\Phi(a_0)$):

Dokážeme to nepřímo: zřejmě $\operatorname{grad}\Phi(a)=(2x,4y,2z)=\vec{0}$ právě když $a=(0,0,0)$. Ovšem tento bod není v M, protože nesplňuje $\Phi(a)=0$.

Normálový vektor tečné roviny v bodě $a_0=(x_0,y_0,z_0)\in M$ je tedy právě $\operatorname{grad}\Phi(a_0)$. Tato rovina bude rovnoběžná s ϱ, která má normálový vektor $\mathbf{n}_\varrho=(4,2,1)$, právě když

$$(2x_0,4y_0,2z_0)=\operatorname{grad}\Phi(a_0)=\lambda\cdot\mathbf{n}_\varrho=\lambda\cdot(4,2,1)$$

pro nějaké $\lambda\in\mathbb{R}$, tedy $(x_0,y_0,z_0)=(2\lambda,\lambda/2,\lambda/2)$. Současně má také platit, že $x_0^2+2y_0^2+z_0^2=1$. Po dosazení pak dostaneme $(2\lambda)^2+2(\lambda/2)^2+(\lambda/2)^2=1$ tedy $\lambda=\pm 2/\sqrt{19}$.

Hledané tečné roviny pak musí mít normálový vektor $\mathbf{n}_\varrho$, tedy rovnici $4x+2y+z=c$, kde neznámé hodnoty $c\in\mathbb{R}$ určíme dosazením spočítaných bodů $a_0=\pm\frac{1}{\sqrt{19}}\cdot(4,1,1)$, kterými tečné roviny musí procházet. Výsledek je

$$4x+2y+z=\sqrt{19}$$

a

$$4x+2y+z=-\sqrt{19}.$$