10. cvičení z Matematické analýzy 2

23. - 27. listopadu 2020

10.1 (vyjádření oblasti v polárních souřadnicích)
Vyjádřete integrál

$$\iint_E f(x,y)\ dx\ dy$$

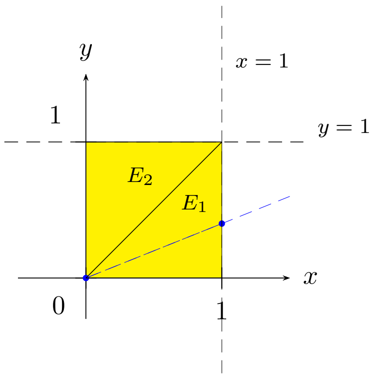
v polárních souřadnicích v pořadí $d\varrho\ d\varphi$ pro oblasti

(a) $E = \langle 0,1\rangle^2$,

(b) $E:\quad (x-1)^2+y^2 \le 1\ \ \&\ \ y \ge 0.$

Řešení:
Pro parametrizaci oblasti E v polárních souřadnicích v pořadí $d\varrho\ d\varphi$ určíme nejdříve rozsah proměnné φ. Pro pevně zvolené φ pak určíme rozsah proměnné ϱ.

(a) Rozsah proměnné φ je $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$. Proměnná ϱ pak běží od 0 až po hrany čtverce, které jsou určené různými předpisy $x = 1$ a $y = 1$. Proto je potřeba E rozdělit podle toho na dva trojúhelníky E_1 a E_2 a každý vyjádřit zvlášť.



Po dosazení polárních souřadnic pak máme v části E_1 omezení proměnné ϱ shora pomocí

$$\varrho\cos\varphi = x = 1 \quad\Rightarrow\quad \varrho = \frac{1}{\cos\varphi}$$

a v části E_2 je pak omezení proměnné ϱ shora pomocí

$$\varrho\sin\varphi = y = 1 \quad\Rightarrow\quad \varrho = \frac{1}{\sin\varphi}\ .$$

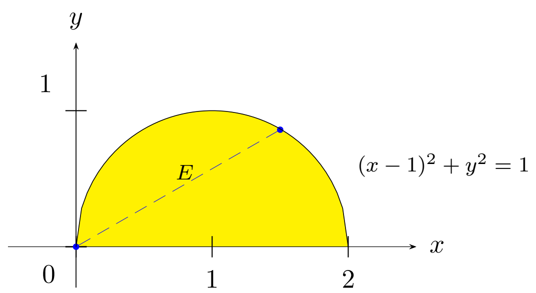
Parametrizace U oblasti E v polárních souřadnicích je tak dána jako

$$U: \qquad \left(0 \le \varphi \le \tfrac{\pi}{4} \quad \& \quad 0 \le \varrho \le \tfrac{1}{\cos\varphi}\right) \vee$$
$$\vee \left(\tfrac{\pi}{4} \le \varphi \le \tfrac{\pi}{2} \quad \& \quad 0 \le \varrho \le \tfrac{1}{\sin\varphi}\right)$$

takže přepis integrálu je následující

$$\iint\limits_E f(x,y)\ dx\ dy = \int\limits_0^{\pi/4} \int\limits_0^{\frac{1}{\cos\varphi}} \varrho \cdot f(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi)\ d\varrho\ d\varphi + \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \int\limits_0^{\frac{1}{\sin\varphi}} \varrho \cdot f(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi)\ d\varrho\ d\varphi\ .$$

(b) Množina E je půlkruh se středem v bodě $(1,0)$.



Střed polárních souřadnic ovšem stále zůstává bod $(0,0)$. Rozsah proměnné φ tak bude opět $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Proměnná ϱ pak běží od 0 až po kružnici

$$(x-1)^2 + y^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 2x\ .$$

Po dosazení polárních souřadnic pak máme omezení proměnné ϱ shora pomocí

$$\varrho^2 = x^2 + y^2 = 2x = 2\varrho\cos\varphi \quad \Rightarrow \quad \varrho = 2\cos\varphi\ .$$

Parametrizace U oblasti E v polárních souřadnicích je tak dána jako

$$U: \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \quad \& \quad 0 \leq \varrho \leq 2\cos\varphi$$

takže přepis integrálu je následující

$$\iint\limits_E f(x,y)\ dx\ dy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^{2\cos\varphi} \varrho \cdot f(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi)\ d\varrho\ d\varphi\ .$$

10.2 (polární souřadnice)
Použitím polárních souřadnic spočítejte integrály

(a)

$$\int\limits_{-2}^{2} \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dy\ dx,$$

(b)

$$\int_0^1 \int_x^{\sqrt{2-x^2}} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dy\; dx$$

(c)

$$\int_0^{\sqrt{2}} \int_y^{\sqrt{4-y^2}} \frac{1}{1+x^2+y^2}\, dx\; dy.$$

(d)

$$\int_0^1 \int_0^x \frac{x}{x^2+y^2}\, dy\; dx\ .$$

Řešení:

Polární souřadnice je vhodné používat vzhledem když množina a/nebo funkce vykazují rotační symetrii. Je to transformace s předpisem

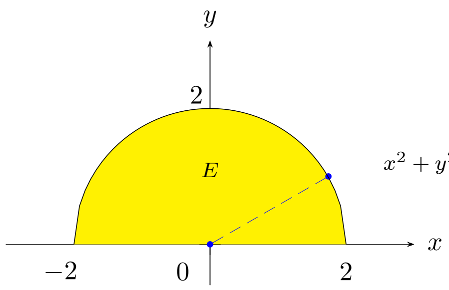
$$\Phi : \quad \begin{array}{rcl} x & = & r\cos\varphi \\ y & = & r\sin\varphi \end{array}$$

jejíž jakobián je $\det \Phi' = r$.

(a) Oblast integrace je

$$E : \quad -2 \le x \le 2 \quad \& \quad 0 \le y \le \sqrt{4-x^2}$$

což je půlkruh o poloměru 2 v horní polorovině a se středem v počátku.



Jeho parametrizace $E = \Phi(U)$ pomocí polárních souřadnic Φ je tvaru

$$U : \quad 0 \le \varphi \le \pi \quad \& \quad 0 \le r \le 2\ .$$

takže máme

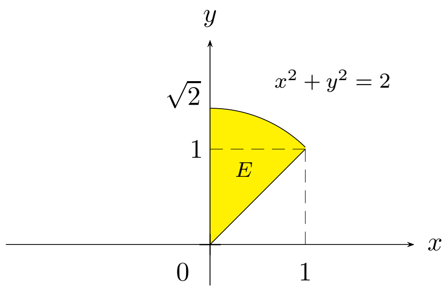
$$\int_{-2}^{2} \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dy\; dx = \iint\limits_{E=\Phi(U)} \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dS = \iint\limits_{U} r^2 \underbrace{(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)}_{=\cos 2\varphi}\, dr\; d\varphi =$$

$$= \left(\int_0^2 r^2 \ dr\right) \cdot \underbrace{\left(\int_0^\pi \cos 2\varphi \ d\varphi\right)}_{=0} = 0 \ .$$

(b) Oblast integrace je

$$E: \quad 0 \le x \le 1 \quad \& \quad x \le y \le \sqrt{2 - x^2}$$

což je kruhová výseč.



Její parametrizace $E = \Psi(U)$ ve sférických souřadnicích je tvaru

$$U: \quad 0 \le r \le \sqrt{2} \quad \& \quad \frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \ .$$

Takže máme

$$\int_0^1 \int_x^{\sqrt{2-x^2}} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \ dy \ dx = \iint_{E=\Psi(U)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \ dS = \iint_U r \cos\varphi \ dr \ d\varphi =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sqrt{2}} r \cos\varphi \ dr \ d\varphi = \left(\int_0^{\sqrt{2}} r \ dr\right) \cdot \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \ d\varphi\right) = 1 \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \ .$$

Poznámka: Použili jsme vztah

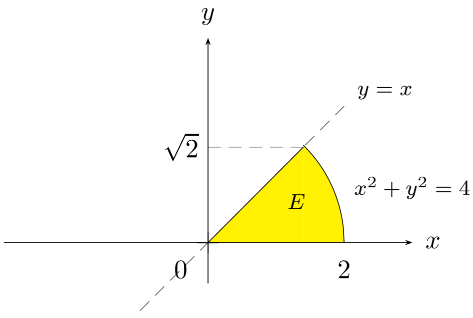
$$\iint_{X \times Y} f(x) g(y) \ dV = \Big(\int_X f(x) \ dx\Big) \cdot \Big(\int_Y g(y) \ dy\Big)$$

pro integrabilní funkce $f : X \to \mathbb{R}$ a $g : Y \to \mathbb{R}$.

(c) Oblast integrace je

$$E: \quad 0 \le y \le \sqrt{2} \quad \& \quad y \le x \le \sqrt{4 - y^2}$$

což je kruhová výseč.



Její parametrizace $E=\Phi(U)$ pomocí polárních souřadnic Φ je tvaru

$$U: \quad 0 \leq r \leq 2 \quad \& \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}\ .$$

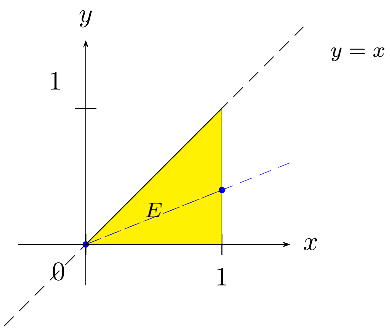
takže máme

$$\int_0^{\sqrt{2}} \int_y^{\sqrt{4-y^2}} \frac{1}{1+x^2+y^2}\, dx\ dy = \iint_{E=\Phi(U)} \frac{1}{1+x^2+y^2}\, dS = \iint_U \frac{r}{1+r^2}\, dr\ d\varphi =$$

$$= \left(\int_0^2 \frac{r}{1+r^2}\, dr\right) \cdot \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} 1\ d\varphi\right) = \left[\frac{\ln(1+r^2)}{2}\right]_{r=0}^{r=2} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \ln 5\ .$$

(d) Oblast integrace je

$$E: \quad 0 \leq x \leq 1 \quad \& \quad 0 \leq y \leq x$$



což je trojúhelník. Množinu U, která parametrizuje $E=\Phi(U)$ pomocí polárních souřadnic

$$\Phi: \ x = r\cos\varphi,\ \ y = r\sin\varphi$$

dostaneme dosazením do nerovnosti pro E

$$0 \leq \underbrace{r\cos\varphi}_{=x} \leq 1 \quad \& \quad 0 \leq \underbrace{r\sin\varphi}_{=y} \leq \underbrace{r\cos\varphi}_{=x}\ .$$

a úpravě, ale hlavně pomocí náčrtku, jako

$$U: \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4} \quad \& \quad 0 \le r \le \tfrac{1}{\cos\varphi}\ .$$

takže máme

$$\int_0^1 \int_0^x \frac{x}{x^2+y^2}\, dy\, dx = \iint_{E=\Phi(U)} \frac{x}{x^2+y^2}\, dS = \iint_U \cos\varphi\, dr\, d\varphi =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{1}{\cos\varphi}} \cos\varphi\, dr\, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1\, d\varphi = \frac{\pi}{4}\ .$$

10.3 (plocha zadaná v polárních souřadnicích)

Vypočítejte integrál

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\, dS$$

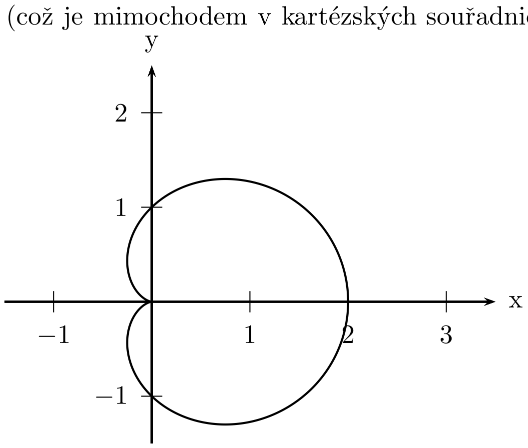
použitím polárních souřadnic, kde D je ohraničeno křivkou $r = 1 + \cos\varphi$.

Řešení:

V polárních souřadnicích (viz předchozí příklad) je oblast dána jako

$$U: \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \quad \& \quad 0 \le r \le 1 + \cos\varphi$$

položíme tedy $D := \Phi(U)$ (což je mimochodem v kartézských souřadnicích plocha ohraničená křivkou nazývanou *kardioida*).



Použitím věty o substituci dostaneme

$$\iint_{D=\Phi(U)} \sqrt{x^2+y^2}\, dS = \iint_U r \cdot r\, dS =$$

$$= \int_0^{2\pi} \Big(\int_0^{1+\cos\varphi} r^2\, dr \Big)\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \Big[\frac{r^3}{3}\Big]_{r=0}^{r=1+\cos\varphi} d\varphi = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} (1+\cos\varphi)^3\, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} (\cos^3\varphi + 3\cos^2\varphi + 3\cos\varphi + 1)\ d\varphi = \pi + \frac{2}{3}\pi = \frac{5}{3}\pi.$$

Poznámka: Z periodicity a lichosti funkcí plyne, že $\int_0^{2\pi} \cos^{2n+1}\varphi\ d\varphi = 0$ pro $n \geq 0$.

10.4 (oblast zadaná v polárních souřadnicích)

Určete velikost plochy E (v kartézských souřadnicích), kterou ohraničuje křivka zadaná pomocí polárních souřadnic

(a) $\varrho = \sin\varphi, \quad \varphi \in \langle 0, \pi\rangle$,

(b) $\varrho = 1 + \sin\varphi, \quad \varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle$.

Načrtněte danou křivku v polárních i kartézských souřadnicích.

Řešení:
(a) V polárních souřadnicích je oblast dána jako

$$U: \quad 0 \leq \varphi \leq \pi \quad \& \quad 0 \leq \varrho \leq \sin\varphi$$

položíme tedy $E := \Phi(U)$. Použitím věty o substituci dostaneme pro velikost plochy E (v kartézských souřadnicích!), že

$$\iint_{E=\Phi(U)} 1\ dS = \iint_U r\ dr\ d\varphi = \int_0^{\pi} \Big(\int_0^{\sin\varphi} r\ dr \Big)\ d\varphi = \int_0^{\pi} \left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{r=\sin\varphi} d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin^2\varphi\ d\varphi = \frac{\pi}{4}.$$

Trik k výpočtu integrálu: $\int_0^{2\pi} \sin^2\varphi\ d\varphi = \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\ d\varphi$ a současně $\int_0^{2\pi} (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)\ d\varphi = \int_0^{2\pi} 1\ d\varphi = 2\pi$ tedy

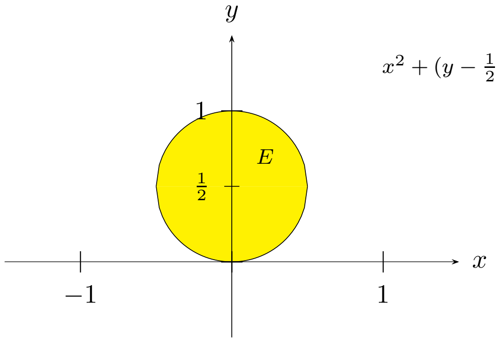
$$\int_0^{\pi} \sin^2\varphi\ d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin^2\varphi\ d\varphi = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

A co to vlastně máme za křivku: Protože máme $\varrho(\varphi) = \sin\varphi$, můžeme body (x, y) křivky parametrizovat pomocí úhlu φ a pak platí, že

$$x = \rho\cos\varphi = \sin\varphi\cos\varphi$$

$$y = \rho\sin\varphi = \sin^2\varphi$$

Současně máme vztah $x^2 + y^2 = \rho^2 = (\sin\varphi)^2$ a spojením tak dostáváme $x^2 + y^2 = y$, což je rovnice pro danou křivku. Její úpravou máme $x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$, což je prostě kružnice se středem $(0, \frac{1}{2})$ a poloměrem $\frac{1}{2}$.

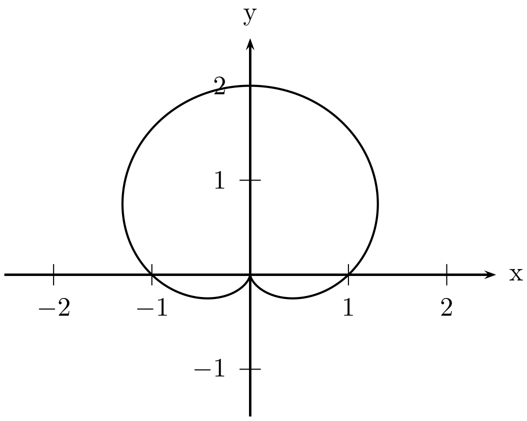


Protože jsme měli spočítat plochu, kterou kružnice (v kartézských souřadnicích) ohraničuje, není divu, že nám vyšla plocha kruhu o poloměru $\frac{1}{2}$, tedy $\pi/4$.

(b) V polárních souřadnicích je oblast dána jako

$$U: \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad \& \quad 0 \leq r \leq 1 + \sin\varphi$$

položíme tedy $E := \Phi(U)$. Hraniční křivka této plochy se nazývá *kardioida*.



Použitím věty o substituci dostaneme pro velikost plochy E (v kartézských souřadnicích!), že

$$\iint\limits_{D=\Phi(U)} 1 \; dS = \iint\limits_{U} r \; dr \; d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \Big(\int_0^{1+\sin\varphi} r \; dr \Big) \; d\varphi = \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{r=1+\sin\varphi} d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1+\sin\varphi)^2 \; d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\sin^2\varphi + 2\sin\varphi + 1) \; d\varphi = \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3}{2}\pi.$$

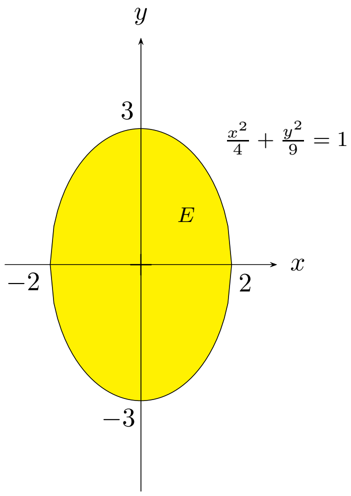
10.5 (obecnější transformace)
Spočítejte integrál

$$\iint\limits_{E} \sqrt{1-\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\right)}\,dx\;dy,$$

kde

$$E:\quad \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\le 1\ .$$

Řešení:



Vzhledem ke tvaru množiny i funkce, kde se vyskytuje výraz $\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{3}\right)^2$, zde budeme používat upravenou transformaci pomocí eliptických souřadnic

$$\Phi:\quad \begin{aligned} \tfrac{x}{2} &= r\cos\varphi \\ \tfrac{y}{3} &= r\sin\varphi \end{aligned}$$

které vzniknou složením polárních souřadnic Ψ a lineární transformace $\mathcal{L}$, která deformuje jednotlivé osy:

$$\Phi=\mathcal{L}\circ\Psi,\qquad \mathcal{L}(\tilde{x},\tilde{y}):=(2\tilde{x},3\tilde{y}).$$

Máme tedy

$$\Phi'=\mathcal{L}'_{|\Psi}\circ\Psi' \quad \text{a} \quad \det\Phi'=(\det\mathcal{L}'_{|\Psi})\cdot(\det\Psi')=6\cdot r,$$

protože

$$\mathcal{L}'=\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}.$$

Oblast U parametrizující E pomocí souřadnic $\Phi=\mathcal{L}\circ\Psi$ je tedy

$$U:\quad 0\le\varphi\le 2\pi \quad \& \quad 0\le r\le 1$$

protože $\Psi(U)$ je kruh $\tilde{x}^2+\tilde{y}^2\le 1$, který $\mathcal{L}$ převede na E. Takže máme

$$\iint\limits_{E=\Phi(U)} \sqrt{1-\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\right)}\,dx\;dy=\iint\limits_{U} 6r\sqrt{1-r^2}\,dr\;d\varphi=6\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{1} r\sqrt{1-r^2}\,dr\;d\varphi=$$

$$= \left(\int_0^{2\pi} 6\ d\varphi\right) \cdot \left(\int_0^1 r\sqrt{1-r^2}\ dr\right) = 12\pi\left[-\frac{(1-r^2)^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_0^1 = 4\pi\ .$$

10.6 (lineární substituce)
S použitím substituce určete

$$\iint_E (x+2y)\sqrt[3]{x-y}\, dA$$

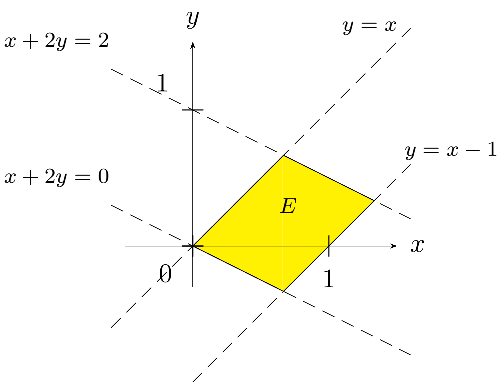
kde E je omezená oblast určená křivkami $y = x$, $y = x-1$, $x+2y = 0$, $x+2y = 2$.

Řešení:
Oblast integrace je

$$E: \quad x-1 \le y \le x, \qquad 0 \le x+2y \le 2$$

což ještě přepíšeme jako

$$E: \quad 0 \le x-y \le 1, \qquad 0 \le x+2y \le 2\ .$$



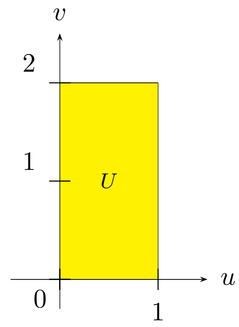
Vzhledem k tvaru množiny i funkce se nabízí použít (lineární) substituci Ψ, kterou zadáme pomocí její inverze:

$$\Psi^{-1}: \quad \begin{aligned} u &= x-y \\ v &= x+2y \end{aligned}$$

Množina

$$U: \quad 0 \le u \le 1 \quad \& \quad 0 \le v \le 2\ .$$

zřejmě parametrizuje E jako $E = \Psi(U)$.



Pro jakobián máme

$$\det \Psi' = \frac{1}{\det(\Psi^{-1})'} = \frac{1}{\det\left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)} = \frac{1}{3} \;.$$

Po substituci pak máme

$$\iint\limits_{E=\Psi(U)} (x+2y)\sqrt[3]{x-y}\, dA = \iint\limits_{U} v\sqrt[3]{u} \cdot \frac{1}{3}\, du\ dv = \frac{1}{3}\int\limits_0^2 \int\limits_0^1 v\sqrt[3]{u}\ du\ dv =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\int\limits_0^2 v\ dv\right) \cdot \left(\int\limits_0^1 \sqrt[3]{u}\ du\right) = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \left[\frac{3}{4}u^{4/3}\right]_{u=0}^{u=1} = \frac{1}{2}.$$

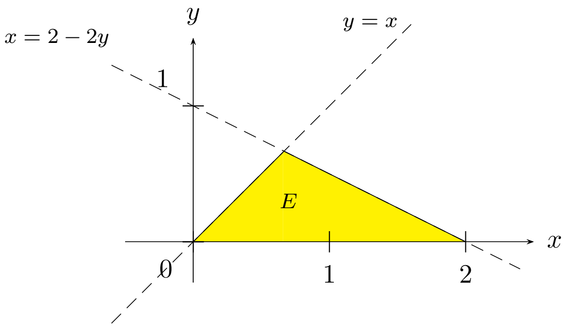
10.7 (lineární substituce)
Použijte substituci $u = x + 2y$, $v = x - y$ pro výpočet integrálu

$$\int\limits_0^{\frac{2}{3}} \int\limits_y^{2-2y} (x+2y)e^{y-x}\ dx\ dy.$$

Řešení:
Oblast integrace je

$$E: \quad 0 \leq y \leq \frac{2}{3}, \qquad y \leq x \leq 2-2y.$$

Jde o trojúhelník s vrcholy $(0,0)$, $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ a $(2,0)$.



Substituce Φ je lineární zobrazení, které je zadáno svou inverzí, tedy

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \Phi^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Trojúhelník lze vyjádřit jako tzv. *konvexní obal* ze svých vrcholů (tj. nejmenší konvexní množinu, která obsahuje dané vrcholy - pro body $A_1, \dots, A_n$ je konvexní obal $[A_1, \dots, A_n]_\alpha$ dán jako

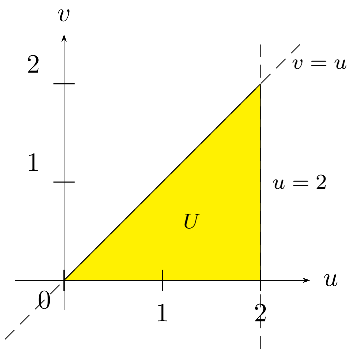
$$[A_1, \dots, A_n]_\alpha = \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i \mid 0 \leq \lambda_1, \dots, \lambda_n \;\&\; \sum_{i-1}^{n} \lambda_i = 1\}).$$

Protože (prosté) lineární zobrazení Φ konvexní obaly zachovává, je množina U taková, že $\Phi(U) = E$, daná také jako konvexní obal z vrcholů

$$\Phi^{-1}(0,0) = (0,0)$$
$$\Phi^{-1}\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = (2,0)$$
$$\Phi^{-1}(2,0) = (2,2).$$

Tedy

$$U: \quad 0 \leq v \leq u, \quad 0 \leq u \leq 2.$$



Dále je $(\Phi^{-1})' = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$, $\det \Phi' = \frac{1}{\det(\Phi^{-1})'} = -\frac{1}{3}$. Po substituci pak máme

$$\int_0^{\frac{2}{3}} \int_y^{2-2y} (x+2y)e^{y-x}\, dx\, dy = \iint_{E=\Phi(U)} (x+2y)e^{y-x}\, dS = \iint_U ue^{-v} \cdot \frac{1}{3}\, dS =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^2\int_0^u ue^{-v}\,dv\,du = \frac{1}{3}\int_0^2 u\Big[-e^{-v}\Big]_{v=0}^{v=u}\,du = \frac{1}{3}\int_0^2 u(1-e^{-u})\,du = \frac{1}{3}\Big[\frac{u^2}{2}+(u+1)e^{-u}\Big]_0^2 =$$
$$= 1 + e^{-2}.$$

Fubiniho věta (pro trojný integrál): Nechť $E \subseteq \mathbb{R}^3$ je oblast integrace a $f : E \to \mathbb{R}$ je funkce integrabilní v absolutní hodnotě (např. spojitá a omezená). Pak

$$\iiint_E f\,dV = \iint_{\pi_{1,2}(E)} \Big(\int_{\substack{\textit{řez množinou } E \textit{ pomocí} \\ \textit{přímky } \{(x,y)\}\times\mathbb{R}}} f(x,y,z)\,dz \Big)\,dx\,dy,$$

kde $\pi_{1,2} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ je projekce, $\pi_{1,2}(x,y,z) = (x,y)$. Případně:

$$\iiint_E f\,dV = \int_{\pi_3(E)} \Big(\iint_{\substack{\textit{řez množinou } E \textit{ pomocí} \\ \textit{roviny } \mathbb{R}^2\times\{z\}}} f(x,y,z)\,dx\,dy \Big)\,dz$$

kde $\pi_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ je opět projekce, $\pi_3(x,y,z) = z$.

Řezy v prvním případě jsou "vlákna" (která ale nemusí být souvislá). Po zintegrování podél vlákna, pak integrujeme přes příslušný průmět dané množiny (zde přes $\pi_{1,2}(E)$), kde postup dále můžeme opakovat (tj. průmět opět řežeme na vlákna atd.)

Jiná možnost, jak spočítat integrál, pak je ve druhém případě množinu nejdříve nařezat na dvourozměrné "plátky", přes ně integrovat danou funkci a výsledek pak zintegrovat přes jednorozměrný průmět množiny E do směru zbylé souřadnice (zde přes $\pi_3(E)$).

10.8 (trojný integrál - Fubiniho věta)
Vypočtěte

(a)
$$\iiint_E xyz\,dV,$$
kde E je ohraničeno plochami $y = x^2$, $x = y^2$, $z = xy$ a $z = 0$.

(b)
$$\iiint_E y\,dV,$$
kde E je ohraničeno shora rovinou $z = x + 2y$ a leží nad oblastí v rovině $z = 0$ ohraničené křivkami $y = x^2$, $y = 0$, $x = 1$.

Řešení:

(i) Projekce $\pi_{1,2}(E)$ oblasti integrace E do roviny xy je určena množinou omezenou křivkami $y = x^2$ a $x = y^2$. Ty totiž určují omezenou oblast v 1. kvadrantu, tj. tam, kde je $x, y \geq 0$. A proto je pak už (pro $x, y \geq 0$) oblast E určena v tomto kvadrantu grafem funkce $z = xy \geq 0$ shora a grafem funkce $z = 0$ zdola. Oblast integrace je tak

$$E: \quad 0 \leq z \leq xy, \quad \underbrace{x^2 \leq y \leq \sqrt{x}, \quad 0 \leq x \leq 1}_{\text{projekce } E \text{ do roviny } xy}.$$

Máme tedy

$$\iiint\limits_E xyz\ dV = \int\limits_0^1 \int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} \int\limits_0^{xy} xyz\ dz\ dy\ dx = \int\limits_0^1 \int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} \frac{(xy)^3}{2}\ dy\ dx = \frac{1}{8}\int\limits_0^1 x^5 - x^{11}\ dx =$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{12}\right) = \frac{1}{96}.$$

(ii) Oblast integrace je

$$E: \quad 0 \le z \le x + 2y, \quad \underbrace{0 \le y \le x^2, \quad 0 \le x \le 1}_{\text{projekce } E \text{ do roviny } xy}.$$

I zde platí

$$\iiint\limits_E y\ dV = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{x^2} \int\limits_0^{x+2y} y\ dz\ dy\ dx = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{x^2} y(x+2y)\ dy\ dx = \int\limits_0^1 \left[\frac{y^2}{2}x + \frac{2y^3}{3}\right]_{y=0}^{y=x^2}\ dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \frac{x^5}{2} + \frac{2x^6}{3}\ dx = \frac{1}{12} + \frac{2}{21} = \frac{5}{28}.$$