11. cvičení z Matematické analýzy 2

30. listopadu - 4. prosince 2020

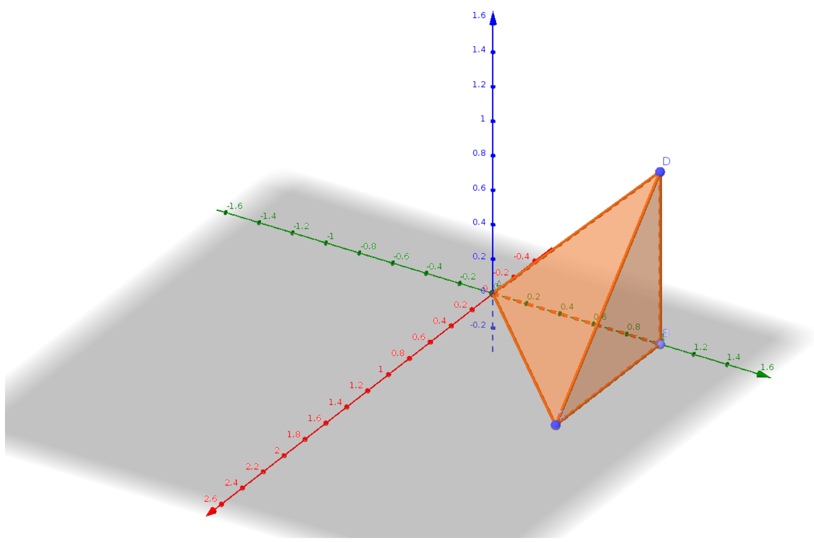
11.1 (trojný integrál - Fubiniho věta)
Vypočtěte

(a)

$$\iiint\limits_E xy \; dV,$$

kde E je čtyřstěn s vrcholy $(0,0,0)$, $(0,1,0)$, $(1,1,0)$ a $(0,1,1)$.

Řešení:



Oblast integrace E je množina ohraničená rovinami $x = 0$, $y = 1$, $z = 0$ a $z = y - x$. Tedy můžeme psát např.

$$E: \quad 0 \leq z \leq y - x, \quad 0 \leq x \leq y, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

Máme tedy

$$\iiint\limits_E xy \; dV = \int_0^1 \int_0^y \int_0^{y-x} xy \; dz \; dx \; dy = \int_0^1 \int_0^y y^2 x - x^2 y \; dx \; dy = \int_0^1 \left[y^2 \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} y \right]_{x=0}^{x=y} dy =$$

$$= \int_0^1 \frac{y^4}{2} - \frac{y^4}{3} \; dy = \left[\frac{y^5}{30} \right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{30}.$$

11.2 (trojný integrál - Fubiniho věta)

Načrtněte oblast integrace:

(a)

$$\int_0^1 \int_0^{3-3x} \int_0^{3-3x-y} dz\, dy\, dx$$

(b)

$$\int_0^1 \int_x^{2x} \int_0^{x+y} dz\, dy\, dx$$

Řešení:

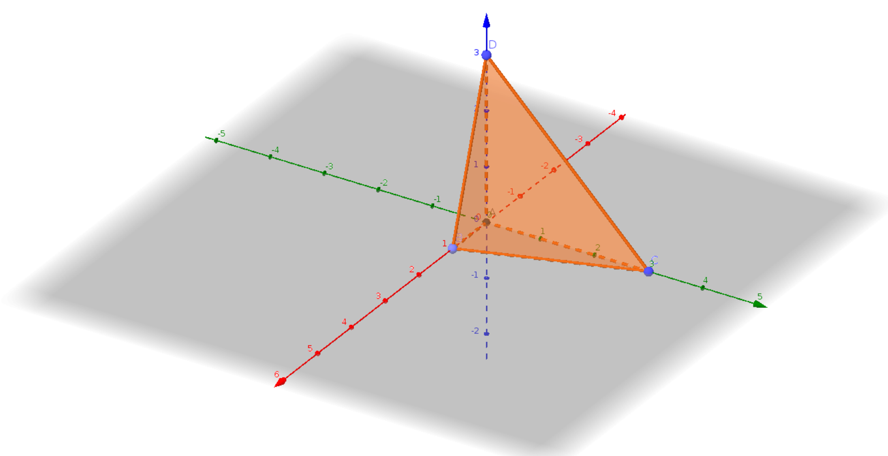
(a) Oblast integrace je

$$E: \quad 0 \le x \le 1 \quad \& \quad 0 \le y \le 3-3x \quad \& \quad 0 \le z \le 3-3x-y\ .$$

Projekce $\pi_{1,2}(E)$ do roviny xy je dána jako

$$\pi_{1,2}(E): \quad 0 \le x \le 1 \quad \& \quad 0 \le y \le 3-3x$$

což je trojúhelník s vrcholy $(0,0)$, $(1,0)$ a $(0,3)$. Oblast E je pak vše, co je nad trojúhelníkem až po rovinu $z = 3-3x-y$. Z polohy této roviny pak plyne, že E je čtyřstěn s vrcholy $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,3,0)$ a $(0,0,3)$.



Integrál vyjadřuje jeho objem, který si pro procvičení zintegrujeme (i když bychom ho asi uměli spočítat i jinak: *objem* $= \frac{1}{3}$ *podstava*$\times$*výška*). Máme tedy

$$\int_0^1 \int_0^{3-3x} \int_0^{3-3x-y} dz\, dy\, dx = \int_0^1 \int_0^{3-3x} (3-3x-y)\, dy\, dx = \int_0^1 (3-3x)^2 - \frac{(3-3x)^2}{2}\, dx =$$

$$= \frac{9}{2} \int_0^1 (1-x)^2\, dx = \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{2}\ .$$

(b) Oblast integrace je

$$E: \quad 0 \le x \le 1 \quad \& \quad x \le y \le 2x \quad \& \quad 0 \le z \le x + y \ .$$

Projekce $\pi_{1,2}(E)$ do roviny xy je dána jako

$$\pi_{1,2}(E): \quad 0 \le x \le 1 \quad \& \quad x \le y \le 2x$$

což je trojúhelník s vrcholy $(0,0)$, $(1,1)$ a $(1,2)$. Oblast E je pak vše, co je nad trojúhelníkem až po rovinu $z = x + y$. Z polohy této roviny pak plyne, že E je pětistěn s vrcholy $(0,0,0)$, $(1,1,0)$, $(1,2,0)$, $(1,1,2)$ a $(1,2,3)$. Integrál vyjadřuje jeho objem.

Věta o substituci (trojný integrál): Nechť $U \subseteq \mathbb{R}^3$ je oblast integrace a $\Phi : U \to \mathbb{R}^3$ je zobrazení (nazývané *parametrizace*). Nechť dále platí, že

- Φ je spojité na U,
- Φ je prosté a spojitě diferencovatelné na U° (tj. na vnitřku U)
- $\det \Phi' \neq 0$ všude na U° a
- množina ∂U se skládá ze spojitě diferencovatelných ploch, křivek, případně bodů (tj. její příspěvek k hodnotě jakéhokoliv trojného integrálu je nulový)

Nechť f je integrabilní funkce na $\Phi(U)$. Pak

$$\iiint\limits_{\Phi(U)} f \ dV = \iiint\limits_{U} (f \circ \Phi) \cdot |\det \Phi'| \ d\widetilde{V}.$$

kde pro odlišení značíme integraci podle jiných proměnných jako $d\widetilde{V}$.

Cylindrické souřadnice mají předpis:

$$\Phi: \begin{array}{ccc} x & = & r\cos\varphi \\ y & = & r\sin\varphi \\ z & = & h \end{array}$$

kde $(r, \varphi, h) \in \langle 0, +\infty) \times \langle 0, 2\pi \rangle \times \mathbb{R}$. Dále je

$$\Phi' = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \det \Phi' = r \ .$$

Moment setrvačnosti: Moment setrvačnosti J tělesa $E \subseteq \mathbb{R}^3$ s hustotou $\varrho(x, y, z)$ vzhledem k ose otáčení p je definován jako

$$J = \iiint\limits_{E} v^2(x, y, z) \cdot \varrho(x, y, z) \ dV$$

kde funkce $v(x, y, z)$ je vzdálenost bodu (x, y, z) od osy p. Tělesa s velkým momentem setrvačnosti jsou např. setrvačníky, které je těžké roztočit a pak i zastavit.

11.3 (cylindrické souřadnice)

Zapište integrály pomocí cylindrických souřadnic a pak je spočítejte:

(a)

$$\int\limits_{-2}^{2} \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} (x^2 + y^2) \ dz \ dy \ dx.$$

(b)

$$\int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int\limits_{x^2+y^2}^{2-x^2-y^2} (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} \ dz \ dy \ dx \ .$$

(c)

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-y^2}}\int_{x^2+y^2}^{\sqrt{x^2+y^2}} xy^2z \; dz \; dx \; dy.$$

Řešení:
(a) Oblast integrace je

$$E: \quad |x| \le 2 \quad \& \quad |y| \le \sqrt{4-x^2} \quad \& \quad \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 2$$

neboli

$$E: \quad x^2 \le 4 \quad \& \quad x^2+y^2 \le 4 \quad \& \quad \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 2$$

a tedy

$$E: \quad \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 2,$$

což je kužel s výškou 2 a poloměrem podstavy také 2, který stojí na svém vrcholu v počátku. Jako parametrizaci E si vezmeme

$$U: \quad 0 \le r \le h \le 2 \quad \& \quad 0 \le \varphi \le 2\pi\ .$$

Můžeme tedy psát

$$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} (x^2+y^2) \; dz \; dy \; dx = \iiint_{E=\Phi(U)} (x^2+y^2) \; dV =$$

$$= \iiint_{U} r^2 \cdot r \; dV = \int_{0}^{2}\int_{0}^{h}\int_{0}^{2\pi} r^3 \; d\varphi \; dr \; dh = 2\pi \int_{0}^{2}\int_{0}^{h} r^3 \;\; dr \; dh =$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_{0}^{2} h^4 \;\; dh = \frac{\pi}{10} \cdot 2^5 = \frac{16}{5}\pi.$$

Všimněme si, že spočítaný integrál vyjadřuje moment setrvačnosti kužele E s hustotou $\varrho(x,y,z) = 1$ vzhledem k jeho ose symetrie (což je osa z).

(b) Oblast E je popsána jako

$$E: \quad -1 \le x \le 1 \quad \& \quad -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2} \quad \& \quad x^2+y^2 \le z \le 2-x^2-y^2$$

neboli

$$E: \quad |x| \le 1 \quad \& \quad |y| \le \sqrt{1-x^2} \quad \& \quad x^2+y^2 \le z \le 2-x^2-y^2$$

a ekvivalentně

$$E: \quad x^2+y^2 \le 1 \quad \& \quad x^2+y^2 \le z \le 2-x^2-y^2$$

což je prostě oblast ležící nad kruhem o poloměru 1 v rovině xy a je sevřena mezi grafy dvou funkcí (celkově vypadá jako "čočka"). Ještě si pro pořádek ověříme, že průmět oblasti do roviny xy je skutečně kruh o průměru 1 (jinak by totiž zadání nemělo smysl). Zřejmě ale je

$$x^2+y^2 \le 2-x^2-y^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2+y^2 \le 1$$

takže je to v pořádku.

V cylindrických souřadnicích Φ je parametrizací $E = \Phi(U)$ množina

$$U: \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \quad \& \quad 0 \le r \le 1 \quad \& \quad r^2 \le h \le 2 - r^2 \ .$$

Pak můžeme psát

$$\int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int\limits_{x^2+y^2}^{2-x^2-y^2} (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} \ dz \ dy \ dx = \iiint\limits_{E=\Phi(U)} (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} \ dV =$$

$$= \iiint\limits_{U} r^3 \cdot r \ d\varphi \ dh \ dr = \int\limits_{0}^{1} \int\limits_{r^2}^{2-r^2} \int\limits_{0}^{2\pi} r^4 \ d\varphi \ dh \ dr = 2\pi \int\limits_{0}^{1} \int\limits_{r^2}^{2-r^2} r^4 \ dh \ dr =$$

$$= 4\pi \int\limits_{0}^{1} r^4(1-r^2) \ dr = 4\pi \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) = \frac{8}{35}\pi \ .$$

Všimněme si, že spočítaný integrál vyjadřuje moment setrvačnosti "čočky" E s hustotou $\varrho(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2}$ vzhledem k ose z.

(c) Oblast E je popsána jako

$$E: \quad -1 \le y \le 1 \quad \& \quad 0 \le x \le \sqrt{1-y^2} \quad \& \quad x^2+y^2 \le z \le \sqrt{x^2+y^2}$$

neboli

$$E: \quad 0 \le x \quad \& \quad x^2+y^2 \le 1 \quad \& \quad x^2+y^2 \le z \le \sqrt{x^2+y^2} \ .$$

Třetí z podmínek nám dává nerovnost $x^2+y^2 \le \sqrt{x^2+y^2}$, ze které plyne podmínka $x^2+y^2 \le 1$, kterou tímto můžeme také vynechat. Dostáváme tak jednodušší popis

$$E: \quad 0 \le x \quad \& \quad x^2+y^2 \le z \le \sqrt{x^2+y^2}$$

což je prostor ležící mezi rotačním paraboloidem $z = x^2+y^2$ a kuželem $z^2 = x^2+y^2$ a to celé ještě v poloprostoru určeném $x \ge 0$. Průmět $\pi_{1,2}(E)$ oblasti E do roviny xy je polovina kruhu (určená pomocí $x \ge 0$) o průměru 1. Tento průmět už máme zapsaný v jednom z ekvivalentních vyjádření E a sice jako

$$\pi_{1,2}(E): \quad 0 \le x \quad \& \quad x^2+y^2 \le 1$$

V cylindrických souřadnicích Φ je parametrizací oblasti $E = \Phi(U)$ množina

$$U: \quad -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \quad \& \quad 0 \le r \le 1 \quad \& \quad r^2 \le h \le r \ .$$

Pak můžeme psát

$$\int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{0}^{\sqrt{1-y^2}} \int\limits_{x^2+y^2}^{\sqrt{x^2+y^2}} xy^2z \ dz \ dx \ dy = \iiint\limits_{E=\Phi(U)} xy^2z \ dV =$$

$$= \iiint\limits_{U} r^3h\cos\varphi\sin^2\varphi \cdot r \ d\varphi \ dh \ dr = \int\limits_{0}^{1} \int\limits_{r^2}^{r} r^3h \underbrace{\left(\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \sin^2\varphi \ d\varphi \right)}_{=\left[\frac{\sin^3\varphi}{3}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}} \ dh \ dr =$$

$$= \int\limits_{0}^{1} \int\limits_{r^2}^{r} \frac{2}{3} r^3 h \ dh \ dr = \frac{1}{3} \int\limits_{0}^{1} r^3 \left[h^2\right]_{h=r^2}^{h=r} \ dr = \frac{1}{3} \int\limits_{0}^{1} r^3(r^2-r^4) \ dr = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8} \right) = \frac{1}{72} \ .$$

11.4 (cylindrické souřadnice)
Určete moment setrvačnosti J tělesa

$$E: \quad x^2+y^2+z^2 \le 2 \;\;\&\;\; x^2+y^2 \le 1 \;\;\&\;\; x,y,z \ge 0.$$

vzhledem k ose otáčení z.

Řešení:
Těleso E je průnik koule o poloměru $\sqrt{2}$, válce o průměru 1, jehož osa prochází středem koule a 1. oktantu (tj. osminy prostoru se všemi souřadnicemi nezápornými). Použijeme proto cylindrické souřadnice:

$$\Phi: \quad x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi \qquad z = h\ .$$

Po dosazení do nerovností máme

$$r^2+h^2 \le 2, \quad r^2 \le 1, \quad h \ge 0$$

přičemž rozsah úhlu je $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$. Oblast parametrizace U tak bude

$$U: \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \quad \& \quad 0 \le r \le 1 \quad \& \quad 0 \le h \le \sqrt{2-r^2}\ .$$

Pak dostáváme

$$J = \iiint\limits_{E=\Phi(U)} x^2+y^2 \ \mathrm{d}V = \iiint\limits_{U} r^2 \cdot r \ \mathrm{d}h \ \mathrm{d}r \ \mathrm{d}\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{2-r^2}} r^2 \cdot r \ \mathrm{d}h \ \mathrm{d}r \ \mathrm{d}\varphi =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 r^3\sqrt{2-r^2} \ \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi = \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \ \mathrm{d}\varphi \right) \cdot \left(\int_0^1 r^3\sqrt{2-r^2} \ \mathrm{d}r \right) = \left\{ \begin{smallmatrix} u=2-r^2 \\ du=-2rdr \end{smallmatrix} \right\} =$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_2^1 -\tfrac{1}{2}(2-u)\sqrt{u} \ \mathrm{d}u = \frac{\pi}{2} \int_1^2 u^{1/2} - \tfrac{1}{2}u^{3/2} \ \mathrm{d}u = \frac{\pi}{2} \left[\tfrac{2}{3}u^{3/2} - \tfrac{1}{5}u^{5/2} \right]_1^2 =$$

$$= \frac{\pi}{2} \left(\frac{4}{3}\sqrt{2} - \frac{4}{5}\sqrt{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \right) = \pi \left(\frac{4}{15}\sqrt{2} - \frac{7}{30} \right)\ .$$

11.5 (cylindrické souřadnice)

(a) Určete objem tělesa E omezeného plochami $x^2+z^2=1$, $x+\frac{y}{2}+z=2$ a prostorem $x,y,z \ge 0$.

(b) Určete hmotnost tělesa E omezeného zdola plochou $x^2+y^2=z$ a shora plochou $x^2+y^2+z^2=2$. Hustota tělesa je $\varrho(x,y,z)=|y|$.

Řešení:
(a) Těleso E je část válce seříznuta šikmo rovinou $x+\frac{y}{2}+z=2$ a ležící v části prostoru $x,y,z \ge 0$. Tedy:

$$E: \quad x^2+z^2 \le 1, \quad x \ge 0, \quad z \ge 0, \quad 0 \le y \le 4-2x-2z.$$

Použijeme proto cylindrické souřadnice ve tvaru

$$\Phi: \begin{array}{ccc} x & = & r\cos\varphi \\ y & = & h \\ z & = & r\sin\varphi \end{array}$$

s absolutní hodnotou jakobiánu opět rovnou r.

Po dosazení této parametrizace do podmínek pro E a především pomocí geometrické představy E získáme oblast U parametrizace množiny E jako:

$$U: \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \quad \& \quad 0 \le r \le 1 \quad \& \quad 0 \le h \le 4 - 2r(\cos\varphi + \sin\varphi)\ .$$

Pak můžeme psát

$$\text{objem}(E) = \iiint_E 1\ dV = \iiint_U r\ d\varphi\ dh\ dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \int_0^{4-2r(\cos\varphi+\sin\varphi)} r\ dh\ dr\ d\varphi =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 4r - 2r^2(\cos\varphi + \sin\varphi)\ dr\ d\varphi =$$

$$= \underbrace{\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\ d\varphi\right)}_{=2\pi} \cdot \underbrace{\left(\int_0^1 r\ dr\right)}_{=\frac{1}{2}} - \underbrace{\left(\int_0^1 2r^2\ dr\right)}_{\frac{2}{3}} \cdot \underbrace{\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi + \sin\varphi\ d\varphi\right)}_{=2} = \pi - \frac{4}{3}$$

(b) Těleso E je určeno zdola paraboloidem a shora sférou, tedy jako

$$E: \quad x^2 + y^2 \le z \le \sqrt{2 - x^2 - y^2}.$$

K její parametrizaci použijeme (obvyklé) válcové souřadnice. Průmět E do roviny xy bude kružnice jejíž poloměr r_0 bude dán průnikem obou ploch, tj. v nerovnostech pro E nastane rovnost $r_0^2 = \sqrt{2 - r_0^2}$. Tedy $0 = r_0^4 + r_0^2 - 2 = (r_0^2 + 2)(r_0^2 - 1)$ a proto $r_0 = 1$. Odpovídající množina U parametrizující E tak bude (opět např. z náčrtu nebo po dosazení $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = h$ do nerovností pro E):

$$U: \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \quad \& \quad 0 \le r \le 1 \quad \& \quad r^2 \le h \le \sqrt{2 - r^2}\ .$$

Pak můžeme psát

$$\text{hmotnost}(E) = \iiint_E \varrho(x,y,z)\ \mathrm{d}V = \iiint_{E=\Phi(U)} |y|\ \mathrm{d}V = \iiint_U r \cdot |\sin\varphi| \cdot r\ \mathrm{d}h\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{r^2}^{\sqrt{2-r^2}} r^2 \cdot |\sin\varphi|\ \mathrm{d}h\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^1 |\sin\varphi| \cdot r^2(\sqrt{2-r^2} - r^2)\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\varphi$$

$$= \underbrace{\left(\int_0^{2\pi} |\sin\varphi|\ \mathrm{d}\varphi\right)}_{2\int_0^{\pi} \sin\varphi\ \mathrm{d}\varphi = 4} \cdot \underbrace{\left(\int_0^1 r^2\sqrt{2-r^2} - r^4\ \mathrm{d}r\right)}_{=\frac{\pi}{8} - \frac{1}{5}} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{5}\ ,$$

kde jsme spočítali integrál

$$\int_0^1 r^2\sqrt{2-r^2}\;\mathrm{d}r = \left\{ \begin{smallmatrix} r=\sqrt{2}\sin t \\ dr=\sqrt{2}\cos t dt \end{smallmatrix} \right\} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\sin^2 t \cdot 2\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\;\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2\sin t\cos t)^2\;\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2(2t)\;\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} 1-\cos(4t)\;\mathrm{d}u = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(4t)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8}\ .$$

Sférické souřadnice mají předpis:

$$\Psi:\ \begin{array}{rcl} x &=& (r\sin\vartheta)\cos\varphi \\ y &=& (r\sin\vartheta)\sin\varphi \\ z &=& r\cos\vartheta \end{array}$$

kde $(r,\varphi,\vartheta) \in \langle 0,+\infty) \times \langle 0,2\pi\rangle \times \langle 0,\pi\rangle$.

Poznámka: Sférické souřadnice jsou složením dvou (upravených) cylindrických souřadnic a sice:

$$\Psi = \Phi_2 \circ \Phi_1$$

$$\Phi_2:\ \begin{array}{rcl} x &=& \tilde{r}\cos\tilde{\varphi} \\ y &=& \tilde{r}\sin\tilde{\varphi} \\ z &=& \tilde{z} \end{array}\ ,\quad \Phi_1:\ \begin{array}{rcl} \tilde{r} &=& r\sin\vartheta \\ \tilde{\varphi} &=& \varphi \\ \tilde{z} &=& r\cos\vartheta \end{array}$$

takže pro determinant máme

$$\det\Psi' = \det(\Phi_2)'_{|\Phi_1} \cdot \det(\Phi_1)' = \tilde{r}_{|\Phi_1} \cdot r = (r\sin\vartheta)\cdot r = r^2\sin\vartheta.$$

11.6 (sférické souřadnice)

Zapište integrál pomocí sférických souřadnic a pak ho spočítejte:

(a)

$$\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{0}\int_{0}^{\sqrt{9-x^2-z^2}} y\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dydzdx,$$

(b)

$$\int_{0}^{3}\int_{0}^{\sqrt{9-y^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{18-x^2-y^2}} (x^2+y^2+z^2)\,dzdxdy.$$

Řešení:

(a) Oblast integrace je

$$E:\quad |x|\le 3 \quad \& \quad -\sqrt{9-x^2}\le z\le 0 \quad \& \quad 0\le y\le\sqrt{9-x^2-z^2}$$

neboli

$$E:\quad \underbrace{x^2\le 9 \quad \& \quad x^2+z^2\le 9 \quad \& \quad z\le 0}_{\text{průmět } E \text{ do roviny } xz} \quad \& \quad 0\le y \quad \& \quad x^2+y^2+z^2\le 9$$

a tedy

$$E: \quad z \leq 0 \quad \& \quad 0 \leq y \quad \& \quad x^2+y^2+z^2 \leq 9,$$

což je čtvrtina koule o poloměru 3 a středem v počátku. Jako parametrizaci E si vezmeme sférické souřadnice

$$\Psi: \begin{array}{rcl} x &=& (r\sin\vartheta)\cos\varphi \\ y &=& (r\sin\vartheta)\sin\varphi \\ z &=& r\cos\vartheta \end{array}$$

a oblast

$$U: \quad 0 \leq r \leq 3 \quad \& \quad 0 \leq \varphi \leq \pi \quad \& \quad \frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \pi\ .$$

Můžeme tedy psát

$$\int_{-3}^{3} \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{0} \int_{0}^{\sqrt{9-x^2-z^2}} y\sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dydzdx = \iiint_{E=\Phi(U)} y\sqrt{x^2+y^2+z^2}\; dV =$$

$$= \iiint_U r^2 \sin\vartheta \sin\varphi \cdot r^2|\sin\vartheta|\; dV = \int_0^3 \int_0^\pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} r^4 \sin^2\vartheta \sin\varphi\; dr\; d\varphi\; d\vartheta \;=$$

$$= \underbrace{\left(\int_0^3 r^4\ \mathrm{d}r\right)}_{=\frac{3^5}{5}} \cdot \underbrace{\left(\int_0^\pi \sin\varphi\ \mathrm{d}\varphi\right)}_{2} \cdot \underbrace{\left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^2\vartheta\ \mathrm{d}\vartheta\right)}_{=\frac{\pi}{4}} = \frac{3^5}{10}\pi\ .$$

(b) Oblast integrace je

$$E: \quad 0 \leq y \leq 3 \quad \& \quad 0 \leq x \leq \sqrt{9-y^2} \quad \& \quad \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq \sqrt{18-x^2-y^2}$$

neboli

$$E: \quad \underbrace{0 \leq y \leq 3 \quad \& \quad x^2+y^2 \leq 9 \quad \& \quad 0 \leq x}_{\text{průmět } E \text{ do roviny } xy \text{ (čtvrtkruh)}} \quad \& \quad \underbrace{\sqrt{x^2+y^2} \leq z}_{\text{kužel}} \quad \& \quad \underbrace{x^2+y^2+z^2 \leq 18}_{\text{koule}}$$

Podíváme se, kde plášť kuželu protne se sférou, tj. kdy nastává $z = \sqrt{x^2+y^2}$ a $x^2+y^2+z^2 = 18$. Po dosazení dostaneme

$$18 = x^2+y^2+\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 = 2(x^2+y^2) \quad \Leftrightarrow \quad x^2+y^2 = 9$$

Jako parametrizaci E si vezmeme sférické souřadnice

$$\Psi: \begin{array}{rcl} x &=& (r\sin\vartheta)\cos\varphi \\ y &=& (r\sin\vartheta)\sin\varphi \\ z &=& r\cos\vartheta \end{array}$$

a oblast

$$U: \quad 0 \leq r \leq \sqrt{18} \quad \& \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \quad \& \quad 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{4}\ .$$

Tuto oblast můžeme získat i po dosazení parametrizace do podmínek E, tj.

$$E: \quad 0 \leq r\sin\vartheta\sin\varphi \quad \& \quad r^2\sin^2\vartheta \leq 9 \quad \& \quad 0 \leq r\sin\vartheta\cos\varphi \quad \& \quad r|\sin\vartheta| \leq r\cos\vartheta \quad \& \quad r^2 \leq 18$$

odkud máme např. $r^2 \leq \min\{\frac{9}{\sin^2\vartheta}, 18\} = 18$ protoze

$$18 \leq \frac{9}{\sin^2\vartheta} \quad \Leftrightarrow \quad \sin^2\vartheta \leq \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad |\sin\vartheta| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

což je právě pro $\vartheta \in \langle 0,\ \frac{\pi}{4}\rangle$ splněno. Tento postup je ale náročnější než získat totéž z náčrtu.

Můžeme tedy psát

$$\int\limits_0^3 \int\limits_0^{\sqrt{9-y^2}} \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{18-x^2-y^2}} (x^2+y^2+z^2)\, dz dx dy = \iiint\limits_{E=\Phi(U)} (x^2+y^2+z^2)\ dV =$$

$$= \iiint\limits_U r^2 \cdot r^2 |\sin\vartheta|\ dV = \int\limits_0^{\sqrt{18}} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} r^4 \sin\vartheta\ d\vartheta\ d\varphi\ dr\ =$$

$$= \underbrace{\left(\int\limits_0^{\sqrt{18}} r^4\ \mathrm{d}r \right)}_{=\frac{18^2\sqrt{18}}{5}} \cdot \underbrace{\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 1\ \mathrm{d}\varphi \right)}_{=\frac{\pi}{2}} \cdot \underbrace{\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\vartheta\ \mathrm{d}\vartheta \right)}_{=1-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2\cdot 3^5}{5}\pi(\sqrt{2}-1)\ .$$

11.7 (sférické souřadnice)
Vypočtěte těžiště tělesa

$$E: \quad x^2+y^2+z^2 \leq R^2 \quad \& \quad z\cdot\tan(\alpha_0) \geq \sqrt{x^2+y^2},$$

s hustotou $\sigma = 1$, kde $R > 0$ a $\alpha_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$ jsou parametry.

Řešení:
Těleso E je průnikem koule o poloměru R a kužele s vrcholovým úhlem $2\alpha_0$, jehož špička je ve středu koule. Výhodné tedy bude použít sférické souřadnice

$$\Psi: \quad \begin{array}{rcl} x &=& (r\sin\vartheta)\cos\varphi \\ y &=& (r\sin\vartheta)\sin\varphi \\ z &=& r\cos\vartheta \end{array}$$

Parametrizace $E = \Psi(U)$ pak bude

$$U: \quad 0 \leq r \leq R \quad \& \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad \& \quad 0 \leq \vartheta \leq \alpha_0$$

Pro těžiště musíme nejdříve spočítat hmotnost:

$$m = \iiint\limits_{E=\Psi(U)} 1\ dV = \iiint\limits_U r^2 \sin\vartheta\ dV = \int\limits_0^R \int\limits_0^{\alpha_0} \int\limits_0^{2\pi} r^2 \sin\vartheta\ d\varphi\ d\vartheta\ dr =$$

$$= 2\pi \int\limits_0^R \int\limits_0^{\alpha_0} r^2 \sin\vartheta\ d\vartheta\ dr = 2\pi(1-\cos\alpha_0) \int\limits_0^R r^2\ dr = \frac{2}{3}\pi R^3 (1-\cos\alpha_0).$$

Protože těleso E je rotačně symetrické podle osy z, budou x-ová i y-ová souřadnice těžiště obě nulové. Zbývá tedy spočítat z-ovou souřadnici těžiště:

$$T_3 = \frac{1}{m} \iiint\limits_{E=\Psi(U)} z \; dV = \frac{1}{m} \iiint\limits_{U} r^3 \cos\vartheta \sin\vartheta \; d\varphi \; d\vartheta \; dr = \frac{1}{m} \int\limits_0^R \int\limits_0^{\alpha_0} \int\limits_0^{2\pi} r^3 \frac{\sin 2\vartheta}{2} \; d\varphi \; d\vartheta \; dr =$$

$$= \frac{\pi}{m} \left(\int\limits_0^R r^3 \; dr \right) \cdot \left(\int\limits_0^{\alpha_0} \sin 2\vartheta \; d\vartheta \right) = \frac{\pi R^4}{8m} (1 - \cos 2\alpha_0) = \frac{3R}{16} \cdot \frac{1 - \cos 2\alpha_0}{1 - \cos \alpha_0} = \frac{3R}{8} (1 + \cos \alpha_0).$$

11.8 (sférické souřadnice)
Vypočtěte

$$\iiint\limits_E \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-2)^2}} \; dV,$$

kde $E: \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 1.$

Řešení:
Pomocí sférických souřadnic Ψ si zvolíme parametrizaci koule $E = \Psi(U)$ jako

$$U: \quad 0 \leq r \leq 1 \quad \& \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad \& \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi \; .$$

Takže můžeme psát

$$\iiint\limits_{E=\Psi(U)} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 4z + 4}} \; dV = \iiint\limits_U \frac{r^2 \sin\vartheta}{\sqrt{r^2 - 4r\cos\vartheta + 4}} \; dV =$$

$$= \int\limits_0^1 \int\limits_0^{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{r^2 \sin\vartheta}{\sqrt{r^2 - 4r\cos\vartheta + 4}} \; d\varphi \; d\vartheta \; dr = 2\pi \int\limits_0^1 \int\limits_0^{\pi} \frac{r^2 \sin\vartheta}{\sqrt{r^2 - 4r\cos\vartheta + 4}} \; d\vartheta \; dr =$$

$$= 2\pi \int\limits_0^1 \left[r \frac{\sqrt{r^2 - 4r\cos\vartheta + 4}}{2} \right]_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi} dr = \pi \int\limits_0^1 r \left(\sqrt{r^2 + 4r + 4} - \sqrt{r^2 - 4r + 4} \right) dr =$$

$$= \pi \int\limits_0^1 r \Big(|r+2| - |r-2| \Big) \; dr = \pi \int\limits_0^1 r \Big(r + 2 - (2 - r) \Big) \; dr = 2\pi \int\limits_0^1 r^2 \; dr = \frac{2}{3}\pi.$$