9. cvičení z Matematické analýzy 2

18. - 22. listopadu 2019

Příklad **8.9**.

9.1 (dvojný integrál - Fubiniho věta)
Změňte pořadí integrace následujících integrálů:

(a) $\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 f(x,y)\,dx\,dy$.

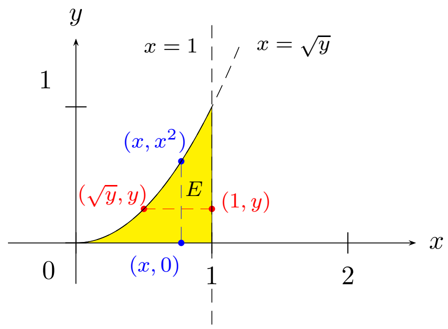
(b) $\int_0^1 \int_0^x f(x,y)\,dy\,dx + \int_1^2 \int_0^{2-x} f(x,y)\,dy\,dx$.

Řešení:

V těchto příkladech procvičujeme jen záměnu integrace, takže předpokládáme, že funkce f předpoklady Fubiniho věty splňuje.

(a) Základní oblast integrace je

$$E: \quad 0 \le y \le 1 \quad \& \quad \sqrt{y} \le x \le 1.$$



Po rozřezání oblasti E ve směru osy y máme

$$E: \quad 0 \le x \le 1 \quad \& \quad 0 \le y \le x^2.$$

Záměna integrace pak vyjde jako:

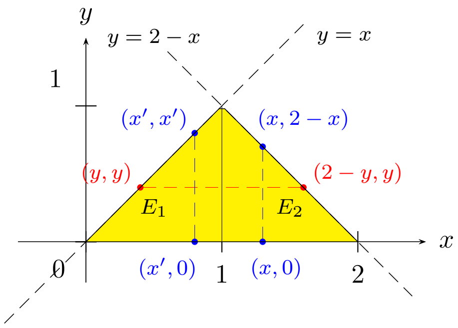
$$\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \int_0^{x^2} f(x,y)\,dy\,dx.$$

(b) Základní oblasti integrace jsou

$$E_1: \quad 0 \le x \le 1 \quad \& \quad 0 \le y \le x$$

$$E_2: \quad 1 \le x \le 2 \quad \& \quad 0 \le y \le 2 - x.$$

Množiny E_1 a E_2 se překrývají pouze v úsečce $\{1\} \times \langle 0, 1 \rangle$, která na hodnotu integrálu nemá vliv. Funkci f tak můžeme prostě integrovat na sjednocení obou oblastí $E = E_1 \cup E_2$.



Pozor! Toto sjednocení není samozřejmá věc! Pokud by se totiž oblasti překrývaly na nějaké "podstatnější" množině, bylo pak na tomto průniku potřeba integrovat funkci dvakrát (příspěvek z každé oblasti D_i). Přesněji, platí

$$\iint_{E_1} f\ dS \ + \ \iint_{E_2} f\ dS = \iint_{E_1 \setminus E_2} f\ dS \ + \ 2\cdot \iint_{E_1 \cap E_2} f\ dS \ + \ \iint_{E_2 \setminus E_1} f\ dS \ \left(= \iint_{E_1 \cup E_2} f\ dS \ + \ \iint_{E_1 \cap E_2} f\ dS \right)$$

Takže $\pi_2(E) = \langle 0, 1\rangle$ a $(\mathbb{R} \times \{y\}) \cap E = \langle y, 2-y\rangle \times \{y\}$. Záměna integrace pak vyjde jako:

$$\int_0^1 \int_0^x f(x,y)\ dy\ dx + \int_1^2 \int_0^{2-x} f(x,y)\ dy\ dx = \int_0^1 \int_y^{2-y} f(x,y)\ dx\ dy.$$

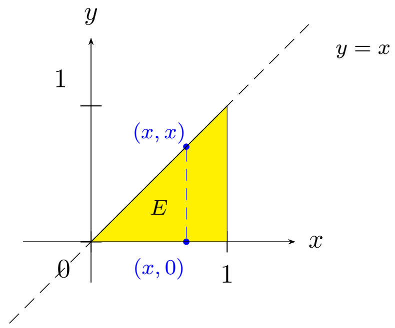
9.2 (dvojný integrál - Fubiniho věta)
Vypočítejte hodnotu integrálu:

(a)
$$\iint_E \frac{\sin x}{x}\, dxdy$$
kde E je trojúhelník s vrcholy $(0,0), (1,0), (1,1)$.

(b)
$$\iint_E e^{y^3} \sqrt{xy - y^2}\ dS,$$
kde oblast E je omezená přímkami $y = x$, $x = 10y$ a $y = 1$.

(c)
$$\iint_E e^{\frac{x}{y}}\ dS,$$
kde E je oblast v prvním kvadrantu omezena křivkami $x = y^2$, $x = 0$ a $y = 1$.

Řešení:
(a) Oblast integrace je
$$E: \quad 0 \le x \le 1 \quad \& \quad 0 \le y \le x\ .$$



Máme

$$\iint\limits_E \frac{\sin x}{x}\, dxdy = \int_0^1 \int_0^x \frac{\sin x}{x}\ dy\ dx = \int_0^1 \sin x\ dx = 1 - \cos(1).$$

(b) Oblast E je trojúhelník s vrcholy $(0,0)$, $(1,1)$ a $(10,1)$ a pro výraz pod odmocninou tak máme $xy - y^2 = y(x-y) \geq 0$. Na první pohled je jednodušší zkusit integrovat nejdříve podle x.

$$E: \quad 0 \leq y \leq 1 \quad \& \quad y \leq x \leq 10y$$

$$\iint\limits_E e^{y^3} \sqrt{xy - y^2}\ dS = \int_0^1 \int_y^{10y} e^{y^3} \sqrt{xy - y^2}\ dx\ dy = \int_0^1 \left[e^{y^3} \frac{2}{3} \cdot \frac{(xy - y^2)^{3/2}}{y} \right]_{x=y}^{x=10y} dy =$$

$$= \int_0^1 e^{y^3} \frac{2}{3} \cdot \frac{(9y^2)^{3/2}}{y}\ dy = 6 \int_0^1 3y^2 e^{y^3}\ dy = 6 \left[e^{y^3} \right]_{y=0}^{y=1} = 6(e-1)\ .$$

(c) Oblast integrace

$$E: \quad 0 \leq x \leq y^2 \quad \& \quad 0 < y \leq 1$$

je omezená, ale u funkce $f(x,y) = e^{\frac{x}{y}}$ zúžené na E to není jasné - problémový je bod $(0,0)$. Přesto ale můžeme použít Fubiniovu větu, protože funkce je nezáporná. Konkrétně:

Máme tedy

$$\iint\limits_E e^{\frac{x}{y}}\ dS = \int_0^1 \int_0^{y^2} e^{\frac{x}{y}}\ dx\ dy = \int_0^1 \left[y e^{\frac{x}{y}} \right]_{x=0}^{x=y^2} dy = \int_0^1 y e^y - y\ dy = \left[(y-1)e^y - \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{2}.$$

Poznámka: Vyšetříme si ještě pro pořádek chování f na E v bodě $(0,0)$. Protože pro $(x,y) \in E$ máme $0 \leq x \leq y^2$ a $0 < y$, tak $0 \leq \frac{x}{y} \leq y$ a tedy

$$1 \leq e^{\frac{x}{y}} \leq e^y \to 1 \quad \text{pro} \quad (x,y) \to (0,0)$$

a proto $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in E}} e^{\frac{x}{y}} = 1$. Funkce f je proto na E omezená a spojitá a integrál tedy existuje a je konečný.

9.3 (dvojný integrál - Fubiniho věta)

Načrtněte oblast integrace a vyčíslete integrál:

(a)

$$\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{1}{y^4+1}\, dy\, dx$$

(b)

$$\iint_E e^{\max\{x^2,y^2\}}\, dx\, dy\ ,$$

kde $E = \langle 0,1\rangle^2 \subseteq \mathbb{R}^2$.

(c)

$$\iint_E e^{\frac{x}{y}}\, dS,$$

kde oblast E je omezená přímkami $y = x$, $x = 10y$ a $y = 1$.

Řešení:
(a) Opět bude výhodnější vyměnit pořadí integrace. Máme

$$D: \quad 0 \le x \le 8 \quad \& \quad \sqrt[3]{x} \le y \le 2,$$

takže

$$D: \quad 0 \le y \le 2 \quad \& \quad 0 \le x \le y^3,$$

a dostáváme tak

$$\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{1}{y^4+1}\, dy\, dx = \int_0^2 \Big(\int_0^{y^3} \frac{1}{y^4+1}\, dx \Big)\, dy = \int_0^2 \frac{y^3}{y^4+1} dy =$$

$$= \Big[\frac{\ln(y^4+1)}{4} \Big]_{y=0}^{y=2} = \frac{\ln 17}{4}.$$

(b) Zjistíme si hodnoty funkce na množině E:

$$e^{\max\{x^2,y^2\}} = \begin{cases} e^{x^2} & \text{pro } 0 \le y \le x \le 1, \\ e^{y^2} & \text{pro } 0 \le x \le y \le 1. \end{cases}$$

Množinu E si tedy rozdělíme na příslušné dvě části (trojúhelníky)

$$E_1: \quad 0 \le y \le x \le 1$$

$$E_2: \quad 0 \le x \le y \le 1$$

a pak máme

$$\iint_E e^{\max\{x^2,y^2\}}\, dx\, dy = \iint_{E_1} e^{x^2}\, dx\, dy + \iint_{E_2} e^{y^2}\, dx\, dy =$$

$$= \int_0^1 \int_0^x e^{x^2}\, dy\, dx + \int_0^1 \int_0^y e^{y^2}\, dx\, dy = \int_0^1 x e^{x^2}\, dx + \int_0^1 y e^{y^2}\, dy =$$

$$= \left[\frac{e^{x^2}}{2}\right]_{x=0}^{x=1} + \left[\frac{e^{y^2}}{2}\right]_{y=0}^{y=1} = e - 1 \ .$$

(c) Oblast E je trojúhelník s vrcholy $(0,0)$, $(1,1)$ a $(10,1)$. Na první pohled je jednodušší zkusit integrovat nejdříve podle x.

$$E: \quad 0 \le y \le 1 \quad \& \quad y \le x \le 10y$$

$$\iint_E e^{\frac{x}{y}} \ dS = \int_0^1 \int_y^{10y} e^{\frac{x}{y}} \ dx \ dy = \int_0^1 \left[ye^{\frac{x}{y}}\right]_{x=y}^{x=10y} \ dy = \int_0^1 y \left(e^{10} - e\right) \ dy = \frac{1}{2}\left(e^{10} - e\right) \ .$$

Poznámka: Vyšetříme si ještě pro pořádek chování f na E v bodě $(0,0)$. Protože pro $(x,y) \in E$ máme $y \le x \le 10y$ a $0 < y$, tak $1 \le \frac{x}{y} \le 10$ a tedy $e^1 \le e^{\frac{x}{y}} \le e^{10}$. Funkce f je proto na $E \setminus \{(0,0)\}$ omezená, kladná a spojitá a integrál na celé E tedy existuje a je konečný.

Poznámka: Připomeňme si ještě, jak je definován integrál $\iint_E f \ dS$, pokud je funkce f nebo oblast E integrace *neomezená*. Pak je takový integrál určen (jako konečná) hodnota, pouze pokud je tzv. *absolutně konvergentní*, tj. pokud

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{E_n} |f| \ dS =: \iint_E |f| \ dS < \infty$$

pro nějakou posloupnost omezených oblastí $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \cdots \subseteq E_n \subseteq E_{n+1} \subseteq \cdots$ takovou, že f na E_n je omezená a $E = \cup_n E_n$. V tom případě pro integrál platí Fubiniho věta (v analogické podobě jako pro omezenou funkci na omezené množině).

9.4 Vypočítejte integrál

$$\iint_E xe^{-y} \frac{\sin y}{y} \ dS$$

pro neomezenou množinu $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le \frac{y}{2}\}$.

Řešení:

Integrál si nejdříve spočítáme (za předpokladu, že je konečný) a na konci si korektnost tohoto postupu dodatečně ověříme.

$$\iint_E xe^{-y} \frac{\sin y}{y} \ dS = \int_0^\infty \int_0^{\frac{y}{2}} xe^{-y} \frac{\sin y}{y} \ dx \ dy = \frac{1}{8} \int_0^\infty ye^{-y} \sin y \ dy$$

Výpočet integrálu:

$$A := \int_0^\infty (ye^{-y}) \sin y \ dy = \{per\ partes\} = \underbrace{\left[ye^{-y}(-\cos y)\right]_0^\infty}_{=0} + \int_0^\infty (e^{-y} - ye^{-y}) \cos y \ dy =$$

$$= \int_0^\infty e^{-y} \cos y \ dy - \int_0^\infty (ye^{-y}) \cos y \ dy = \{per\ partes\} =$$

$$= \int_0^\infty e^{-y} \cos y \ dy - \underbrace{\left[ye^{-y} \sin y\right]_0^\infty}_{=0} + \int_0^\infty (e^{-y} - ye^{-y}) \sin y \ dy =$$

$$= \int_0^\infty e^{-y}\cos y\ dy + \int_0^\infty e^{-y}\sin y\ dy - \int_0^\infty ye^{-y}\sin y\ dy = \int_0^\infty e^{-y}\cos y + e^{-y}\sin y\ dy - A$$

Z této rovnosti vypočteme A jako

$$\int_0^\infty ye^{-y}\sin y\ dy = A = \tfrac{1}{2}\int_0^\infty e^{-y}\cos y + e^{-y}\sin y\ dy = \tfrac{1}{2}\Big[-e^{-y}\cos y\Big]_0^\infty = \tfrac{1}{2}$$

Celkem tedy máme

$$\iint_E xe^{-y}\frac{\sin y}{y}\ dS = \cdots = \tfrac{1}{8}\cdot\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{16}\ .$$

Teď tedy ještě ověřit konečnost zadaného integrálu, tj. absolutní konvergenci, neboli, že to celé bylo v pořádku. Na E máme

$$\Big|xe^{-y}\frac{\sin y}{y}\Big| \le xe^{-y}.$$

Pro tuto nezápornou funkci (tzv. *majorantu*) můžeme tedy použít obrácenou Fubiniho větu (tj. pokud nám při postupné integraci nakonec vyjde konečná hodnota, je konečný i integrál z majoranty):

$$\iint_E xe^{-y}\ dS = \int_0^\infty\int_0^{\frac{y}{2}} xe^{-y}\ dx\ dy = \int_0^\infty \frac{y^2}{8}e^{-y}\ dy = \int_0^\infty \left(\frac{y^2}{8}e^{-\frac{y}{2}}\right)e^{-\frac{y}{2}}\ dy \le \int_0^\infty K\cdot e^{-\frac{y}{2}}\ dy < \infty$$

kde jsme použili to, že $|\frac{y^2}{8}e^{-\frac{y}{2}}| \le K$ pro vhodnou konstantu $K > 0$ (neboť funkce $\frac{y^2}{8}e^{-\frac{y}{2}}$ je spojitá na $\langle 0, +\infty)$ a jde k nule v nekonečnu).

Celkově tedy postupná integrace z xe^{-y} dává konečnou hodnotu a tedy (podle obrácené Fubiniho věty) je integrál $\iint_E xe^{-y}\ dS$ také konečný. Tudíž z odhadu i integrál

$$\iint_E \Big|xe^{-y}\frac{\sin y}{y}\Big|\ dS \le \iint_E xe^{-y}\ dS < \infty$$

je konečný, což jsme potřebovali pro korektnost úvodního výpočtu.

Poznámka: Můžeme použít i následující postup využívající funkce komplexní proměnné (jednodušší než opakovaná metoda per partes):

$$e^{-y}\sin y = \mathrm{Im}\Big(e^{-y}(\cos y + \mathbf{i}\sin y)\Big) = \mathrm{Im}\Big(e^{-y}e^{\mathbf{i}y}\Big) = \mathrm{Im}\Big(e^{(\mathbf{i}-1)y}\Big)$$

Odsud tedy plyne, že

$$\int_0^\infty ye^{-y}\sin y\ dy = \int_0^\infty y\cdot\mathrm{Im}\Big(e^{(\mathbf{i}-1)y}\Big)\ dy = \int_0^\infty \mathrm{Im}\Big(ye^{(\mathbf{i}-1)y}\Big)\ dy = \mathrm{Im}\Big(\int_0^\infty ye^{(\mathbf{i}-1)y}\ dy\Big)$$

a dále

$$\int_0^\infty ye^{(\mathbf{i}-1)y}\ dy = \left[y\frac{e^{(\mathbf{i}-1)y}}{\mathbf{i}-1}\right]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{e^{(\mathbf{i}-1)y}}{\mathbf{i}-1}\ dy = \underbrace{\left[ye^{-y}\ \underbrace{\frac{e^{\mathbf{i}y}}{\mathbf{i}-1}}_{omezene}\ \right]_0^\infty}_{=0} - \left[\frac{e^{(\mathbf{i}-1)y}}{(\mathbf{i}-1)^2}\right]_0^\infty =$$

$$= -\left[e^{-y}\ \underbrace{\frac{e^{\mathbf{i}y}}{(\mathbf{i}-1)^2}}_{omezene}\right]_0^\infty = \frac{1}{(\mathbf{i}-1)^2} = \frac{1}{\mathbf{i}^2 - 2\mathbf{i} + 1} = -\frac{1}{2\mathbf{i}} = \frac{\mathbf{i}}{2}$$

Tedy

$$\int_0^\infty ye^{-y}\sin y\ dy = \cdots = \mathrm{Im}\Big(\int_0^\infty ye^{(\mathbf{i}-1)y}\ dy\Big) = \cdots = \mathrm{Im}\Big(\frac{1}{2}\mathbf{i}\Big) = \frac{1}{2}\ .$$

Platí: Pro všechna $a, b \in \mathbb{R}$ je

$$\int_a^b \operatorname{sgn}(x) \cdot x^n \mathrm{d}x = \left[\operatorname{sgn}(x) \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_a^b$$

9.5 Určete těžiště

(a) trojúhelníku s vrcholy $(0,0)$, $(1,1)$, $(4,0)$, jehož plošná hustota je $\varrho(x,y) = x$.

(b) útvaru omezeného křivkami $x = y^2$ a $y = x - 2$, jehož plošná hustota je $\varrho(x,y) = |y| = \operatorname{sgn}(y) \cdot y$.

(c) útvaru omezeného křivkami $xy = 1$ a $x + y = \frac{5}{2}$, jehož plošná hustota je $\varrho(x,y) = 1$.

Řešení:
Oblast E je ve všech případech konvexní, takže těžiště bude ležet v E. Je dobré si vždy u výsledků tuto vlastnost zkontrolovat (je to ovšem pochopitelné jen nutná podmínka).

(a) Oblast integrace je

$$E: \quad 0 \le y \le 1, \qquad y \le x \le 4 - 3y.$$

Jednotlivé integrály tedy jsou

hmotnost:

$$m = \iint_E \varrho \, dS = \int_0^1 \Big(\int_y^{4-3y} x \, dx \Big) \, dy = \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=y}^{x=4-3y} dy =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 (3y-4)^2 - y^2 \, dy = \frac{1}{2}\left[\frac{(3y-4)^3}{9} - \frac{y^3}{3}\right]_0^1 = \frac{10}{3}$$

x-ová souřadnice těžiště:

$$T_1 = \frac{1}{m} \iint_E x\varrho(x,y) \, dS = \frac{3}{10} \int_0^1 \Big(\int_y^{4-3y} x^2 \, dx \Big) \, dy = \frac{1}{10} \int_0^1 \left[x^3\right]_{x=y}^{x=4-3y} dy =$$

$$= \frac{1}{10} \int_0^1 (4-3y)^3 - y^3 \, dy = \left[-\frac{(4-3y)^4}{120} - \frac{y^4}{40}\right]_0^1 = \frac{21}{10}$$

y-ová souřadnice těžiště:

$$T_2 = \frac{1}{m} \iint_E y\varrho(x,y) \, dS = \frac{3}{10} \int_0^1 \Big(\int_y^{4-3y} xy \, dx \Big) \, dy = \frac{3}{20} \int_0^1 \left[x^2 y\right]_{x=y}^{x=4-3y} dy =$$

$$= \frac{3}{20} \int_0^1 y(4-3y)^2 - y^3 \, dy = \frac{12}{5} \int_0^1 y^3 - 3y^2 + 2y \, dy = \frac{12}{5}\left[\frac{y^4}{4} - y^3 + y^2\right]_0^1 = \frac{3}{5}.$$

(b) Oblast je vnitřní část paraboly $y^2 = x$ (obrácené v směru osy x), která je oříznutá šikmo přímkou $y = x - 2$.

Zintegrujeme postupně nejdříve podle x (tj. rozřežeme E vodorovně) a pak podle y. K tomu potřebujeme zjistit rozsah proměnné y (tj. průmět oblasti E na osu y), neboli průniky hyperboly s přímkou:

$$y^2 = x \quad \wedge \quad y = x - 2$$
$$y^2 = y + 2$$
$$0 = y^2 - y - 2 = (y+1)(y-2)$$

Množinu E tedy zapíšeme jako

$$E: \quad -1 \le y \le 2 \;\; \& \;\; y^2 \le x \le y + 2$$

Takže máme
hmotnost:

$$m = \iint_E \varrho \; dS = \int_{-1}^{2} \int_{y^2}^{y+2} \operatorname{sgn}(y) \cdot y \; \mathrm{d}x \; \mathrm{d}y = \int_{-1}^{2} \operatorname{sgn}(y) \cdot \left(y^2 + 2y - y^3\right) \; \mathrm{d}y =$$

$$= \left[\operatorname{sgn}(y) \cdot \left(\frac{y^3}{3} + y^2 - \frac{y^4}{4}\right)\right]_{-1}^{2} = \frac{8}{3} + 4 - 4 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{4} = \frac{37}{12} \; .$$

x-ová souřadnice těžiště:

$$T_1 = \frac{1}{m} \iint_E x\varrho(x,y) \; dS = \frac{12}{37} \int_{-1}^{2} \int_{y^2}^{y+2} \operatorname{sgn}(y) \cdot xy \; \mathrm{d}x \; \mathrm{d}y = \frac{6}{37} \int_{-1}^{2} \operatorname{sgn}(y) \cdot y \left[x^2\right]_{x=y^2}^{x=y+2} \; dy =$$

$$= \frac{6}{37} \int_{-1}^{2} \operatorname{sgn}(y) \cdot \left(4y + 4y^2 + y^3 - y^5\right) \; dy = \frac{6}{37} \left[\operatorname{sgn}(y) \cdot \left(2y^2 + \frac{4y^3}{3} + \frac{y^4}{4} - \frac{y^6}{6}\right)\right]_{-1}^{2} =$$

$$= \frac{6}{37} \left(8 + \frac{32}{3} + 4 - \frac{32}{3} + 2 - \frac{4}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) = \frac{153}{74} \doteq 2.07$$

y-ová souřadnice těžiště:

$$T_2 = \frac{1}{m} \iint_E y\varrho(x,y) \; dS = \frac{12}{37} \int_{-1}^{2} \int_{y^2}^{y+2} \operatorname{sgn}(y) \cdot y^2 \; \mathrm{d}x \; \mathrm{d}y = \frac{12}{37} \int_{-1}^{2} \operatorname{sgn}(y) \cdot \left(y^3 + 2y^2 - y^4\right) \; \mathrm{d}y =$$

$$= \frac{12}{37} \left[\operatorname{sgn}(y) \cdot \left(\frac{y^4}{4} + \frac{2y^3}{3} - \frac{y^5}{5}\right)\right]_{-1}^{2} = \frac{12}{37} \left(4 + \frac{16}{3} - \frac{32}{5} + \frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) = \frac{163}{370} \doteq 0.44 \; .$$

(c) Oblast E je vnitřní část hyperboly $xy = 1$ která je oříznutá přímkou $x + y = \frac{5}{2}$. Potřebujeme zjistit rozsah proměnných neboli průniky hyperboly s přímkou:

$$\left(xy = 1 \quad \wedge \quad x + y = \frac{5}{2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \left((x,y) = \left(\tfrac{1}{2}, 2\right) \quad \vee \quad (x,y) = \left(2, \tfrac{1}{2}\right)\right)$$

Množinu E tedy zapíšeme jako

$$E: \;\; \tfrac{1}{2} \le x \le 2 \;\; \& \;\; \tfrac{1}{x} \le y \le \tfrac{5}{2} - x$$

Vzhledem k symetrii E budeme mít $T_1 = T_2$.
hmotnost:

$$m = \iint_E \varrho \; dS = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{5}{2}-x} 1 \; dy \right) dx = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{5}{2} - x - \frac{1}{x} \; dx = \frac{15}{4} - \left[\frac{x^2}{2} + \ln x\right]_{\frac{1}{2}}^{2} = \frac{15}{8} - 2\ln 2$$

$$T_1 = T_2 = \frac{1}{m}\iint\limits_E x\varrho(x,y)\ dS = \frac{1}{m}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\Big(\int\limits_{\frac{1}{x}}^{\frac{5}{2}-x} x\ dy\Big)\ dx = \frac{1}{m}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{5}{2}x - x^2 - 1\ dx =$$

$$= \frac{1}{m}\Big[\frac{5x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + x\Big]_{\frac{1}{2}}^{2} = \frac{1}{m}\frac{9}{16} = \frac{9}{30-32\ln 2} \doteq 1.151\ .$$

Věta o substituci: Nechť $U \subseteq \mathbb{R}^2$ je oblast integrace a $\Phi : U \to \mathbb{R}^2$ je zobrazení (nazývané *parametrizace*). Nechť dále platí, že

- Φ je spojité na U,
- Φ je prosté a spojitě diferencovatelné na U° (tj. na vnitřku U)
- $\det \Phi' \neq 0$ všude na U° a
- množina ∂U se skládá ze spojitě diferencovatelných křivek, případně bodů (tj. její příspěvek k hodnotě jakéhokoliv integrálu je nulový)

Nechť f je integrabilní funkce na $\Phi(U)$. Pak

$$\iint\limits_{\Phi(U)} f\ dS = \iint\limits_U (f\circ\Phi)\cdot|\det\Phi'|\ d\widetilde{S}.$$

kde pro odlišení značíme integraci podle jiných proměnných jako $d\widetilde{S}$.

9.6 (vyjádření oblasti v polárních souřadnicích)

Vyjádřete integrál

$$\iint\limits_E f(x,y)\ dx\ dy$$

v polárních souřadnicích v pořadí $d\varrho\ d\varphi$ pro oblast E, která je plochou trojúhelníka s vrcholy $(1,0)$, $(2,0)$ a $(1,1)$.

Řešení:
Oblast E je trojúhelník ohraničený přímkami $x=1$, $y=0$ a $x+y=2$ a dá se popsat také jako

$$E: \quad 1\le x\le 2 \quad \& \quad 0\le y\le 2-x$$

Pro parametrizaci oblasti E v polárních souřadnicích v pořadí $d\varrho\ d\varphi$ určíme nejdříve rozsah proměnné φ, což je $0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}$. Pro pevně zvolené φ teď určíme rozsah proměnné ϱ. Ten je ze zdola určený přímkou $x=1$ a shora přímkou $x+y=2$. Po dosazení $x=\varrho\cos\varphi$ a $y=\varrho\sin\varphi$ do těchto rovnic pak dostaneme oblast U ve tvaru

$$U: \quad 0\le\varphi\le\frac{\pi}{4} \quad \& \quad \frac{1}{\cos\varphi}\le\varrho\le\frac{2}{\cos\varphi+\sin\varphi}$$

takže přepis integrálu je následující

$$\iint\limits_E f(x,y)\ dx\ dy = \int\limits_0^{\pi/4}\int\limits_{\frac{1}{\cos\varphi}}^{\frac{2}{\cos\varphi+\sin\varphi}} \varrho\cdot f(\varrho\cos\varphi,\varrho\sin\varphi)\ d\varrho\ d\varphi\ .$$

9.7 (polární souřadnice)

Použitím polárních souřadnic spočítejte integrály

(a)

$$\int_{-2}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dy\;dx,$$

(b)

$$\int_{0}^{1}\int_{x}^{\sqrt{2-x^2}} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dy\;dx$$

(c)

$$\int_{0}^{\sqrt{2}}\int_{y}^{\sqrt{4-y^2}} \frac{1}{1+x^2+y^2}\,dx\;dy.$$

Řešení:

Polární souřadnice je vhodné používat vzhledem když množina a/nebo funkce vykazují rotační symetrii. Je to transformace s předpisem

$$\Phi: \quad \begin{array}{rcl} x &=& r\cos\varphi \\ y &=& r\sin\varphi \end{array}$$

jejíž jakobián je $\det\Phi' = r$.

(a) Oblast integrace je

$$E: \quad -2 \le x \le 2 \quad \& \quad 0 \le y \le \sqrt{4-x^2}$$

což je půlkruh o poloměru 2 v horní polorovině a se středem v počátku, jehož parametrizace $E = \Phi(U)$ pomocí polárních souřadnic Φ je tvaru

$$U: \quad 0 \le \varphi \le \pi \quad \& \quad 0 \le r \le 2\ .$$

takže máme

$$\int_{-2}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dy\;dx = \iint_{E=\Phi(U)} \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dS = \iint_{U} r^2(\underbrace{\cos^2\varphi-\sin^2\varphi}_{=\cos 2\varphi})\;dr\;d\varphi =$$

$$= \left(\int_0^2 r^2\;dr\right)\cdot\underbrace{\left(\int_0^\pi \cos 2\varphi\;d\varphi\right)}_{=0} = 0\ .$$

(b) Oblast integrace je

$$E: \quad 0 \le x \le 1 \quad \& \quad x \le y \le \sqrt{2-x^2}$$

což je kruhová výseč, jejíž parametrizace $E = \Psi(U)$ ve sférických souřadnicích je tvaru

$$U: \quad 0 \le r \le \sqrt{2} \quad \& \quad \frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}\ .$$

Takže máme

$$\int\limits_0^1 \int\limits_x^{\sqrt{2-x^2}} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dy\, dx = \iint\limits_{E=\Psi(U)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dS = \iint\limits_U r\cos\varphi\, dr\, d\varphi =$$

$$= \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^{\sqrt{2}} r\cos\varphi\, dr\, d\varphi = \left(\int\limits_0^{\sqrt{2}} r\, dr\right) \cdot \left(\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\, d\varphi\right) = 1 \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \,.$$

Poznámka: Použili jsme vztah

$$\iint\limits_{X\times Y} f(x)g(y)\, dV = \Big(\int\limits_X f(x)\, dx\Big) \cdot \Big(\int\limits_Y g(y)\, dy\Big)$$

pro integrabilní funkce $f : X \to \mathbb{R}$ a $g : Y \to \mathbb{R}$.

(c) Oblast integrace je

$$E : \quad 0 \le y \le \sqrt{2} \quad \& \quad y \le x \le \sqrt{4-y^2}$$

což je kruhová výseč, jejíž parametrizace $E = \Phi(U)$ pomocí polárních souřadnic Φ je tvaru

$$U : \quad 0 \le r \le 2 \quad \& \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4} \,.$$

takže máme

$$\int\limits_0^{\sqrt{2}} \int\limits_y^{\sqrt{4-y^2}} \frac{1}{1+x^2+y^2}\, dx\, dy = \iint\limits_{E=\Phi(U)} \frac{1}{1+x^2+y^2}\, dS = \iint\limits_U \frac{r}{1+r^2}\, dr\, d\varphi =$$

$$= \left(\int\limits_0^2 \frac{r}{1+r^2}\, dr\right) \cdot \left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} 1\, d\varphi\right) = \left[\frac{\ln(1+r^2)}{2}\right]_{r=0}^{r=2} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \ln 5 \,.$$

9.8 (plocha zadaná v polárních souřadnicích)

Vypočítejte integrál

$$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\, dS$$

použitím polárních souřadnic, kde D je ohraničeno křivkou $r = 1 + \cos\varphi$.

Řešení:

V polárních souřadnicích (viz předchozí příklad) je oblast dána jako

$$U : \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \quad \& \quad 0 \le r \le 1 + \cos\varphi$$

položíme tedy $D := \Phi(U)$ (což je mimochodem v kartézských souřadnicích plocha ohraničená křivkou nazývanou *kardioida*). Použitím věty o substituci dostaneme

$$\iint\limits_{D=\Phi(U)} \sqrt{x^2+y^2}\ dS = \iint\limits_{U} r\cdot r\ dS =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \Big(\int\limits_0^{1+\cos\varphi} r^2\ dr\Big)\ d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} \Big[\frac{r^3}{3}\Big]_{r=0}^{r=1+\cos\varphi}\ d\varphi = \frac{1}{3}\int\limits_0^{2\pi} (1+\cos\varphi)^3\ d\varphi =$$

$$= \frac{1}{3}\int\limits_0^{2\pi} (\cos^3\varphi + 3\cos^2\varphi + 3\cos\varphi + 1)\ d\varphi = \pi + \frac{2}{3}\pi = \frac{5}{3}\pi.$$

Poznámka: Z periodicity a lichosti funkcí plyne, že $\int\limits_0^{2\pi} \cos^{2n+1}\varphi\ d\varphi = 0$ pro $n \geq 0$.