

12. cvičení z Matematické analýzy 2

7. - 11. prosince 2020

12.1 (sférické souřadnice)

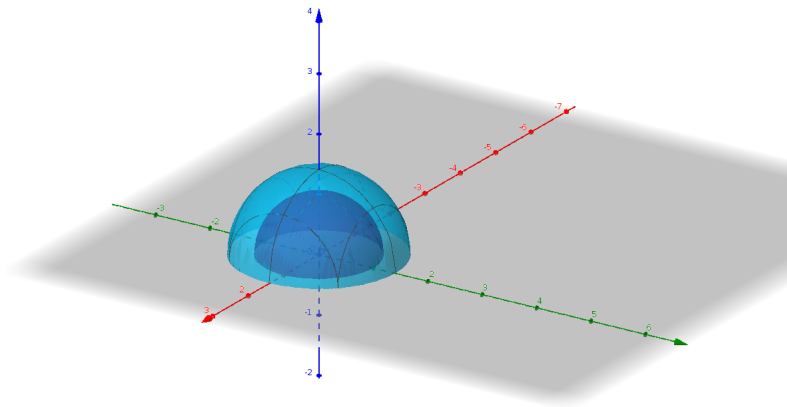
Spočítejte

$$\iiint_E x e^{(x^2+y^2+z^2)^2} dV$$

kde

$$E : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 2 \quad \& \quad z \geq 0 .$$

Řešení:



Pro oblast E použijeme sférické souřadnice

$$\Psi : \begin{aligned} x &= (r \sin \vartheta) \cos \varphi \\ y &= (r \sin \vartheta) \sin \varphi \\ z &= r \cos \vartheta \end{aligned}$$

a parametrizace $E = \Psi(U)$ pak bude

$$U : 1 \leq r \leq 2 \quad \& \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad \& \quad 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2} .$$

Pro jakobián máme

$$\det \Psi' = r^2 \sin \vartheta$$

a můžeme tedy psát

$$\iiint_{E=\Psi(U)} x e^{(x^2+y^2+z^2)^2} dV = \iiint_U r \sin \vartheta \cos \varphi \cdot e^{r^4} \cdot r^2 \sin \vartheta dr d\varphi d\vartheta =$$

$$= \left(\int_1^2 r^3 e^{r^4} dr \right) \cdot \underbrace{\left(\int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi \right)}_0 \cdot \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \vartheta d\vartheta \right) = 0 .$$

12.2 (obecnější sférické souřadnice)

Vypočítejte těžiště tělesa

$$E : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \quad \& \quad x, y, z \geq 0,$$

s hustotou $\sigma = 1$, kde $a, b, c > 0$ jsou parametry.

Řešení:

Oblast integrace E je osmina obecného elipsoidu. Použijeme proto upravené sférické souřadnice Φ (které parametrizují tento elipsoid):

$$\Phi : \begin{aligned} x/a &= (r \sin \vartheta) \cos \varphi \\ y/b &= (r \sin \vartheta) \sin \varphi, \\ z/c &= r \cos \vartheta \end{aligned}$$

které vzniknou složením "klasických" sférických souřadnic Ψ a lineární transformace \mathcal{L} , která deformuje jednotlivé osy:

$$\Phi = \mathcal{L} \circ \Psi, \quad \mathcal{L}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) := (a\tilde{x}, b\tilde{y}, c\tilde{z}).$$

Máme tedy

$$\Phi' = \mathcal{L}' \circ \Psi' \quad \text{a} \quad \det \Phi' = (\det \mathcal{L}') \cdot (\det \Psi') = abc \cdot r^2 \sin \vartheta,$$

protože

$$\mathcal{L}' = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

Parametrizace U oblasti $E = \Phi(U)$ je

$$U : \quad 0 \leq r \leq 1 \quad \& \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \quad \& \quad 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Výpočet hmotnosti m oblasti E si usnadníme znalostí objemu koule o poloměru 1 (označme ji jako K) a toho, že objem E je jedna osmina objemu celého původního elipsoidu, který označme např. jako F . Protože $F = \mathcal{L}(K)$, máme:

$$\begin{aligned} m &= \iiint_E 1 dV = \frac{1}{8} \iiint_{F=\mathcal{L}(K)} 1 dV = \frac{1}{8} \iiint_K |\det \mathcal{L}'| dV = \\ &= \frac{abc}{8} \iiint_K 1 dV = \frac{abc}{8} \cdot \frac{4}{3}\pi = \frac{\pi abc}{6}. \end{aligned}$$

Pro zjištění těžiště $\vec{T} = (T_1, T_2, T_3)$ se nyní stačí omezit jen na jednu složku (např. T_3), protože ostatní lze analogicky získat příslušným natočením elipsoidu do daného směru a zopakováním výpočtu. Máme tedy

$$T_3 = \frac{1}{m} \iiint_{E=\Phi(U)} z dV = \frac{1}{m} \iiint_U (cr \cos \vartheta) \cdot (abc r^2 \sin \vartheta) dV =$$

$$= \frac{3c}{\pi} \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3 \sin 2\vartheta \, d\varphi \, d\vartheta \, dr = \frac{3c}{\pi} \left(\int_0^1 r^3 \, dr \right) \cdot \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\vartheta \, d\vartheta \right) \cdot \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \, d\varphi \right) = \frac{3}{8}c.$$

Podobně tedy budeme mít $T_1 = \frac{3}{8}a$ a $T_2 = \frac{3}{8}b$.

Integrál z funkce f podél křivky \mathcal{C} spočítáme podle vztahu

$$\int_{\mathcal{C}} f \, ds = \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \|\varphi'(t)\| \, dt,$$

kde φ je vhodná parametrizace křivky \mathcal{C} , tj. zobrazení $\varphi: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}^n$, které je

- spojitě a po částech spojitě diferencovatelné na intervalu $\langle a, b \rangle$ (tj. křivka může být v některých bodech "zlomená", ale stále to má být souvislá čára),
- až na konečně mnoho výjímek $t_1, \dots, t_n \in \langle a, b \rangle$ platí, že:
 φ je prosté na $\langle a, b \rangle$ a $\|\varphi'(t)\| \neq 0$ pro $t \in \langle a, b \rangle$ (tj. křivka může protínat konečněkrát sama sebe a vektor rychlosti chceme mít nenulový až konečně mnoho výjímek),
- $\varphi(\langle a, b \rangle) = \mathcal{C}$.

Integrál z funkce nezávisí na volbě orientace křivky. Změnu orientace lze vždy provést např. jako

$$\psi(t) := \varphi(a + b - t) \quad \text{pro } t \in \langle a, b \rangle.$$

12.3 (délka křivky)

Určete délku cykloidy Γ s parametrizací

$$\varphi: x = t - \sin t \quad \wedge \quad y = 1 - \cos t$$

kde $0 \leq t \leq 2\pi$. Cykloida je křivka určená dráhou bodu, který je na kružnici (zde s poloměrem $a = 1$), která se valí bez tření po přímce.

Řešení:

Délka křivky Γ s parametrizací φ se vypočítá jako

$$\ell(\Gamma) = \int_a^b \|\varphi'(t)\| \, dt \quad \left(= \int_{\Gamma} 1 \, ds \right),$$

neboli jako integrál z konstantní funkce $f = 1$ podél dané křivky Γ . Máme

$$\varphi'(t) = (1 - \cos t, \sin t)$$

a

$$\|\varphi'(t)\| = \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} = \sqrt{2 - 2 \cos t}.$$

Takže můžeme psát

$$\begin{aligned} \ell(\Gamma) &= \int_{\Gamma} 1 \, ds = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t} \, dt = \left[\begin{smallmatrix} 2u=t \\ 2du=dt \end{smallmatrix} \right] = 2\sqrt{2} \int_0^{\pi} \sqrt{1 - \cos(2u)} \, du = \\ &= \left\{ \cos(2u) = \cos^2 u - \sin^2 u \right\} = 4 \int_0^{\pi} \sin u \, du = 8. \end{aligned}$$

12.4 (křivkový integrál z funkce)

Spočítejte $\int_C (x+y) ds$, kde C se skládá postupně z křivek

- C_1 : úsečka jdoucí z bodu $(1, 0)$ do bodu $(0, 0)$;
- C_2 : levá polovina kružnice o poloměru 1 se středem v $(0, 1)$ jdoucí v záporném smyslu z bodu $(0, 0)$ do bodu $(0, 2)$;
- C_3 : úsečka jdoucí z bodu $(0, 2)$ do bodu $(1, 0)$.

Řešení:

- parametrizace C_1 : $\varphi_1(t) = (\underbrace{1-t}_x, \underbrace{0}_y)$, $t \in \langle 0, 1 \rangle$

$$\varphi_1'(t) = (-1, 0) \quad \text{a} \quad \|\varphi_1'(t)\| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = 1.$$

Parametrizace má orientaci souhlasnou se zvolenou orientací. Takže

$$\int_{C_1} (x+y) ds = \int_0^1 (x+y)|_{\varphi_1(t)} \cdot \|\varphi_1'(t)\| dt = \int_0^1 1-t dt = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

- parametrizace C_2 : Křivka splňuje rovnici $x^2 + (y-1)^2 = 1$, proto použijeme posunuté polární souřadnice.

$$\varphi_2: x = \cos t, \quad y = 1 + \sin t \quad \text{pro} \quad \frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{3\pi}{2}.$$

Tato parametrizace však probíhá křivku v opačném směru! To ale nevádí, protože integrál z funkce nezávisí na volbě orientace.

$$\varphi_2'(t): x'(t) = -\sin t, \quad y'(t) = \cos t \quad \text{a} \quad \|\varphi_2'(t)\| = \sqrt{(-\sin t)^2 + \cos^2 t} = 1.$$

Takže

$$\int_{C_2} (x+y) ds = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (x+y)|_{\varphi_2(t)} \cdot \|\varphi_2'(t)\| dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} 1 + \sin t + \cos t dt = \pi + 2.$$

- parametrizace C_3 : $\varphi_3(t) = (0, 2) + t(1, -2) = (t, 2-2t)$, $t \in \langle 0, 1 \rangle$

$$\varphi_3'(t) = (1, -2) \quad \text{a} \quad \|\varphi_3'(t)\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}.$$

Parametrizace má orientaci souhlasnou se zvolenou orientací. Takže

$$\int_{C_3} (x+y) ds = \int_0^1 (x+y)|_{\varphi_3(t)} \cdot \|\varphi_3'(t)\| dt = \int_0^1 (2-t)\sqrt{5} dt = \frac{3\sqrt{5}}{2}.$$

Celkem tedy máme

$$\int_C (x+y) ds = \sum_{i=1}^3 \int_{C_i} (x+y) ds = \pi + 3 + \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

12.5 (křivkový integrál z funkce)

Spočítejte $\int_C \sqrt{x^2 + y^2} ds$, kde C se skládá postupně z křivek

- C_1 : horní polovina kružnice o poloměru $\frac{1}{2}$ se středem v $(\frac{1}{2}, 0)$ jdoucí v kladném smyslu z bodu $(1, 0)$ do bodu $(0, 0)$;
- C_2 : úsečka jdoucí z bodu $(0, 0)$ do bodu $(-1, 2)$.

Řešení:

• parametrizace C_1 : Křivka splňuje rovnici $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = (\frac{1}{2})^2$, proto použijeme posunuté polární souřadnice.

$$\varphi_1: x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos t, \quad y = \frac{1}{2} \sin t \quad \text{pro } 0 \leq t \leq \pi.$$

$$\varphi_1'(t): x'(t) = -\frac{1}{2} \sin t, \quad y'(t) = \frac{1}{2} \cos t \quad \text{a} \quad \|\varphi_1'(t)\| = \sqrt{(-\frac{1}{2} \sin t)^2 + \frac{1}{4} \cos^2 t} = \frac{1}{2}.$$

Parametrizace má orientaci souhlasnou se zvolenou orientací. Takže

$$\begin{aligned} \int_{C_1} \sqrt{x^2 + y^2} ds &= \int_0^\pi \sqrt{x^2 + y^2}|_{\varphi_1(t)} \cdot \|\varphi_1'(t)\| dt = \int_0^\pi \frac{1}{2} \sqrt{(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos t)^2 + (\frac{1}{2} \sin t)^2} dt = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} \int_0^\pi \sqrt{1 + \cos t} dt = \left[\begin{matrix} 2u=t \\ 2du=dt \end{matrix} \right] = \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \cos(2u)} du = \\ &= \left\{ \cos(2u) = \cos^2 u - \sin^2 u \right\} = \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos u du = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

- parametrizace C_2 : $\varphi_2(t) = (0, 0) + t(-1, 2) = (-t, 2t), \quad t \in \langle 0, 1 \rangle$

$$\varphi_2'(t) = (-1, 2) \quad \text{a} \quad \|\varphi_2'(t)\| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}.$$

Parametrizace má orientaci souhlasnou se zvolenou orientací. Takže

$$\int_{C_2} \sqrt{x^2 + y^2} ds = \int_0^1 \sqrt{x^2 + y^2}|_{\varphi_2(t)} \cdot \|\varphi_2'(t)\| dt = \int_0^1 5t dt = \frac{5}{2}.$$

Celkem tedy máme

$$\int_C (x + y) ds = \sum_{i=1}^2 \int_{C_i} (x + y) ds = \frac{5 + \sqrt{2}}{2}$$

12.6 (křivkový integrál z funkce)

Vypočítejte křivkový integrál

$$\int_C xy ds,$$

kde

$$C : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \& \quad x, y \geq 0$$

s parametry $a \neq b$.

Řešení:

Křivka je jedna čtvrtina elipsy a proto zvolíme na parametrizaci upravené polární souřadnice

$$\varphi : \begin{aligned} \frac{x}{a} &= \cos t \\ \frac{y}{b} &= \sin t \end{aligned}$$

pro $t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$. Pak máme

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right) = (-a \sin t, b \cos t) \\ \|\varphi'(t)\| &= \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}. \end{aligned}$$

Takže

$$\begin{aligned} \int_C xy \, ds &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} ab \cos t \sin t \cdot \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} \, dt = \left[\begin{array}{l} u = a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t \\ du = 2(a^2 - b^2) \sin t \cos t \, dt \end{array} \right] = \\ &= \frac{ab}{2(a^2 - b^2)} \int_{b^2}^{a^2} \sqrt{u} \, du = \frac{ab}{3(a^2 - b^2)} \left[u^{\frac{3}{2}} \right]_{u=b^2}^{u=a^2} = \frac{ab(a^3 - b^3)}{3(a^2 - b^2)} = \frac{ab(a^2 + ab + b^2)}{3(a + b)}. \end{aligned}$$

Připomenutí: Integrál z vektorového pole \vec{F} podél dané orientované křivky C počítáme jako práci síly podél této křivky s normovaným tečným polem \vec{T} (jež určuje orientaci křivky C).

Jestliže parametrizace $\varphi : (a, b) \rightarrow C$ odpovídá zvolené parametrizaci, pak máme

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_C (\vec{F} \cdot \vec{T}) ds = \int_a^b \vec{F}(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \, dt.$$

Pokud parametrizace φ je v **opačném** směru než námi zvolená orientace C , pak máme

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = - \int_a^b \vec{F}(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \, dt.$$

12.7 (křivkový integrál z vektorového pole)

Určete

$$\int_C y \, dx - x \, dy$$

kde C je asteroida určená parametrizací

$$\varphi : x = a \cos^3 t \quad \& \quad y = a \sin^3 t \quad \& \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

s parametrem $a > 0$ a orientaci danou touto parametrizací. (Asteroida je křivka daná rovnicí $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$).

Řešení:

Rovnice asteroidy se podobá rovnici kružnice, až na jiné exponenty. Máme

$$\varphi'(t) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right) = \left(-3a \cos^2 t \cdot \sin t, 3a \sin^2 t \cdot \cos t \right)$$

a pole

$$\vec{F} = (y, -x).$$

Takže můžeme psát

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{s} &= \int_0^{2\pi} \vec{F}(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \int_0^{2\pi} (a \sin^3 t, -a \cos^3 t) \cdot \begin{pmatrix} -3a \cos^2 t \cdot \sin t \\ 3a \sin^2 t \cdot \cos t \end{pmatrix} dt = \\ &= -3a^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 t \sin^2 t (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = -\frac{3}{4}a^2 \int_0^{2\pi} \sin^2(2t) dt = -\frac{3}{4}\pi a^2. \end{aligned}$$

12.8 (křivkový integrál z vektorového pole)

Určete

$$\int_{\mathcal{C}} (2a - y) dx + x dy$$

pro oblouk cykloidy \mathcal{C} dané parametrizací

$$\varphi: x = a(t - \sin t) \quad \& \quad y = a(1 - \cos t) \quad \& \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

s parametrem $a > 0$ a orientaci danou touto parametrizací. (Cykloida je křivka určená dráhou bodu, který je na kružnici s poloměrem a , která se valí bez tření po přímce.).

Řešení:

Máme

$$\varphi'(t) = (a(1 - \cos t), a \sin t)$$

a pole

$$\vec{F} = (2a - y, x).$$

Takže můžeme psát

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{s} &= \int_0^{2\pi} \vec{F}(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \int_0^{2\pi} (a(1 + \cos t), a(t - \sin t)) \cdot \begin{pmatrix} a(1 - \cos t) \\ a \sin t \end{pmatrix} dt = \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} 1 - \cos^2 t + t \sin t - \sin^2 t dt = a^2 \int_0^{2\pi} t \sin t dt = a^2 \left[-t \cos t \right]_{t=0}^{t=2\pi} + a^2 \int_0^{2\pi} \cos t dt = -2\pi a^2. \end{aligned}$$

12.9 (křivkový integrál z vektorového pole)

Určete

$$\int_{\mathcal{C}} 2xy \, dx - x^2 \, dy$$

kde \mathcal{C} se skládá postupně z křivek

- \mathcal{C}_1 : úsečka jdoucí z bodu $(2, -1)$ do bodu $(0, 0)$;
- \mathcal{C}_2 : část paraboly o rovnici $x = 2y^2$ jdoucí z bodu $(0, 0)$ do bodu $(2, 1)$.

Řešení:

Máme pole $\vec{F} = (2xy, -x^2)$.

- parametrizace \mathcal{C}_1 : $\varphi_1(t) = (2, -1) + t(-2, 1) = (\underbrace{2-2t}_x, \underbrace{t-1}_y)$, $t \in \langle 0, 1 \rangle$

$$\varphi_1'(t) = (-2, 1).$$

Parametrizace má orientaci souhlasnou se zvolenou orientací. Takže

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}_1} \vec{F} \cdot d\vec{s} &= \int_0^1 (2xy, -x^2)|_{\varphi_1(t)} \cdot \varphi_1'(t) \, dt = \int_0^1 (-4(t-1)^2, -4(t-1)^2) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} dt = \\ &= 4 \int_0^1 (t-1)^2 \, dt = 4 \left[\frac{(t-1)^3}{3} \right]_0^1 = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

- parametrizace \mathcal{C}_2 : Křivku můžeme parametrizovat např. pomocí souřadnice y :

$$\varphi_2: x = 2t^2, \quad y = t \quad \text{pro } 0 \leq t \leq 1.$$

$$\varphi_2'(t): x'(t) = 4t, \quad y'(t) = 1.$$

Parametrizace má orientaci souhlasnou se zvolenou orientací. Takže

$$\int_{\mathcal{C}_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_0^1 (2xy, -x^2)|_{\varphi_2(t)} \cdot \varphi_2'(t) \, dt = \int_0^1 (4t^3, -4t^4) \cdot \begin{pmatrix} 4t \\ 1 \end{pmatrix} dt = 12 \int_0^1 t^4 \, dt = \frac{12}{5}$$

Celkem tedy máme

$$\int_{\mathcal{C}} (x+y) \, ds = \sum_{i=1}^2 \int_{\mathcal{C}_i} (x+y) \, ds = \frac{4}{3} + \frac{12}{5} = \frac{56}{15}$$

12.10 (křivkový integrál z vektorového pole)

Určete

$$\int_{\mathcal{C}} (y^2 + 1) \, dx + 2z \, dy + x^2 \, dz$$

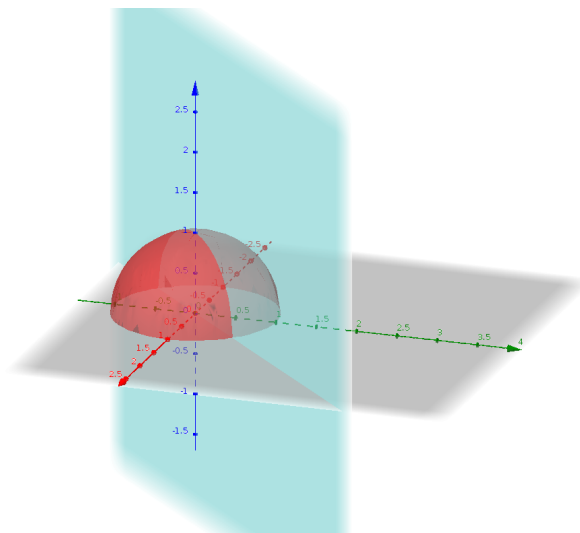
kde

$$\mathcal{C}: x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad \& \quad x = y \quad \& \quad z \geq 0$$

je křivka s orientací od bodu $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ do bodu $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$.

Řešení:

Máme pole $\vec{F} = (y^2 + 1, 2z, x^2)$. Křivka představuje průnik horní části sféry a roviny kolmé k základně. Je to tedy polovina kružnice.



Ukážeme si na ní, jak můžeme využívat známých transformací souřadnic pro nalezení parametrizaci křivek.

Vzhledem k rovnicím určujícím naši křivku \mathcal{C} můžeme dobře využít sférické souřadnice

$$\begin{aligned}x &= r \sin \vartheta \cos \varphi \\y &= r \sin \vartheta \sin \varphi \\z &= r \cos \vartheta\end{aligned}$$

Po dosazení do vztahu pro \mathcal{C} dostaneme

$$r^2 = 1 \quad \& \quad r \sin \vartheta (\cos \varphi - \sin \varphi) = 0 \quad \& \quad r \cos \vartheta \geq 0$$

Vzhledem ke geometrickému náhledu a těmto rovnicím si vezmeme tuto volbu pro jednotlivé parametry:

$$r = 1 \quad \& \quad \varphi = \frac{\pi}{4} \quad \& \quad -\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$$

Může se zdát zvláštní brát si úhel ϑ i pro záporné hodnoty, ale vzhledem k tomu, že se měří od kladné části osy z a úhel φ máme teď pevně zvolený, to je v pořádku. Dostáváme tak parametrizaci:

$$\mathcal{C}: \quad x(\vartheta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \vartheta, \quad y(\vartheta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \vartheta, \quad z(\vartheta) = \cos \vartheta \quad \text{pro} \quad \vartheta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

kteřou bychom mohli koneckonců snadno dostat i z geometrického náhledu nebo při dosazení $x = y$ do rovnice $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (tj. zparametrizováním elipsy $2y^2 + z^2 = 1$). Tato parametrizace odpovídá i zvolené orientaci \mathcal{C} .

Pro výpočet opět můžeme využít formu, ve které byl integrál zadán:

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} (y^2 + 1) dx + 2z dy + x^2 dz &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left((y^2(\vartheta) + 1) \cdot \frac{dx}{d\vartheta} + 2z(\vartheta) \cdot \frac{dy}{d\vartheta} + x^2(\vartheta) \cdot \frac{dz}{d\vartheta} \right) d\vartheta = \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\left(\frac{1}{2} \sin^2 \vartheta + 1 \right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \vartheta + 2 \cos \vartheta \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \vartheta - \frac{1}{2} \sin^2 \vartheta \cdot \sin \vartheta \right) d\vartheta =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\frac{1}{2} \sin^2 \vartheta + 1) \cos \vartheta \, d\vartheta + \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\cos^2 \vartheta}_{\frac{1+\cos(2\vartheta)}{2}} \, d\vartheta - \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sin^3 \vartheta}_{\text{lichá funkce}} \, d\vartheta = \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\frac{1}{6} \sin^3 \vartheta + \sin \vartheta \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \sqrt{2} \cdot \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{7\sqrt{2}}{6} + \frac{\pi\sqrt{2}}{2}.
\end{aligned}$$

12.11 (křivkový integrál z vektorového pole)

Určete

$$\int_C y \, dx + z \, dy + x \, dz$$

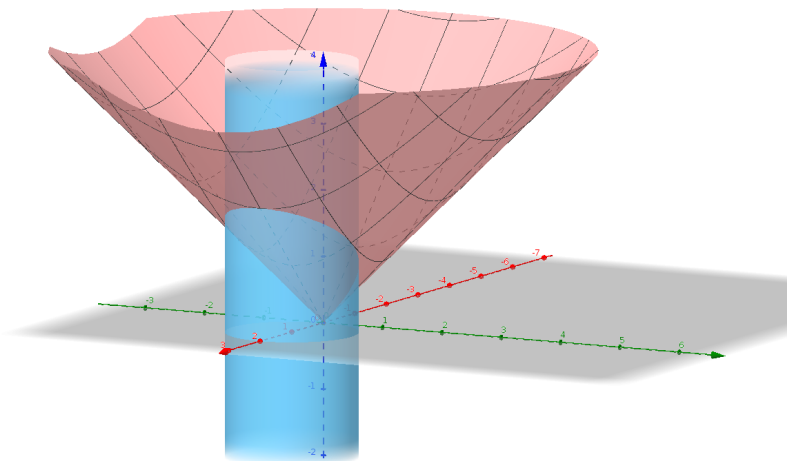
kde

$$C: x^2 + y^2 = z^2 \quad \& \quad x^2 + y^2 = 2x \quad \& \quad z \geq 0$$

je křivka s orientací v kladném smyslu při pohledu shora.

Řešení:

Máme pole $\vec{F} = (y, z, x)$. Rovnice $x^2 + y^2 = 2x$ je to samé jako $(x-1)^2 + y^2 = 1$ (což je válec). Křivka představuje tedy průnik kuželu s válcem jehož poloměr je 1 a osa kužele leží v plášti válce.



Parametrizaci uděláme pomocí obvyklých válcových souřadnic:

$$\begin{aligned}
x &= r \cos \varphi \\
y &= r \sin \varphi \\
z &= h
\end{aligned}$$

Po dosazení do podmínek dostaneme

$$r^2 = h^2 \quad \& \quad r^2 = 2r \cos \varphi \quad \& \quad h \geq 0$$

které splníme (pro všechny možnosti) při volbě $r = 2 \cos \varphi$, $h = r = 2 \cos \varphi$ a $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ (pro lepší pochopení si křivku načrtněte). Tím dostaneme parametrizaci:

$$C: x(\varphi) = 2 \cos^2 \varphi, \quad y(\varphi) = 2 \cos \varphi \sin \varphi, \quad z(\varphi) = 2 \cos \varphi \quad \text{pro} \quad \varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

kteřá má požadovanou orientaci.

Opět můžeme využít formu, ve které byl integrál zadán:

$$\begin{aligned} \int_C y \, dx + z \, dy + x \, dz &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(y(\varphi) \cdot \frac{dx}{d\varphi} + z(\varphi) \cdot \frac{dy}{d\varphi} + x(\varphi) \cdot \frac{dz}{d\varphi} \right) d\varphi = \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(-2 \cdot \underbrace{4 \sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi}_{=\sin^2(2\varphi) = \frac{1-\cos(4\varphi)}{2}} + 4 \cos \varphi \cdot \underbrace{(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)}_{=1-2\sin^2 \varphi} - \underbrace{4 \cos^2 \varphi \cdot \sin \varphi}_{\text{lichá funkce}} \right) d\varphi = \\ &= -2 \left[\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{8} \sin(4\varphi) \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + 4 \left[\sin \varphi - \frac{2}{3} \sin^3 \varphi \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + 0 = \frac{8}{3} - \pi . \end{aligned}$$

Jiná parametrizace pomocí posunutých vřlcovřch souřadnic:

$$\begin{aligned} x &= 1 + r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \\ z &= h \end{aligned}$$

Po dosazení do podmínek dostaneme

$$|h| = \sqrt{2r} \sqrt{1 + \cos \varphi} \quad \& \quad r^2 = 1 \quad \& \quad h \geq 0$$

kteřé splníme (pro všechny možnosti) při volbě $r = 1$, $h = \sqrt{2} \sqrt{1 + \cos \varphi} = 2 |\cos \frac{\varphi}{2}|$ a $-\pi \leq \varphi \leq \pi$. Tím dostaneme parametrizaci:

$$C : \quad x(\varphi) = 1 + \cos \varphi, \quad y(\varphi) = \sin \varphi, \quad z(\varphi) = 2 \cos \frac{\varphi}{2} \quad \text{pro} \quad \varphi \in \langle -\pi, \pi \rangle$$

kteřá má požadovanou orientaci.

Nyní máme:

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \, d\vec{s} &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(y(\varphi), z(\varphi), x(\varphi) \right) \cdot \begin{pmatrix} x'(\varphi) \\ y'(\varphi) \\ z'(\varphi) \end{pmatrix} d\varphi = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sin \varphi, 2 \cos \frac{\varphi}{2}, 1 + \cos \varphi \right) \cdot \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ -\sin \frac{\varphi}{2} \end{pmatrix} d\varphi = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} -\sin^2 \varphi + \underbrace{2 \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \varphi}_{\cos(\frac{\varphi}{2} + \varphi) + \cos(\frac{\varphi}{2} - \varphi)} - \sin \frac{\varphi}{2} - \underbrace{\cos \varphi \cdot \sin \frac{\varphi}{2}}_{\frac{1}{2} \sin(\varphi + \frac{\varphi}{2}) - \frac{1}{2} \sin(\varphi - \frac{\varphi}{2})} d\varphi = \\ &= -\pi + \left[\frac{2}{3} \sin(\frac{3}{2}\varphi) + 2 \sin(\frac{\varphi}{2}) + 2 \cos(\frac{\varphi}{2}) + \frac{1}{3} \cos(\frac{3}{2}\varphi) - \cos(\frac{\varphi}{2}) \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{8}{3} - \pi . \end{aligned}$$

Poznámka: Použili jsme vzorce

$$\begin{aligned} \cos(x + y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ \cos(x - y) &= \cos x \cos y + \sin x \sin y \end{aligned}$$

a tedy

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} \left(\cos(x + y) + \cos(x - y) \right)$$

a

$$\begin{aligned} \sin(x + y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y \\ \sin(x - y) &= \sin x \cos y - \cos x \sin y \end{aligned}$$

a tedy

$$\cos x \sin y = \frac{1}{2} \left(\sin(x + y) - \sin(x - y) \right) .$$

Definice konzervativního pole: Spojité vektorové pole \vec{F} na otevřené množině $U \subseteq \mathbb{R}^n$ nazýváme *konzervativní*, pokud práce síly z bodu A do bodu B (v případě že dané body lze propojit alespoň jednou křivkou ležící v U) nezávisí na způsobu, jakým oba body propojíme (na bodech A a B ale záviset může). V tom případě pro tuto práci volíme značení $\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s}$.

Věta (o potenciálu): Následující podmínky jsou ekvivalentní pro spojité vektorové pole \vec{F} na otevřené množině $U \subseteq \mathbb{R}^n$:

- pole \vec{F} je konzervativní na U ,
- práce pole \vec{F} podél jakékoliv uzavřené křivky $C \subseteq U$ je nulová,
- existuje funkce (tzv. *potenciál*) $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, že $\text{grad}(f) = \vec{F}$.

Pak platí, že

$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_A^B \text{grad}(f) \cdot d\vec{s} = f(B) - f(A).$$

Definujeme si tzv. rotaci pole jako

$$\text{rot}(\vec{F}) = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, -\frac{\partial F_3}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial z}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

kde $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ je formálně definovaný vektor složený z operátorů parciálních derivací.

Věta: Pro spojitě diferencovatelné vektorové pole \vec{F} na otevřené množině $U \subseteq \mathbb{R}^3$ (tj. v dimenzi 3) platí:

- \vec{F} je konzervativní $\Rightarrow \text{rot}(\vec{F}) = \vec{0}$
(podmínka $\text{rot}(\vec{F}) = \vec{0}$ vlastně znamená záměnnost druhých parciálních derivací potenciálu f)
- Jestliže množina U je *jednoduše souvislá* a $\text{rot}(\vec{F}) = \vec{0}$ (všude na U), pak \vec{F} je konzervativní.

Definice jednoduše souvislé množiny: Množina $U \subseteq \mathbb{R}^n$ se nazývá jednoduše souvislá, jestliže se jakákoliv uzavřená křivka v U dá v rámci U spojitě stáhnout do bodu.

Příkladem jednoduše souvislé množiny je \mathbb{R}^n nebo $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

Příkladem otevřené množiny, která není jednoduše souvislá je $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $\mathbb{R}^3 \setminus \{\text{přímka}\}$ nebo torus (tj. “pneumatika”).

Poznámka: Nulová rotace je obecně opravdu jen nutnou podmínkou pro existenci potenciálu, jak ukazuje příklad vektorového pole

$$\vec{F} = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right)$$

na množině $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \neq 0\}$, která není jednoduše souvislá.

Máme

$$\text{rot}(\vec{F}) = \left(0, 0, -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \right) = \vec{0}$$

ale práce síly \vec{F} podél kružnice $\Gamma : \varphi(\alpha) = (\cos \alpha, \sin \alpha, 0)$, $\alpha \in (0, 2\pi)$ je nenulová:

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} (-\sin \alpha, \cos \alpha, 0) \cdot \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix} d\alpha = \int_0^{2\pi} 1 d\alpha = 2\pi.$$

Pole tedy nemá potenciál na celém U . Na druhé straně, na určitých podmnožinách U lze potenciál pole \vec{F} nalézt, např.

$$f_1(x, y, z) = \arctg\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{na} \quad U_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \neq 0\}$$

nebo

$$f_2(x, y, z) = \text{arccotg}\left(\frac{x}{y}\right) \quad \text{na} \quad U_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y \neq 0\}.$$

12.12 (konzervativní pole, potenciál)

Dokažte, že následující pole jsou konzervativní, najděte jejich potenciál a hodnotu práce síly z bodu A do B .

(i) $\vec{F}(x, y, z) = (x^2 + y, y^2 + x, ze^z)$, $A = (0, 1, 0)$, $B = (-1, 1, 0)$.

(ii) $\vec{F}(x, y, z) = \left(3x^2 + \frac{y}{(x+z)^2}, -\frac{1}{x+z}, \frac{y}{(x+z)^2} \right)$, $A = (1, 1, 2)$, $B = (1, 0, 0)$.

Řešení:

(i) Po dosazení máme

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) = (0 - 0, \quad 0 - 0, \quad 1 - 1) = \vec{0},$$

tedy rotace je nulová na celém \mathbb{R}^3 a pole \vec{F} má potenciál. Počítání rotace pole nám tedy sice rozhodne o existenci potenciálu, ale neurčí jeho tvar. Ten musíme zjistit dalším výpočtem, jehož postup v sobě také zahrnuje (případně) zjištění neexistence potenciálu (viz dále). Pokud nás tedy zajímá pouze (ne)existence potenciálu, je jednodušší a rychlejší spočítat rotaci a pokud chceme přímo potenciál najít, použijeme následující postup a v tom případě je počítání rotace zbytečné.

Potenciál je funkce $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ taková, že

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x^2 + y \tag{1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = y^2 + x \tag{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = ze^z. \tag{3}$$

Z první rovnice dostaneme

$$f(x, y, z) = \int (x^2 + y) dx = \frac{x^3}{3} + xy + C(y, z),$$

kde $C : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ je neznámá funkce závislá nyní pouze na y a z . Nalezený tvar funkce f teď dosadíme do druhé rovnice

$$y^2 + x = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x^3}{3} + xy + C(y, z) \right) = x + \frac{\partial C}{\partial y}$$

tedy

$$\frac{\partial C}{\partial y} = y^2.$$

Dostáváme $C(y, z) = \int y^2 dy = \frac{y^3}{3} + D(z)$, kde $D : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je opět neznámá funkce závislá pouze na z . Zatím tedy máme

$$f(x, y, z) = \frac{x^3}{3} + xy + \frac{y^3}{3} + D(z)$$

a dosazením do poslední rovnice máme

$$ze^z = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{x^3}{3} + xy + \frac{y^3}{3} + D(z) \right) = \frac{\partial D}{\partial z}.$$

Takže $D(z) = \int ze^z dz = (z - 1)e^z + K$, kde $K \in \mathbb{R}$ je konstanta. Celkově tak máme potenciál

$$f(x, y, z) = \frac{x^3}{3} + xy + \frac{y^3}{3} + (z - 1)e^z + K.$$

A jak nám tento postup rozhodne o případné neexistenci potenciálu? Pokud po dosazení průběžného tvaru potenciálu do další rovnice zjistíme, že tato nová rovnice nemá řešení, pak potenciál nemůže existovat. Jak by k něčemu takovému mohlo dojít? Předpokládejme např., že druhá složka pole je trochu jiná, dejme tomu, že je tvaru $F_2 = y^2 - x$. Z první rovnice $\frac{\partial f}{\partial x} = F_1 = x^2 + y$ opět dostaneme, že potenciál musí být tvaru $f(x, y, z) = \frac{x^3}{3} + xy + C(y, z)$ a když ho nyní dosadíme do druhé rovnice $\frac{\partial f}{\partial y} = F_2 = y^2 - x$ (se změněnou složkou F_2) tak dostaneme, že

$$y^2 - x = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x^3}{3} + xy + C(y, z) \right) = x + \frac{\partial C}{\partial y}$$

tedy

$$\frac{\partial C}{\partial y}(y, z) = y^2 - 2x.$$

Nalevo je funkce závislá pouze na y a z , ale už ne na x , zatímco napravo je funkce závislá také na x . Takovouto rovnici nelze splnit, tedy potenciál v tomto případě neexistuje (bez ohledu na to, jaká je třetí složka F_3 našeho pole).

Práce pole pak je

$$\int_A^B \vec{F} \, d\vec{s} = f(B) - f(A) = f(-1, 1, 0) - f(0, 1, 0) = -2 - \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{4}{3}.$$

(ii) Zde je podstatné podívat se na definiční obor:

$$D(\vec{F}) : x + z \neq 0$$

Znamená to, že po vyjmutí roviny z \mathbb{R}^3 vzniknou dva poloprostory, které navzájem nejdou propojit křivkou.

Jen pro procvičení si spočítáme rotaci, která nám ale pro nalezení potenciálu nepomůže. Podobně jako v předchozím příkladu máme

$$\text{rot}(\vec{F}) = \left(\frac{1}{(x+z)^2} - \frac{1}{(x+z)^2}, \frac{2y}{(x+z)^3} - \frac{2y}{(x+z)^3}, \frac{1}{(x+z)^2} - \frac{1}{(x+z)^2} \right) = \vec{0}.$$

Rotace je opět nulová na celém \mathbb{R}^3 a pole \vec{F} má potenciál.

Pro potenciál f máme

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + \frac{y}{(x+z)^2} \tag{4}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{x+z} \tag{5}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{y}{(x+z)^2} \tag{6}$$

Začneme třeba druhou rovnicí:

$$f(x, y, z) = \int -\frac{1}{x+z} \, dy = -\frac{y}{x+z} + C(x, z),$$

kde $C : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ je neznámá funkce závislá nyní pouze na x a z . Nalezený tvar funkce f teď dosadíme do třetí rovnice

$$-\frac{y}{(x+z)^2} = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{y}{x+z} + C(x, z) \right) = -\frac{y}{(x+z)^2} + \frac{\partial C}{\partial z}$$

tedy

$$\frac{\partial C}{\partial z} = 0.$$

Dostáváme $C(x, z) = D(x)$, kde $D : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je opět neznámá funkce závislá pouze na x . Dostáváme tedy zatím

$$f(x, y, z) = -\frac{y}{x+z} + D(x)$$

a dosazením do poslední rovnice máme

$$3x^2 + \frac{y}{(x+z)^2} = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{y}{x+z} + D(x) \right) = \frac{y}{(x+z)^2} + \frac{\partial D}{\partial x}.$$

Takže $D(x) = \int 3x^2 dx = x^3 + K$, kde $K \in \mathbb{R}$ je konstanta. Celkově tak máme potenciál

$$f(x, y, z) = -\frac{y}{x+z} + x^3 + K.$$

Teď určíme práci pole: Nejdříve zkontrolujeme, jestli body $A = (1, 1, 2)$ a $B = (1, 0, 0)$ vůbec lze propojit křivkou, tj. jestli leží ve stejném poloprostoru. Ty jsou určeny pomocí hodnoty $x+z$, tedy jako

$$P_+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+z > 0\}$$

$$P_- = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+z < 0\}$$

Zřejmě máme $A, B \in P_+$ a proto má smysl ptát se na práci pole z A do B :

$$\int_A^B \vec{F} d\vec{s} = f(B) - f(A) = f(1, 0, 0) - f(1, 1, 2) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$