7. cvičení z Matematické analýzy 2

4. - 8. listopadu 2019

7.1 (lokální extrémy)

Najděte lokální extrémy následujících funkcí:

(i) $f(x,y) = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$,

(ii) $f(x,y) = 6xy - x^3 - y^3$.

Řešení:

(i) Funkce je polynom a tedy má derivace všech řádů. Nutnou podmínkou pro extrém v daném bodě je nulovost první derivace.

$$f'(x,y) = (3x^2 - 6y,\ 24y^2 - 6x)$$

Tedy $f'(x,y) = (0,0)$ znamená

$$\begin{aligned} x^2 &= 2y \\ 4y^2 &= x \end{aligned} \quad \overset{x=4y^2}{\Longrightarrow} \quad \left(4y^2\right)^2 = 2y \quad \Longrightarrow \quad y = 0 \ \vee \ y = \frac{1}{2}$$

tedy řešení jsou právě $(x,y) = (0,0)$ nebo $(x,y) = (1, \frac{1}{2})$.

V daných (kritických) bodech dále vyšetříme druhou derivaci:

$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -6 \\ -6 & 48y \end{pmatrix}$$

- Pro $(x,y) = (0,0)$ je $f''(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$. Tedy pro $\vec{h} = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ je

$$f''(0,0)[\vec{h}, \vec{h}] = -12h_1h_2$$

a tato forma nabývá libovolných hodnot (je indefinitní). V bodě $(0,0)$ je tedy SEDLO.

- Pro $(x,y) = (1, \frac{1}{2})$ je $f''(1, \frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 12 \end{pmatrix}$. Podle Sylvestrova kritéria ($\Delta_1 = 6 > 0$, $\Delta_2 = 72 - 36 = 36 > 0$) je forma pozitivně definitní a tedy v daném bodě je (lokální) MINIMUM. Toto minimum ale není globální, protože funkce není zdola omezená (lze vzít např. zúžení $f(x,0) = x^3 + 5$).

(ii) Nutnou podmínkou pro lokální extrém v daném bodě je nulovost první derivace:

$$f'(x,y) = (6y - 3x^2, 6x - 3y^2)$$

Tedy $f'(x,y) = (0,0)$ znamená

$$\begin{aligned} 2y &= x^2 \\ 2x &= y^2 \end{aligned} \quad \overset{x=y^2/2}{\Longrightarrow} \quad 2y = \left(\frac{y^2}{2}\right)^2 \quad \Longrightarrow \quad y = 0 \ \vee \ y = 2$$

tedy řešení jsou právě $(x,y) = (0,0)$ nebo $(x,y) = (2,2)$.

V daných (kritických) bodech dále vyšetříme druhou derivaci.

$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} -6x & 6 \\ 6 & -6y \end{pmatrix}$$

• Pro $(x,y) = (0,0)$ je $f''(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$. Tedy pro $\vec{h} = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ je

$$f''(0,0)[\vec{h}, \vec{h}] = 12 \cdot h_1 h_2$$

a tato forma nabývá libovolných hodnot (je indefinitní). V bodě $(0,0)$ je tedy SEDLO.

• Pro $(x,y) = (2,2)$ je

$$f''(2,2) = \begin{pmatrix} -12 & 6 \\ 6 & -12 \end{pmatrix}.$$

Podle Sylvestrova kritéria ($\Delta_1 = -12 < 0$, $\Delta_2 = 144 - 36 = 108 > 0$) je forma daná druhou derivaci negativně definitní a tedy v daném bodě je lokální MAXIMUM.

Toto maximum ale není globální, protože funkce není shora omezená - např. stačí vzít zúžení $f(x,0) = -x^3$.

7.2 (lokální extrémy)

Najděte lokální extrémy následujících funkcí:

(i) $f(x,y,z) = x^3 + y^2 + \frac{z^2}{2} - 3xy - 2y + 2z$,

(ii) $f(x,y,z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$ pro $x,y,z > 0$.

Řešení:

(i) Funkce je polynom a tedy má derivace všech řádů. Nutnou podmínkou pro lokální extrém v daném bodě je nulovost první derivace.

$$f'(x,y,z) = \Big(3x^2 - 3y,\ 2y - 3x - 2,\ z + 2\Big)$$

Tedy $f'(x,y,z) = (0,0,0)$ právě když

$$\begin{array}{rcl} y & = & x^2 \\ 2y & = & 3x+2 \\ z & = & -2 \end{array} \quad \overset{y=x^2}{\Longrightarrow} \quad 2x^2 = 3x + 2 \quad \Longrightarrow \quad x = 2 \ \vee \ x = -\frac{1}{2}$$

tedy řešení jsou právě $(x,y,z) = (2,4,-2)$ nebo $(x,y,z) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -2\right)$. V daných (kritických) bodech dále vyšetříme druhou derivaci:

$$f''(x,y,z) = \begin{pmatrix} 6x & -3 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

• Pro $(x,y,z) = (2,4,-2)$ je

$$f''(2,4,-2) = \begin{pmatrix} 12 & -3 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Podle Sylvestrova kritéria ($\Delta_1 = 12 > 0$, $\Delta_2 = 24 - 9 = 15 > 0$, $\Delta_2 = \Delta_3 = 15 > 0$) je tato forma pozitivně definitní a tedy v daném bodě je (lokální) minimum.

- Pro $(x,y,z) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -2\right)$ je

$$f''\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -2\right) = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Podle Sylvestrova kritéria ($\Delta_1 = -3 < 0$, $\Delta_2 = -6 - 9 = -15 < 0$, $\Delta_2 = \Delta_3 = -15 < 0$) je tato forma indefinitní a tedy v daném bodě je sedlo.

Můžeme ještě zjistit, jestli lokální extrémy jsou i globální. Protože zřejmě $f(x,0,0) = x^3$ a tato funkce nabývá všech hodnot, původní funkce f žádné globální extrémy nemá.

(ii) Nutnou podmínkou pro lokální extrém v daném bodě je nulovost první derivace:

$$f'(x,y,z) = \left(1 - \frac{y^2}{4x^2},\quad \frac{y}{2x} - \frac{z^2}{y^2},\quad \frac{2z}{y} - \frac{2}{z^2}\right)$$

Tedy $f'(x,y,z) = 0$ právě když

$$\begin{array}{rcl} y^2 & = & 4x^2 \\ y^3 & = & 2xz^2 \\ y & = & z^3 \end{array} \quad \overset{y=z^3}{\Longrightarrow} \quad \begin{array}{rcl} (z^3)^2 & = & 4x^2 \\ (z^3)^3 & = & 2xz^2 \end{array} \quad \overset{x=z^7/2}{\Longrightarrow} \quad z^6 = 4\left(\frac{z^7}{2}\right)^2 \quad \overset{z>0}{\Longrightarrow} \quad z = 1$$

Řešení pro $x,y,z > 0$ je pouze $(x,y,z) = \left(\frac{1}{2}, 1, 1\right)$.

Dále vyšetříme druhou derivaci.

$$f''(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{y^2}{2x^3} & -\frac{y}{2x^2} & 0 \\ -\frac{y}{2x^2} & \frac{1}{2x} + \frac{2z^2}{y^3} & -\frac{2z}{y^2} \\ 0 & -\frac{2z}{y^2} & \frac{2}{y} + \frac{4}{z^3} \end{pmatrix}$$

- Pro $(x,y,z) = \left(\frac{1}{2}, 1, 1\right)$ je

$$f''\left(\frac{1}{2}, 1, 1\right) = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

Podle Sylvestrova kritéria ($\Delta_1 = 4 > 0$, $\Delta_2 = 12 - 4 = 8 > 0$, $\Delta_3 = 72 - 16 - 24 = 32 > 0$) je forma daná druhou derivaci pozitivně definitní a tedy v daném bodě je lokální MINIMUM.

Při hledání absolutních extrémů budeme využívat tyto věty:

Věta: Spojitá funkce na uzavřené a omezené (tzv. *kompaktní*) množině nabývá svého maxima i minima.

Věta: Nechť $U \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $f, g_i : U \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, k$ jsou spojitě diferencovatelné funkce. Položme

$$M = \bigcap_{i=1}^{k} \{a \in U \mid g_i(a) = 0\}.$$

Nechť $a_0 \in M$ je bodem lokálního extrému funkce f zúžené na M. Jestliže vektory

$$\operatorname{grad} g_1(a_0), \ldots, \operatorname{grad} g_k(a_0) \ \text{ jsou lineárně nezávislé}$$

pak existují $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ (tzv. *Langrangeovy multiplikátory*), že

$$f'(a_0) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i g_i'(a_0) .$$

(Jestliže výše zmíněná lineární nezávislost platí v každém bodě $a \in M$, pak se množina M nazývá *varieta* (angl. *manifold*) a je možné ji přiřadit dimenzi - pomocí věty o implicitní funkci - a sice $\dim M = n - k$. Dimenze tak odpovídá dimenzi n původního prostoru $\mathbb{R}^n$ sníženou o počet k nezávislých vazeb daných zobrazením Φ.)

7.3 (vázané extrémy)

Do elipsy $x^2 + 3y^2 = 12$ vepište rovnoramenný trojúhelník takový, že má základnu rovnoběžnou s osou x a má maximální obsah.

Řešení:
Vzhledem k symetrii elipsy, stačí vyšetřit případ, kdy jeden z vrcholů (x, y) základny bude ležet na polovině elipsy

$$M : x^2 + 3y^2 = 12 \quad \& \quad x > 0$$

a vrchol naproti základně bude v bodě $(0, 2)$.

Na M nyní hledáme maximum funkce

$$f(x, y) = x(2 - y)$$

(což je obsah daného trojúhelníka).

Použijeme metodu Langrangeových multiplikátorů. Množina M je zadána implicitně jako

$$M = \{(x, y) \in U \mid \Phi(x, y) = 0\}$$

kde $U : x > 0$ a vazbová funkce je

$$\Phi(x, y) = x^2 + 3y^2 - 12 \ .$$

Dále, vektor $\operatorname{grad} \Phi(x, y) = \Big(2x,\ 6y\Big)$ je nenulový pro každé $(x, y) \in M$ (jinak by to byl spor s tím, že má platit $x^2 + 3y^2 = 12$).

Věta o Lagrangeových multiplikátorech nám tedy říká, že pro extrém $a = (x, y)$ existuje $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$\big(2 - y,\ -x\big) = f'(a) = \lambda \Phi'(a) = \lambda \cdot \Big(2x,\ 6y\Big)$$

a

$$x^2 + 3y^2 = 12.$$

Z rovnic a omezení množinou U plyne, že ani jedna z hodnot x, y nemůže být nulová, takže máme

$$\begin{array}{rcl} 2 - y & = & 2\lambda x \\ -x & = & 6\lambda y \\ x^2 + 3y^2 & = & 12 \end{array} \quad \overset{\lambda = -x/(6y)}{\Longrightarrow} \quad \begin{array}{c} 2 - y = -\frac{x^2}{3y} \\ x^2 + 3y^2 = 12 \end{array} \quad \overset{x^2 = 12 - 3y^2}{\Longrightarrow} \quad 3y(2 - y) = 3y^2 - 12 \quad \overset{(x,y) \in M}{\Longrightarrow} \quad y = -1$$

tedy jediné řešení je $(x, y) = (3, -1)$ s hodnotou $f(3, -1) = 9$.

Abychom věděli, že spojitá funkce f bude nabývat svého maxima, potřebujeme množinu M uzavřít (omezená pak už bude). To znamená přidat k M body $(0, 2)$ a $(0, -2)$, které se tímto stanou dalšími podezřelými body z extrému. Jejich odpovídající hodnoty jsou

$$f\big(0, 2\big) = f\big(0, -2\big) = 0 \ .$$

Množina $\overline{M} = M \cup \{(0, 2),\ (0, -2)\}$ je nyní uzavřená a omezená množina a spojitá funkce tak na $\overline{M}$ nabývá svého maxima a minima.

Porovnáním hodnot podezřelých bodů vidíme, že pro vrchol $(3, -1)$ je skutečně nabyt maximální obsah.

7.4 (vázané extrémy)

Na elipse $M: \ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ nalezněte body, které mají největší a nejmenší vzdálenost od přímky $p: \ 3x + y - 9 = 0$.

Řešení:
Příklad můžeme řešit několika způsoby:

(1) Použijeme explicitní tvar funkce vyjadřující vzdálenost bodu $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ od přímky dané rovnicí $\alpha x' + \beta y' + \gamma = 0$, a sice $f(x, y) = \frac{|\alpha x + \beta y + \gamma|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$.

Odvození vzorce: Uděláme to rovnou pro vzdálenost bodů od roviny v $\mathbb{R}^3$ (pro $\mathbb{R}^2$ je analogické odvození úplně stejné). Nechť rovina ρ v $\mathbb{R}^3$ má rovnici $\alpha x' + \beta y' + \gamma z' + \delta = 0$. Její normálový vektor je tedy $n = (\alpha, \beta, \gamma)$ a rovnici pro bod $a' = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ pak můžeme napsat pomocí skalárního součinu jako $n \cdot a' = -\delta$. Zvolme si nyní nějaký bod $b \in \mathbb{R}^3$ v rovině ρ. Vzdálenost bodu $a = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ od roviny ρ je nyní dána jako velikost kolmého průmětu vektoru $a - b$ do směru normálového vektoru n, tedy pomocí vztahu

$$\left| (a - b) \cdot \frac{n}{\|n\|} \right|.$$

Protože bod b je v rovině ρ, platí $n \cdot b = -\delta$. Můžeme tedy psát

$$\left| (a - b) \cdot \frac{n}{\|n\|} \right| = \frac{|a \cdot n - b \cdot n|}{\|n\|} = \frac{|a \cdot n + \delta|}{\|n\|} = \frac{|\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}.$$

Budeme tedy hledat maximum a minimum funkce

$$f(x, y) = \frac{|3x + y - 9|}{\sqrt{3^2 + 1^2}}$$

za podmínky $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$. Protože f není všude diferencovatelná, můžeme si pomoci buď tak, že

- si vezmeme místo toho ekvivalentní zadání, kde hledáme minimum a maximum funkce

$$g(x, y) = 10 \cdot \Big(f(x, y) \Big)^2 = (3x + y - 9)^2$$

  (snažíme se o co nejjednodušší tvar, bez zbytečných konstant) nebo

- si všimneme, že M nemá průnik s přímkou p, což znamená, že leží v jedné z otevřených polorovin určených přímkou p (protože M je *souvislá* množina - je totiž obloukově souvislá). V tom případě je výraz $3x + y - 9$ na všech bodech z M vždy buď jen kladný nebo jen záporný. Hledání extrému funkce f pak ekvivalentně odpovídá hledání extrému funkce

$$h(x, y) = 3x + y - 9.$$

Zvolíme si druhou variantu (i když ani první není o nic těžší).

Pro body na elipse M dané vazbou $\Phi(x, y) := \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1 (= 0)$ je zřejmě $\operatorname{grad}(\Phi) = (\frac{x}{2}, \frac{2y}{9}) \neq \vec{0}$. Pro bod $a = (x, y) \in M$ absolutního extrému h na elipse M existuje $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$(3, \ 1) = \operatorname{grad}(h)_{|a} = \lambda \cdot \operatorname{grad}(\Phi)_{|a} = \lambda \left(\frac{x}{2}, \frac{2y}{9} \right)$$

a

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Z prvních dvou rovnic dostaneme

$$\lambda \frac{x}{2} = 3 \cdot \lambda \frac{2y}{9},$$

tedy $\lambda = 0$ nebo $y = \frac{3}{4}x$.

Pokud $\lambda = 0$, pak platí $3x + y - 9 = 0$ a tudíž hledáme průnik elipsy s přímkou p, který je ale prázdný.

Takže zbývá případ $y = \frac{3}{4}x$, který po dosazení do rovnice elipsy dává rovnici:

$$1 = \frac{x^2}{4} + \frac{(\frac{3}{4}x)^2}{9} = \frac{5}{16}x^2$$

tedy body $(x, y) = \pm\left(\frac{4}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}}\right)$. V těch funkce f vzdálenosti od přímky nabývá hodnot $\frac{9-3\sqrt{5}}{\sqrt{10}}$ a $\frac{9+3\sqrt{5}}{\sqrt{10}}$.

(2) Použijeme "intuitivní" náhled, který je ale vlastně pouze jinou verzí prvního postupu (díky němuž je také korektnost druhého postupu zaručena):

Tvrzení: Pokud je množina M (daná vazbou)

- *uzavřená,*
- *omezená* a
- *má tečny ve všech svých bodech,*

pak body z M, které jsou od přímky p nejdál nebo nejblíže, musí mít svou tečnu rovnoběžnou s touto přímkou.

Pro náš konkrétní případ je elipsa M vrstevnicí (vazbové) funkce $\Phi(x, y) := \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1$, takže normála kolmá na tečnu v bodě $a = (x, y) \in M$ je gradientem funkce Φ. Hledáme tedy body $a = (x, y) \in M$, ve kterých je normála k M násobkem normály přímky p. Pak tedy existuje $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$\left(\frac{x}{2}, \frac{2y}{9}\right) = \operatorname{grad}(\Phi)_{|a} = \lambda \cdot (3, 1)$$

a

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Není překvapením, že z první podmínky opět dostáváme rovnici $y = \frac{3}{4}x$ a tedy i stejné řešení jako v prvním postupu.

Poznámka: Představme si, co by mohlo stát, pokud bychom neměli zaručeny všechny výše zmíněné předpoklady množiny M, pro kterou zjišťujeme vzdálenosti bodu od přímky p metodou tečen:

- M má tečny ve všech svých bodech a je omezená, ale *NENÍ uzavřená*: za M stačí vzít např. naší elipsu, ze které jsme odstranili právě tyto extrémní body (extrémy prostě v množině obsažené nejsou, přestože bychom je formálně z postupu získali).
- M má tečny ve všech svých bodech a je uzavřená, ale *NENÍ omezená*: za M stačí vzít např. hyperbolu s asymptotou p (zde žádné extrémní body ani existovat nemohou).
- M je omezená a uzavřená, ale *NEMÁ tečny ve všech svých bodech*: za M stačí vzít např. vhodné natočený trojúhelník) (extrémy sice budou existovat, ale pouze pomocí tečen je nenajdeme).

(3) Použijeme postup, který se dá aplikovat pro vzdálenost obecných útvarů v rovině (případně v prostoru). To, co je na něm obecně těžší, je najít nakonec řešení výsledných rovnic. V našem případě ale problémy nebudou.

Uvažujme funkci (kvadrát) vzdáleností dvou bodů (x, y) a (u, v) jako

$$h(x, y, u, v) = (x - u)^2 + (y - v)^2$$

a budeme hledat její extrémy za podmínek $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ a $3u+v-9=0$. Protože ale jedna z podmínek dává neomezenou množinu (konkrétně je to přímka p), tak maximum funkce nebude existovat a postup je použitelný jen na hledání minima (a to ještě budeme muset správně odůvodnit).

Máme tedy dvě vazby

$$\Phi_1(x,y,u,v)=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-1$$

a

$$\Phi_2(x,y,u,v)=3u+v-9$$

s gradienty

$$\mathrm{grad}(\Phi_1)_{|a}=\left(\frac{x}{2},\frac{2y}{9},0,0\right)$$
$$\mathrm{grad}(\Phi_2)_{|a}=(0,0,3,1)$$

kde $a=(x,y,u,v)$. Označme si

$$K=\{a\in\mathbb{R}^4 \mid \Phi_1(a)=0 \;\&\; \Phi_2(a)=0\}.$$

Pro body $a\in K$ jsou gradienty evidentně lineárně nezávislé a pro body extrému funkce f na K pak existují $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, že

$$\Big(2(x-u),2(y-v),2(u-x),2(v-y)\Big)=\mathrm{grad}(h)_{|a}=\lambda\cdot\left(\frac{x}{2},\frac{2y}{9},0,0\right)+\mu\cdot(0,0,3,1)$$

a

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1 \quad \text{a} \quad 3u+v-9=0$$

(neboli máme 6 rovnic o 6-ti neznámých!). Naštěstí jsou rovnice poměrně jednoduché. Postupně dostaneme

$$\lambda\frac{x}{2}=2(x-u)=-3\mu$$
$$\lambda\frac{2y}{9}=2(y-v)=-\mu$$

tedy opět rovnici $\lambda\left(\frac{x}{2}-\frac{2y}{3}\right)=0$, kde případ $\lambda=0$ opět nemá řešení. Zbytek pak opět dává

$$(x_1,y_1)=\left(\frac{4}{\sqrt5},\frac{3}{\sqrt5}\right)$$
$$(x_2,y_2)=-\left(\frac{4}{\sqrt5},\frac{3}{\sqrt5}\right)$$

a pomocí rovnice $x-u=3(y-v)$ dopočítáme odpovídající body na přímce

$$(u_1,v_1)=\left(\frac{27\sqrt5-9}{10\sqrt5},\frac{9\sqrt5+27}{10\sqrt5}\right)$$

$$(u_2,v_2)=\left(\frac{27\sqrt5+9}{10\sqrt5},\frac{9\sqrt5-27}{10\sqrt5}\right).$$

Pro funkční hodnoty (neboli hodnoty extrémních vzdálenosti) bodů $a_i=(x_i,y_i,u_i,v_i)$ platí

$$h(a_1)<h(a_2).$$

Množina daná vazbami K je teď sice uzavřená, ale NENÍ omezená. Na druhou stranu pro $a\in K$ a $\|a\|\to\infty$ jdou hodnoty $h(a)$ také do nekonečna (protože elipsa je omezená). Nyní si stačí vzít dostatečně velkou uzavřenou kouli B tak, aby na množině $K\cap(\mathbb{R}^4\setminus B)$ byly hodnoty funkce h větší než např. $h(a_2)+1$. A dále:

- Na uzavřené a nyní už omezené množině $K \cap B$ bude spojitá funkce h nabývat svého maxima i minima.
- Na množině $K \cap \partial B$ budou hodnoty funkce h větší nebo rovny hodnotě $h(a_2) + 1$ (díky spojitosti h a díky jejím hodnotám na $K \cap (\mathbb{R}^4 \setminus B)$).
- Na množině $K \cap B^\circ$ (díky otevřenosti množiny B°) pak můžeme (a vlastně jsme to už udělali) použít obvyklý způsob vyšetření vázaných extrémů pomocí Langrangeových multiplikátorů. Výsledkem jsou podezřelé body a_1 a a_2 (které se evidentně musí nacházet v $K \cap B^\circ$ díky svým funkčním hodnotám$h(a_1) < h(a_2) < h(a_2) + 1$).
- Absolutní minimum funkce h na množině $K \cap B$ se tedy NEMŮŽE nacházet na "okraji"$K \cap \partial B$ protože tam je funkce "moc velká"a může to tedy být jedině bod a_1. Současně i na množině $K \cap (\mathbb{R}^4 \setminus B)$ je funkce "moc velká", a bod a_1 je tak opravdu absolutní minimum funkce h na původní množině K.

Takto tedy vypadá korektní zdůvodnění, že námi nalezený bod je minimum v případě, že množina daná vazbou sice nebyla omezená, ale na druhou stranu zase funkce "v nekonečnu roste do nekonečna".

A co bod a_2? Abychom zjistili, jak to vypadá zde, bylo by potřeba dalšího rozboru pomocí vyšších derivací. Intuitivně se zdá, že v něm nejspíš bude sedlo (z hlediska naší volby množiny K a funkce h). To už by ale byl poměrně náročný postup a, jak je vidět, třetí přístup se hodí opravdu jen k určení vzdálenosti množin (tj. minima funkce h).

7.5 (vázané extrémy na uzavřené množině s vnitřkem a hladkým okrajem)

Najděte nejmenší a největší hodnoty funkce

$$f(x, y) = x^2 - (y - 1)^2$$

na množině

$$M : \quad x^2 + y^2 \leq 1.$$

Načrtněte tuto množinu.

Řešení:

Množina M je kruh o poloměru 1 se středem v počátku. Příklad rozdělíme na vyšetření (volného) extrému na otevřené množině

$$M^\circ : \quad x^2 + y^2 < 1$$

a vázaného extrému na hranici

$$\partial M : \quad x^2 + y^2 = 1 \ .$$

Extrém na M°: Absolutní extrém na M° musí být lokální a tedy musí platit

$$f'(x, y) = \big(2x,\ -2(y - 1)\big) = (0, 0)$$

což nastává právě když $(x, y) = (0, 1)$. Tento bod ale neleží v M°, takže žádné podezřelé body zatím nedostáváme.

Extrém na ∂M:

Použijeme metodu Langrangeových multiplikátorů. Pro extrém $a = (x, y)$ na kružnici dané vazbovou funkcí

$$\Phi(x, y) = x^2 + y^2 - 1$$

existuje $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$\big(2x,\ -2(y-1)\big) = f'(a) = \lambda\Phi'(a) = \lambda \cdot \Big(2x,\ 2y\Big)$$

a

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Tedy má platit

$$x = x\lambda$$

$$1 - y = y\lambda\ .$$

Odsud máme, že buď je $x = 0$ nebo $\lambda = 1$. Z první možnosti a rovnice kružnice máme body $(0, \pm 1)$. Z druhé, tj. $\lambda = 1$ dostáváme $y = \frac{1}{2}$ a tudíž body $\Big(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\Big)$. Jejich funkční hodnoty jsou:

$$f\big(0,1\big) = 0, \qquad f\big(0,-1\big) = -4$$

$$f\big(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\big) = \frac{1}{2}\ .$$

Množina M je uzavřená a omezená množina a spojitá funkce tak v těchto bodech nabývá svého maxima a minima.

Porovnáním hodnot podezřelých bodů dostáváme, že funkce nabývá svého maxima v bodech $\big(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\big)$ a minima v bodě $(0, -1)$.

7.6 (vázané extrémy na uzavřené množině s vnitřkem a hladkým okrajem)

Najděte nejmenší a největší hodnoty funkce $f(x, y) = 3xy$ na množině

$$M: \quad x^2 + y^2 \leq 2.$$

Načrtněte tuto množinu.

Řešení:

Množina M je kruh o poloměru 2. Příklad rozdělíme na vyšetření (volného) extrému na otevřené množině

$$M^\circ: \qquad x^2 + y^2 < 2$$

a vázaného extrému na hranici

$$\partial M: \qquad x^2 + y^2 = 2\ .$$

Extrém na M°: Absolutní extrém na M° musí být lokální a tedy musí platit

$$f'(x, y) = \big(3y,\ 3x\big) = (0, 0)$$

což nastává právě když $(x, y) = (0, 0)$. Máme tak podezřelý bod $(x, y) = (0, 0)$ s hodnotou $f(0, 0) = 0$.

Extrém na ∂M:

Použijeme metodu Langrangeových multiplikátorů. Pro extrém $a = (x, y)$ na kružnici dané vazbovou funkcí

$$\Phi(x, y) = x^2 + y^2 - 2$$

existuje $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$\big(3y,\ 3x\big) = f'(a) = \lambda\Phi'(a) = \lambda \cdot \Big(2x,\ 2y\Big)$$

a

$$x^2 + y^2 = 2.$$

Ani jedna z proměnných nemůže být nulová, takže máme $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}\lambda = \frac{y}{x}$, tedy $x^2 = y^2$. Dosazením do rovnice kružnice dostaneme kandidáty na extrémy:

$$\pm(1, -1), \qquad \pm(1, 1),$$

s odpovídajícími hodnotami

$$f\big(-1, 1\big) = f\big(1, -1\big) = -3, \qquad f\big(1, 1\big) = f\big(-1, -1\big) = 3.$$

Množina M je uzavřená a omezená množina a spojitá funkce tak na M nabývá svého maxima a minima.

Porovnáním hodnot podezřelých bodů dostáváme, že funkce nabývá svého maxima v bodech $\pm(1, 1)$ a minima v bodech $\pm(1, -1)$.