8. cvičení z Matematické analýzy 2

11. - 15. listopadu 2019

Příklad **8.9**.

8.1 (vázané extrémy)
Najděte nejmenší a největší hodnoty

(a) funkce $f(x,y) = x - y + 3$ za podmínky $3x^2 + 5xy + 3y^2 = 1$,

(b) funkce $f(x,y,z) = x - 2y + 2z$ s vazebnou podmínkou $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Načrtněte útvary určené těmito vazbami.

Řešení:
(a) Hledáme absolutní extrémy funkce $f(x,y) = x - y + 3$ na množině

$$M = \{(x,y) \in U \mid \Phi(x,y) = 0\}$$

kde $U = \mathbb{R}^2$ (je tedy otevřená) a $\Phi(x,y) = 3x^2 + 5xy + 3y^2 - 1$.

• Ověříme, že grad $\Phi(a) \neq (0,0)$ pro každé $a \in M$:

Protože

$$\operatorname{grad} \Phi(x,y) = \Phi'(x,y) = \Big(6x + 5y,\ 5x + 6y\Big)$$

tak $\Phi'(x,y) = (0,0)$ právě když $(x,y) = (0,0)$. Bod $(0,0)$ ale není v M, takže v každém bodě $a \in M$ je $\Phi'(a) \neq (0,0)$.

• Z Langrangeovy věty proto máme, že v bodě $a = (x,y) \in M$ lokálního extrému f na M existuje $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$(1,-1) = f'(a) = \lambda \cdot \Phi'(a) = \lambda\Big(6x + 5y, 5x + 6y\Big)$$

a

$$3x^2 + 5xy + 3y^2 = 1.$$

Jelikož z rovnic plyne, že $\lambda \neq 0$, dostáváme rovnici $6x + 5y = \frac{1}{\lambda} = -(5x + 6y)$. Odsud plyne $x = -y$ a po dosazení do vazby získáme kandidáty na extrémy:

$$(1,-1), \quad (-1,1)$$

s hodnotami

$$f(1,-1) = 5, \quad f(-1,1) = 1.$$

• Potřebujeme ještě zjistit, zda množina M je vůbec omezená (uzavřenost M plyne snadno z toho, že $M = \Phi^{-1}(\{0\})$, neboli že je to vzor uzavřené množiny $\{0\}$ při spojitém zobrazení Φ).

Doplněním na čtverec

$$1 = 3x^2 + 5xy + 3y^2 = 3\left(x + \frac{5}{6}y\right)^2 + \frac{11}{12}y^2$$

zjistíme, že jde o omezenou množinu (konkrétně o (natočenou) elipsu). To lze zjistit i z toho, že kvadratická forma

$$Q(x,y) = 3x^2 + 5xy + 3y^2 = (x,y)\begin{pmatrix} 3 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

je pozitivně definitní (např. pomocí Sylvestrova kritéria).

- Spojitá funkce f tak na uzavřené a omezené množině M skutečně nabývá svého maxima v bodě $(1,-1)$ a minima v bodě $(-1,1)$.

Poznámka: Úloha (a) je ekvivalentní tomu, když máme najít na implicitně zadané křivce $M: \ 3x^2+5xy+3y^2=1$ body, kde tečna přímka je rovnoběžná s přímkou $x-y+3=0$.

(b) Postupujeme podobně jako v (a). Vazba představuje sféru s poloměrem 1. Položíme

$$\Phi(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1\ .$$

- Protože
$$\Phi'(x,y,z)=(2x,2y,2z)$$
tak $\Phi'(x,y,z)=\vec{0}$ právě když $(x,y,z)=(0,0,0)$, což ale zase nemůže splnit vazbu. Takže v každém bodě množiny
$$M=\{(x,y,z)\in U \mid \Phi(x,y,z)=0\}$$
(kde $U=\mathbb{R}^3$) je $\Phi'(x,y,z)\neq\vec{0}$.

- Pro bod $a=(x,y,z)\in M$ lokálního extrému f na M z Lagrangeovy vety teď existuje $\lambda\in\mathbb{R}$, že
$$(1,-2,2)=f'(a)=\lambda\cdot\Phi'(a)=\lambda(2x,2y,2z)$$
a
$$x^2+y^2+z^2=1.$$
Proto musí být $\lambda\neq 0$ a vyjádřením proměnných
$$x=\frac{1}{2\lambda}\qquad y=-\frac{1}{\lambda}\qquad z=\frac{1}{\lambda}$$
a dosazením do vazby získáme řešení $a=\pm\frac{1}{3}(1,-2,2)$ a $\lambda=\pm\frac{3}{2}$.

- Protože f nabývá extrému na M (neboť M je evidentně omezená a uzavřená), jsou uvedené body skutečně (absolutní) extrémy a funkční hodnoty jsou $f(a)=\pm 3$.

Poznámka: Úloha (b) je ekvivalentní tomu, když máme najít na implicitně zadané ploše $M: \ x^2+y^2+z^2=1$ body, kde tečná rovina je rovnoběžná s rovinou $x-2y+2z=0$.

8.2 (vázané extrémy na uzavřené množině s vnitřkem)
Kruhový talíř o rovnici $x^2+y^2\leq 1$ je zahřátý na teplotu $T(x,y)=x^2+2y^2-x$. Najděte nejteplejší a nejstudenější bod na talíři.

Řešení:
Vyšetření extrému T na uzavřené a omezené množině $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leq 1\}$ rozdělíme na případ (volného) extrému na otevřené množině

$$A^\circ: \quad x^2+y^2<1$$

a případ vázaného extrému na

$$\partial A: \quad x^2+y^2=1.$$

Extrém na A°:

Jestliže $a = (x, y) \in A^\circ$ je extrém T na A, pak je i lokálním extrémem T na A°. Takže musí platit, že

$$T'(a) = (2x - 1, 4y) = 0$$

tedy $a = (\frac{1}{2}, 0)$ a tento bod skutečně patří do A°. Máme tedy první podezřelý bod.

Extrém na ∂A:

Jestliže $a = (x, y) \in \partial A$ je extrém T na A, pak je i (vázaným) extrémem T na

$$\partial A : \quad \Phi(x, y) = 0$$

kde $\Phi(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Musí tedy existovat $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$(2x - 1, 4y) = T'(a) = \lambda\Phi'(a) = \lambda(2x, 2y)$$

a

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Takže máme

$$\begin{array}{rcl} 2x - 1 & = & \lambda 2x \\ 2y & = & \lambda y \\ x^2 + y^2 & = & 1 \end{array} \quad \overset{(2-\lambda)y=0}{\Longrightarrow} \quad \begin{array}{l} y = 0: \quad x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1 \\ \lambda = 2: \quad 2x - 1 = 2 \cdot 2x \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{1}{2} \quad \overset{y^2=1-x^2}{\Longrightarrow} \quad y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}$$

Dostáváme $a = \pm(1, 0)$ nebo $a = (-\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2})$. Teď víme, že jedinými možnými kandidáty na extrémy jsou body

$$\left(\tfrac{1}{2}, 0\right), \ (1, 0), \ (-1, 0), \ \left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ a } \left(-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Protože T nabývá na (uzavřené a omezené) množině A extrému, porovnáním funkčních hodnot

$$T\left(\tfrac{1}{2}, 0\right) = -\tfrac{1}{4}, \quad T(1, 0) = 0, \quad T(-1, 0) = 2, \quad T\left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \tfrac{9}{4} = T\left(-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

zjistíme, že T nabývá minima v $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ a maxima v $\left(-\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

8.3 (extrémy pro po částech diferencovatelný okraj)
Nalezněte největší a nejmenší hodnotu funkce $f(x, y) = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$ na množině

$$M : \quad x^2 \le y \le 4 .$$

Řešení:
Množina M je část ležící nad parabolou a pod přímkou a je zřejmě omezená i uzavřená (je průnikem uzavřených množin).

Příklad opět rozdělíme na vyšetření (volného) extrému na otevřené množině

$$M^\circ : \quad x^2 < y < 4$$

a vázaného extrému na hranici

$$\partial M : \quad \begin{array}{l} (y = x^2 \ \ \& \ \ -2 \le x \le 2) \ \vee \\ (y = 4 \ \ \& \ \ -2 \le x \le 2) \end{array}$$

kterou ale nejde vyjádřit pomocí jediné diferencovatelné vazby. Vazbami jsou dvě křivky (část paraboly a úsečka). POZOR: tyto dvě vazby ale NEPLATÍ současně! Každá vyjadřuje JINOU část okraje!

Extrém na M°:

$$f' = \big(6x^2 + 8x - 2y, 2y - 2x\big) = (0,0)$$

nastává (vzhledem k $x, y > 0$) právě když je splněna soustava

$$y = 3x^2 + 4x$$

$$y = x\ .$$

Jediná řešení této soustavy $(0,0)$ a $(-1,-1)$ ale nepatří do M°, takže žádné podezřelé body zatím nedostáváme.

Extrém na ∂M:

Na obou křivkách můžeme použít Lagrangeovu větu, ale nejvhodnější bude zavést nějakou parametrizaci a vyšetřit lokální extrémy zúžených funkcí:

• část paraboly parametrizujeme přirozeně pomocí

$$\varphi_1 : (-2,2) \to \mathbb{R}^2, \quad \varphi_1(t) = (t, t^2)\ .$$

Pokud $a = \varphi_1(t_0)$ je bodem extrému f na části paraboly, pak je t_0 extrémem funkce $f \circ \varphi_1$ a tedy musí být $(f \circ \varphi_1)'(t_0) = 0$. Tuto úvahu ovšem můžeme udělat právě jen proto, že t_0 je VNITŘNÍM bodem intervalu $(-2,2)$. Z tohoto důvodu MUSÍME při vyšetřování části paraboly vynechat její koncové body, kde navazuje na úsečku (tyto koncové body automaticky zařadíme do podezřelých bodů).

Budeme tedy vyšetřovat funkci

$$g_1(t) := f(\varphi_1(t)) = f(t, t^2) = 4t^2 + t^4 \quad \text{pro} \quad t \in (-2,2)\ .$$

Máme $g_1'(t) = 8t + 4t^3 = 0$ právě když $t = 0$. Podezřelým bodem tak je $(0,0) \in \partial M$ s hodnotou $f(0,0) = 0$.

• podobně úsečku parametrizujeme přirozeně pomocí OTEVŘENÉHO intervalu

$$\varphi_2 : (-2,2) \to \mathbb{R}^2, \quad \varphi_2(t) = (t, 4)\ .$$

Budeme tedy vyšetřovat funkci

$$g_2(t) := f(\varphi_2(t)) = f(t,4) = 2t^3 + 4t^2 - 8t + 16 \quad \text{pro} \quad t \in (-2,2)\ .$$

Rovnice $g_2'(t) = 6t^2 + 8t - 8 = 2(3t-2)(t+2) = 0$ má řešení pro $t = \frac{2}{3} \in (-2,2)$. Podezřelým bodem tak je $(\frac{2}{3}, 4) \in \partial M$ s hodnotou $f\left(\frac{2}{3}, 4\right) = \frac{16\cdot 22}{27}$.

• zbývají už jen dva průsečíky křivek $(-2,4)$ a $(2,4)$ s hodnotami $f(-2,4) = f(2,4) = 32$, které taky zahrneme mezi podezřelé body.

Porovnáním hodnot podezřelých bodů (tj. $32 > \frac{16\cdot 22}{27} > 0$) dostáváme, že funkce evidentně nabývá svého maxima v bodech $(-2,4)$ a $(2,4)$ a minima v bodě $(0,0)$.

8.4 (extrémy pro po částech diferencovatelný okraj)

Nalezněte největší a nejmenší hodnotu funkce $f(x,y) = x^2y(4-x-y)$ na množině

$$M: \quad x \geq 0 \ \ \&\ \ y \geq 0 \ \ \&\ \ x + y \leq 6\ .$$

Řešení:
Množina M je trojúhelník s vrcholy $(0,0)$, $(6,0)$ a $(0,6)$ a je zřejmě omezená i uzavřená (je průnikem uzavřených polorovin).

Příklad opět rozdělíme na vyšetření (volného) extrému na otevřené množině

$$M^\circ : \quad x > 0 \;\; \& \;\; y > 0 \;\; \& \quad x + y < 6$$

a vázaného extrému na hranici

$$\partial M : \quad \begin{array}{l} (y = 0 \;\; \& \;\; 0 \leq x \leq 6) \;\; \vee \\ (x = 0 \;\; \& \;\; 0 \leq y \leq 6) \;\; \vee \\ (x + y = 6 \;\; \& \;\; 0 \leq x \leq 6) \end{array}$$

kterou ale nejde vyjádřit pomocí jediné diferencovatelné vazby. Vazbami jsou tři otevřené úsečky (hraný trojúhelníky) a tři body (vrcholy trojúhelníků). Tyto vazby ale opět NEJSOU splněné SOUČASNĚ (což je vidět i tím, že používáme logickou spojku "NEBO", nikoliv "A").

Extrém na M°:

$$f' = \big(8xy - 3x^2y - 2xy^2, 4x^2 - x^3 - 2x^2y\big) = (0,0)$$

nastává (vzhledem k tomu, že $x, y > 0$) právě když je splněna soustava

$$8 = 3x + 2y$$

$$4 = x + 2y \; .$$

Tedy podezřelým bodem je řešení $a = (2,1) \in M^\circ$ s hodnotou $f(2,1) = 4$.

Extrém na ∂M:

Na obou odvěsnách trojúhelníku je funkce f identicky nulová, takže všechny tyto body prostě zařadíme do podezřelých bodů. Zbývá vyšetřit otevřenou úsečku, která představuje třetí stranu. Tentokrát ji prostě zparametrizujeme pomocí

$$\varphi(t) = (t, 6 - t) \;\; \text{pro} \;\; t \in (0,6)$$

a vyšetříme tak (lokální) extrémy funkce

$$g(t) := (f \circ \varphi)(t) = -2t^2(6 - t) = 2t^3 - 12t^2$$

pro $t \in (0,6)$. Máme

$$g'(t) := 6t^2 - 24t = 6t(t - 4) = 0$$

právě když $t = 4 \in (0,6)$ (zdůrazněme, že tento interval nutně musí být OTEVŘENÝ - jinak nemůžeme použít nutnou podmínku, tj. nulovost derivace). Tedy podezřelý bod je $a = (4,2)$ s hodnotou $f(4,2) = -64$.

Porovnáním hodnot podezřelých bodů (zejména nezapomínejme na vrcholy trojúhelníku jako samostatné vazby, které nelze zařadit do ostatních vazeb, protože ty musí být definovány v rámci otevřených množin - opět proto, abychom mohli derivovat) dostáváme, že funkce tedy evidentně nabývá svého maxima v bodě $(2,1)$ a minima v bodě $(4,2)$.

8.5 (vázané extrémy - aplikace)
Najděte tři pozitivní čísla jejichž součin je maximální, a jejichž součet je roven 100.

Řešení:
Zadání příkladu lze interpretovat také tak, že hledáme maximální objem kvádru, který se vejde do pravidelného trojbokého jehlanu, jehož jeden vrchol je společný s vrcholem kvádrů. Intuitivně lze očekávat, že maximální takový objem bude odpovídat krychli.

Budeme tedy hledat body maxima funkce

$$f(x, y, z) = xyz$$

na množině

$$M = \{(x, y, z) \in U \mid \Phi(x, y, z) = 0\},$$

kde

$$U : \ x, y, z > 0$$

je otevřená množina a

$$\Phi(x, y, z) = x + y + z - 100$$

je vazbová funkce.

Protože U je OTEVŘENÁ (což je podstatné!) a $\Phi'(a) \neq (0, 0, 0)$ pro každé $a \in M$, tak můžeme použít Langrangeovu podmínku pro extrém na M. Pro bod extrému $a = (x, y, z) \in M$ pak musí existovat $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$(yz, xz, xy) = f'(a) = \lambda\Phi'(a) = \lambda(1, 1, 1)$$

a

$$x + y + z = 100 \ .$$

Odsud máme např. že $yz = \lambda = xz$ a protože $z > 0$, tak dostaneme $x = y$. Podobně odvodíme, že $x = y = z$ a tedy $x + x + x = 100$. Takže jediný podezřelý bod z extrému je $a = \left(\frac{100}{3}, \frac{100}{3}, \frac{100}{3}\right)$ s hodnotou $f\left(\frac{100}{3}, \frac{100}{3}, \frac{100}{3}\right) = \left(\frac{100}{3}\right)^3$.

Abychom mohli využít věty o nabytí extrémů, potřebujeme ale uzavřenou množinu, což M není (je to trojúhelník, ale bez hran). Tak si M prostě uzavřeme, čímž dostaneme

$$\overline{M} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z \geq 0 \quad \& \quad \Phi(x, y, z) = 0\},$$

což je trojúhelník i s hranami. Na těchto přidaných hranách je ale funkce f nulová (a tudíž snadno uchopitelná), takže všechny hrany můžeme zařadit mezi podezřelé body z extrémů na $\overline{M}$. Tím jsme prošli všechny body $\overline{M}$.

Množina $\overline{M}$ je teď už uzavřená a omezená, takže spojitá funkce f zde nabývá svých extrémů. Porovnáním funkčních hodnot v podezřelých bodech teď snadno dostáváme, že na hranách nabývá f svého minima a v bodě $\left(\frac{100}{3}, \frac{100}{3}, \frac{100}{3}\right)$ svého (jediného) maxima (jak jsem očekávali).

8.6 (vázané extrémy - vzdálenost)
Najděte vzdálenost paraboly $M : \ y = x^2$ od přímky $p : \ y = x - 2$.

Řešení:
Můžeme použít některý z postupů v řešení příkladu **7.4**, ale musíme si uvědomit, že parabola NENÍ omezená množina (i když je uzavřená a má tečny ve všech svých bodech). Naštěstí ale funkce vzdálenosti

bodů paraboly M od přímky p i zde “v nekonečnu roste do nekonečna.” Minimum vzdálenosti tedy musí být nabyto v nějakém bodě M a v něm musí být tečna rovnoběžná s přímkou p.

Tento argument nebudeme dále podrobněji rozebírat a spokojíme se zde s geometrickým náhledem. Tj. hledáme bod na parabole M, kde tečná přímka je rovnoběžná s přímkou p:

Směrnici $\alpha \in \mathbb{R}$ tečny v bodě $a \in M$, který je grafem funkce $g(x) = x^2$, můžeme získat také právě pomocí derivace této funkce jedné proměnné, tj. $\alpha = \frac{d}{dx}(x^2) = 2x$. Směrnice přímky p je zřejmě 1. Takže z $2x = 1$ plyne $x = \frac{1}{2}$ a tedy $y = x^2 = \frac{1}{4}$.

Vzdálenost ρ bodu $(x, y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) \in M$ od přímky $p:\ x' - y' - 2 = 0$ je tedy podle obecného vzorce (viz **7.4**)

$$\varrho = \frac{|x - y - 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - 2|}{\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{8}.$$

8.7 (vázané extrémy - aplikace)

Do úseče eliptického paraboloidu $z = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3}$ vymezené rovinou $z = 1$ vepište kvádr takový, že jeho stěny budou rovnoběžně s jednotlivými souřadnými rovinami a jenž bude mít maximální objem.

Řešení:

Vzhledem k symetriím stačí vyšetřit případ, kdy čtvrtina kvádru leží v množině $x, y, z \geq 0$. Tato část je jednoznačně určena svým vrcholem (x, y, z), který leží v množině:

$$M: \quad z = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} \ \ \& \ \ 0 \leq x, y \ \ \& \ \ 0 \leq z \leq 1$$

objem této části je pak dán hodnotou

$$f(x, y, z) = xy(1 - z)\ .$$

Hledáme tedy maximum f na M. Množina M je uzavřena (je to průnik uzavřených množin) a omezená (jak se snadno nahlédne). K použití věty o Langrangeových multiplikátorech potřebujeme ale množinu tvaru $\{a \in U \mid \Phi(a) = 0\}$, kde speciálně U je OTEVŘENÁ množina v $\mathbb{R}^3$. Množinu M proto rozdělíme na

$$M_1: \quad \underbrace{0 < x, y\ \&\ \ 0 < z < 1}_{=:U} \ \ \& \ \ \Phi(x, y, z) = 0$$

a

$$M_2: \quad (x = 0\ \vee\ y = 0\ \vee\ z = 0\ \vee\ z = 1) \ \ \& \ \ \Phi(x, y, z) = 0$$

kde $\Phi(x, y, z) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} - z$ je vazbová funkce.

Pro body extrémů na M_1 můžeme teď použít Lagrangeovu podmínku (protože pro $a \in M_1$ je $\Phi'(a) \neq (0, 0, 0)$, jak bude vidět). Tedy budeme tu mít $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$\Big(y(1 - z),\ x(1 - z),\ -xy\Big) = f'(a) = \lambda\Phi'(a) = \lambda\Big(x,\ \tfrac{2}{3}y,\ -1\Big)$$

a

$$z = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3}\ .$$

Protože na U jsou hodnoty x a y nenulové, můžeme udělat následující úpravy:

$$\begin{aligned} y(1-z) &= \lambda x \\ x(1-z) &= \lambda \tfrac{2}{3} y \\ xy &= \lambda \\ z &= \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{y^2}{3} \end{aligned} \quad \overset{\lambda=xy}{\Longrightarrow} \quad \begin{array}{c} y(1-z) = x^2 y \\ x(1-z) = \frac{2}{3} y^2 x \\ z = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} \end{array} \quad \overset{x\neq 0\neq y}{\Longrightarrow} \quad \begin{array}{c} 1-z = x^2 \\ 1-z = \frac{2}{3} y^2 \\ z = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} \end{array} \quad \overset{\substack{x^2=1-z \\ y^2/3=(1-z)/2}}{\Longrightarrow}$$

$$\Longrightarrow \quad z = \frac{1-z}{2} + \frac{1-z}{2} \quad \Longrightarrow \quad z = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{c} x^2 = 1-z = \frac{1}{2} \\ y^2 = \frac{3}{2}(1-z) = \frac{3}{4} \end{array} \quad \overset{x,y\geq 0}{\Longrightarrow} \quad \begin{array}{c} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}$$

Jediný podezřelý bod na M_1 je tedy $a = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ s hodnotou $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}}{8}$.

Na množině M_2 je funkce f konstantně nulová, takže celou M_2 můžeme zařadit mezi podezřelé body.

Porovnáním funkčních hodnot (a tím, že f nabývá extrémů na M), pak ihned máme, že kvádr s maximálním objemem je určen vrcholem $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ (a jeho symetrickými protějšky na eliptickém paraboloidu).

8.8 (extrémy pro dvě vazby)

Určete největší a nejmenší hodnoty funkce $f(x, y, z) = xy + yz$ na množině M dané podmínkami

$$x^2 + y^2 = 2 \qquad \text{a} \qquad y + z = 2.$$

Řešení:

Tentokrát máme vazby dvě - první představuje válec a druhý rovinu, která ho šikmo řeže. Výsledkem je tedy prostorová křivka, a sice elipsa. Položme

$$\Phi_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2$$

$$\Phi_2(x, y, z) = y + z - 2.$$

Pak je $M = \{a \in \mathbb{R}^3 \mid \Phi_1(a) = 0 \ \ \& \ \ \Phi_2(a) = 0\}$.

- *uzavřenost* M: plyne z toho, že jde o průnik uzavřených množin $\Phi_1(a) = 0$ a $\Phi_1(a) = 0$.
- *omezenost* M: Z $x^2 + y^2 = 2$ plyne omezenost proměnných x a y a tím pádem i omezenost $z = 2 - y$. Víme to i toho, že M je elipsa.
- Budeme tedy potřebovat ověřit nezávislost vazeb (v bodech množiny M), tj. lineární nezávislost gradientů vazeb v příslušných bodech. To už je vcelku vidět z geometrického náhledu, kdy příslušné tečné roviny v bodech množiny M nesplývají. Výpočetně to pak znamená ukázat, že pro $a = (x, y, z)$ platí:

$$\Phi_1(a) = 0 \ \ \& \ \ \Phi_2(a) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \Phi_1'(a) \ \text{ a } \ \Phi_2'(a) \ \text{ jsou lineárně nezávislé.}$$

Máme

$\Phi_1'(a) = (2x, 2y, 0)$

$\Phi_2'(a) = (0,1,1)$.

Tyto vektory jsou lineárně závislé právě když $x = y = 0$. Pak ale není splněna podmínka $x^2+y^2 = 2$. Pro body z M tak máme opravdu nezávislost vazeb.

• Teď konečně můžeme (korektně) použít větu o Lagrangeových multiplikátorech:

Pro bod $a = (x, y, z) \in M$ absolutního (a tedy i lokálního) extrému f na M teď existují $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, že

$$(y, x+z, y) = f'(a) = \lambda \cdot \Phi_1'(a) + \mu \cdot \Phi_2'(a) = \lambda(2x, 2y, 0) + \mu(0,1,1)$$

a

$$x^2 + y^2 = 2 \qquad \text{a} \qquad y + z = 2.$$

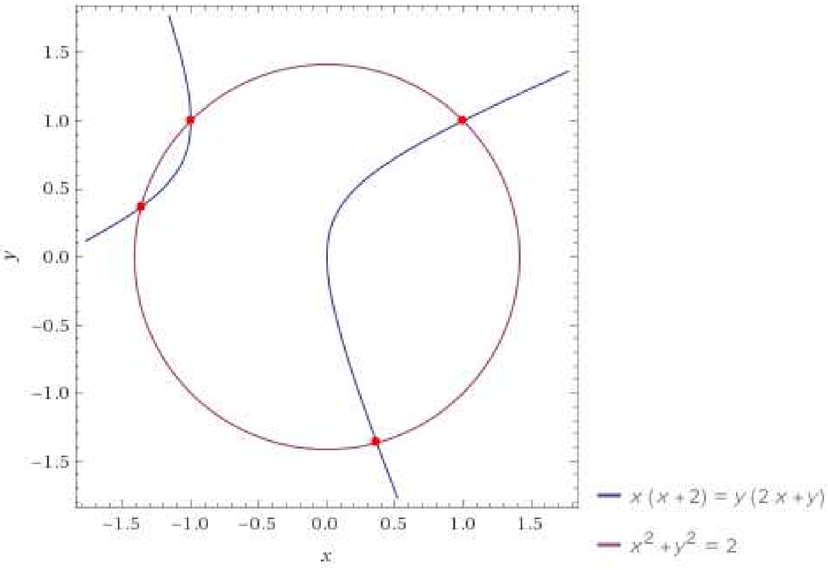
Z rovnic plyne, že nemůže být $x = 0$ (jinak by bylo $y = 2\lambda x = 0$ a tedy by bylo $x^2 + y^2 \neq 2$, spor).

$$\begin{array}{rcl} y &=& 2\lambda x \\ x+z &=& 2\lambda y + \mu \\ y &=& \mu \\ y+z &=& 2 \\ x^2+y^2 &=& 2 \end{array} \quad \overset{2\lambda = y/x;\ \mu = y}{\Longrightarrow} \quad \begin{array}{c} x + z = \frac{y}{x} y + y \\ y + z = 2 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{array} \quad \overset{z = 2-y}{\Longrightarrow} \quad \begin{array}{c} x + 2 - y = \frac{y^2}{x} + y \\ x^2 + y^2 = 2 \end{array} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{array}{c} x^2 + 2x = y^2 + 2yx \\ x^2 + y^2 = 2 \end{array} \quad \overset{x^2 = 2-y^2}{\Longrightarrow} \quad (2 - y^2) + 2x = y^2 + 2yx \quad \Longrightarrow \quad 1 + x = y^2 + yx \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \underbrace{1 - y^2}_{(1-y)(1+y)} = \underbrace{yx - x}_{(y-1)x} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{c} y = 1: \quad z = 2 - y = 1, \quad x^2 = 2 - y^2 = 1 \\ -x = y + 1: \quad (y+1)^2 + y^2 = 2 \ \Rightarrow \ y = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2} \end{array}$$

Obrázek pro výpočet souřadnic x a y:



Podezřelé body a jejich hodnoty jsou tedy následující:

a	$f(a)$
$(1,1,1)$	2
$(-1,1,1)$	0
$\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-\sqrt{3}}{2}, \frac{5+\sqrt{3}}{2}\right)$	$\frac{-5+3\sqrt{3}}{2}$ (< 2)
$\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1+\sqrt{3}}{2}, \frac{5-\sqrt{3}}{2}\right)$	$\frac{-5-3\sqrt{3}}{2}$

- Protože funkce f je spojitá a množina M je omezená a uzavřená, nabývá f maximum v bodě $(1,1,1)$ a minimum v bodě $\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1+\sqrt{3}}{2}, \frac{5-\sqrt{3}}{2}\right)$.

Fubiniho věta: Nechť

- $E \subseteq \mathbb{R}^2$ je oblast integrace (tj. množina, na které má vůbec smysl se o integrál nějaké funkce zajímat, např. určená grafy nějakých spojitých funkcí),
- $f : E \to \mathbb{R}$ je funkce spojitá na vnitřku E° oblasti E a
- dvojný integrál z absolutní hodnoty funkce f je konečný, tj. $\iint\limits_E |f|\, dS < \infty$ (např. pokud funkce je omezená a oblast E je také omezená).

Pak existuje dvojný integrál $\iint\limits_E f\, dS$ a platí

$$\iint\limits_E f\, dS = \int\limits_{\pi_2(E)} \left(\int\limits_{\substack{(\text{vodorovný) řez množinou } E \\ \text{pomocí přímky } \mathbb{R}\times\{y\}}} f(x,y)\, dx \right) dy$$

$$\iint\limits_E f\, dS = \int\limits_{\pi_1(E)} \left(\int\limits_{\substack{(\text{svislý) řez množinou } E \\ \text{pomocí přímky } \{x\}\times\mathbb{R}}} f(x,y)\, dy \right) dx,$$

kde $\pi_1, \pi_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jsou projekce na jednotlivé osy, tedy $\pi_1(x,y) = x$ a $\pi_2(x,y) = y$.

Poznámka: Předpoklad konečnosti integrálu z absolutní hodnoty funkce je podstatný! Např. pro funkci

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

na $E = \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle \setminus \{(0,0)\}$ je

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\, dy \right) dx = \int_0^1 \left[\frac{y}{x^2+y^2} \right]_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\, dx = \Big[\arctan(x) \Big]_{x=0}^{x=1} = \frac{\pi}{4}$$

zatímco

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\, dx \right) dy = \int_0^1 \left[\frac{-x}{x^2+y^2} \right]_{x=0}^{x=1} dy = \int_0^1 \frac{-1}{y^2+1}\, dy = \Big[-\arctan(y) \Big]_{y=0}^{y=1} = -\frac{\pi}{4}$$

což mimo jiné ukazuje na to, že

$$\int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \right| dx\, dy = \infty.$$

Obrácená Fubiniova věta (verze použitelná i pro neomezené funkce nebo množiny):
Nechť

- $E \subseteq \mathbb{R}^2$ je oblast integrace
- $f : E \to \mathbb{R}$ je *nezáporná* funkce spojitá na E°
- jeden z integrálů vzniklých postupnou integrací podle proměnných je konečný.

Pak i integrál v opačném pořadí integrace je konečný, oba se rovnají a funkce má dvojný integrál $\iint\limits_E f\ dS$ (rovný této společné hodnotě).

8.9 (dvojný integrál - Fubiniho věta)

Změňte pořadí integrace v integrálu $\int\limits_0^{\pi} \int\limits_0^{\sin x} f(x,y)\ dy\ dx$.

Řešení:

Procvičujeme jen záměnu integrace, takže předpokládáme, že funkce f předpoklady Fubiniho věty splňuje.

Základní oblast integrace je

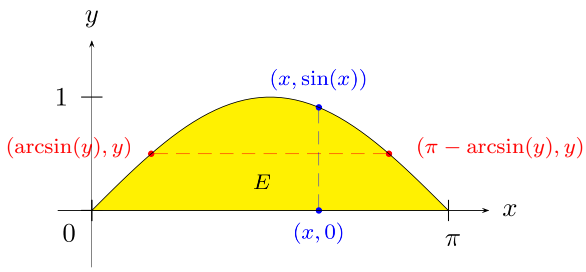
$$E: \quad 0 \le x \le \pi \quad \& \quad 0 \le y \le \sin x.$$

Máme

$$\pi_1(E) = \langle 0, \pi \rangle$$

a

$$(\{x\} \times \mathbb{R}) \cap E = \{x\} \times \langle 0, \sin x \rangle.$$



Po výměně pořadí integrace máme

$$\pi_2(E) = \langle 0, 1 \rangle$$

a pro řezy ve směru osy x z nerovnosti $y \le \sin x$ odvodíme:

$$\arcsin y \le \arcsin(\sin x) = \begin{cases} x & ,\ x \in \langle 0, \frac{\pi}{2}) \\ \pi - x & ,\ x \in \langle \frac{\pi}{2}, \pi \rangle \end{cases}$$

Pozor! arcsin a sin jsou vůči sobě inverzní jen pro úhly v intervalu $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$. Využijeme tudíž $\sin x = \sin(\pi - x)$ a pro $x \in \langle \frac{\pi}{2}, \pi \rangle$ už je $\pi - x \in \langle -\frac{\pi}{2}, 0 \rangle$, takže

$$\arcsin(\sin x) = \arcsin(\sin(\pi - x)) = \pi - x.$$

Takže dostáváme $\arcsin y \le x \le \pi - \arcsin y$, tudíž

$$(\mathbb{R} \times \{y\}) \cap E = \langle \arcsin y, \pi - \arcsin y \rangle \times \{y\}.$$

Záměna integrace pak vyjde jako:

$$\int\limits_0^{\pi} \int\limits_0^{\sin x} f(x,y)\ dy\ dx = \int\limits_0^{1} \int\limits_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} f(x,y)\ dx\ dy.$$

Poznámka: Pokud je funkce f nebo oblast E integrace *neomezená*, je integrál $\iint_E f\ dS$ určen (jako konečná) hodnota, pouze pokud je tzv. *absolutně konvergentní*, tj. pokud

$$\iint_E |f|\ dS := \lim_{n\to\infty} \iint_{E_n} |f|\ dS < \infty$$

pro nějakou posloupnost omezených oblastí $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \cdots \subseteq E_n \subseteq E_{n+1} \subseteq \cdots$ takovou, že f na E_n je omezená a $E = \cup_n E_n$. V tom případě pro integrál platí Fubiniho věta (v analogické podobě jako pro omezenou funkci na omezené množině).

8.10 (dvojný integrál - Fubiniho věta)

Načrtněte oblast integrace a vyčíslete integrál

$$\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \frac{xe^{2y}}{4-y}\ dy\ dx$$

Řešení:

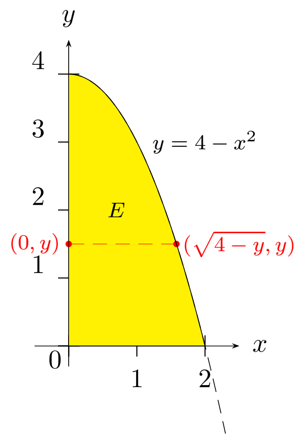
Pro výpočet integrálu bude výhodnější vyměnit pořadí integrace. Máme

$$E: \quad 0 \le x \le 2 \quad \& \quad 0 \le y \le 4 - x^2 \quad \& \quad y \ne 4.$$

Funkce $f(x,y) = \frac{xe^{2y}}{4-y}$ na množině E sice není omezená (v okolí bodu $(0,4)$), ale je nezáporná, takže Fubiniovu větu použít můžeme.

Po záměně řezů dostaneme vztahy

$$E: \quad 0 \le y < 4 \quad \& \quad 0 \le x \le \sqrt{4-y}$$



takže dostáváme

$$\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \frac{xe^{2y}}{4-y}\ dy\ dx = \int_0^4 \Big(\int_0^{\sqrt{4-y}} \frac{xe^{2y}}{4-y}\ dx \Big)\ dy = \int_0^4 \Big[\frac{x^2e^{2y}}{2(4-y)} \Big]_{x=0}^{x=\sqrt{4-y}} dy =$$

$$= \int_0^4 \frac{e^{2y}}{2} dy = \Big[\frac{e^{2y}}{4} \Big]_{y=0}^{y=4} = \frac{e^8 - 1}{4}.$$

Proč funkce není omezená: Množina E je ohraničená parabolou $y = 4 - x^2$. Klidně si ale můžeme dovolit vzít i jinou parabolu, která už bude ležet ve vnitřku E, tedy vezmeme vhodné $\lambda > 0$ tak, aby $(x, 4 - \lambda x^2) \in D$. Pak budeme mít

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ y=4-\lambda x^2,\ x>0}} f(x,y) = \lim_{x\to 0+} \frac{xe^{2(4-\lambda x^2)}}{\lambda x^2} = +\infty.$$