13. cvičení z Matematické analýzy 2

14. - 18. prosince 2020

13.1 (křivkový integrál z vektorového pole)

Určete

$$\int\limits_{\mathcal{C}} y\ dx + z\ dy + x\ dz$$

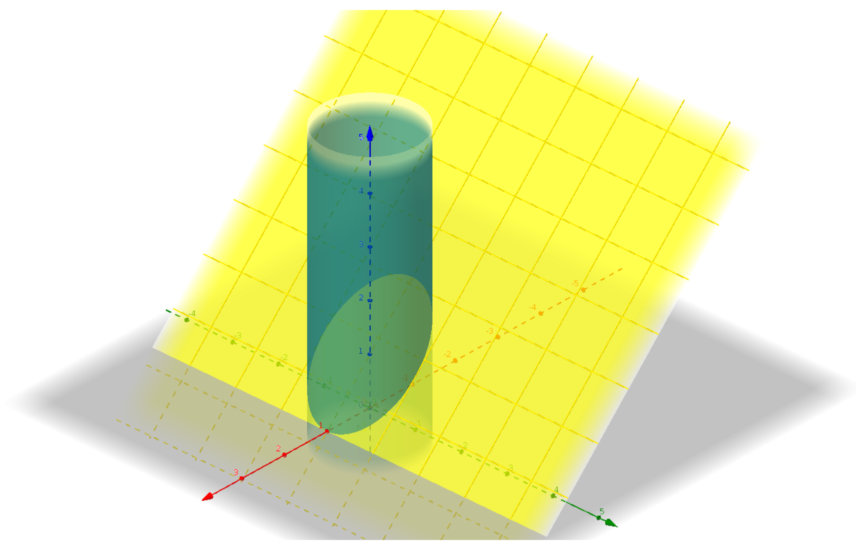
kde

$$\mathcal{C}: \quad x^2 + y^2 = 1 \quad \& \quad x + z = 1$$

je křivka s kladnou orientací při pohledu shora.

Řešení:

Máme pole $\vec{F} = (y,\ z,\ x)$. Křivka představuje průnik válce a šikmé roviny. Je to tedy elipsa a její orientace je určena pomocí průmětu $\mathcal{C}$ do roviny xy, v němž má mít tento průmět kladnou orientaci (tím je myšleno to "při pohledu shora", tj. když se na křivku budeme dívat tak, aby osa z směřovala k nám).



Průmět $\mathcal{C}$ do roviny xy má rovnici $x^2 + y^2 = 1$ a jeho kladná orientace je určena obvyklou parametrizaci

$$x(t) = \cos t\ , \quad y(t) = \sin t \quad \text{pro} \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle\ .$$

Tím je určena i poslední složka, tj.

$$z(t) = 1 - x(t) = 1 - \cos t\ .$$

Pro parametrizaci jsme zde vlastně využili válcové souřadnice, které po dosazení do rovnosti určujících $\mathcal{C}$ poskytnou vztahy mezi jednotlivými parametry (výsledkem musí být jen jeden volný parametr, protože křivka je jednodimenzionální objekt).

Pro výpočet můžeme využít také formu, ve které je integrál zadán:

$$\int\limits_{\mathcal{C}} y\ dx + z\ dy + x\ dz = \int\limits_0^{2\pi} \left(y(t) \cdot \frac{dx}{dt} + z(t) \cdot \frac{dy}{dt} + x(t) \cdot \frac{dz}{dt} \right)\ dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \Big(\sin t \cdot (-\sin t) + (1 - \cos t) \cdot \cos t + \cos t \cdot \sin t \Big)\ dt = \int_0^{2\pi} (-1 + \cos t + \cos t \cdot \sin t)\ dt =$$

$$= -2\pi + \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos t\ dt}_{=0} + \underbrace{\int_0^{2\pi} \frac{\sin(2t)}{2}\ dt}_{=0} = -2\pi\ .$$

13.2 (křivkový integrál z vektorového pole)

Určete

$$\int_{\mathcal{C}} y^2\ dx + z^2\ dy + x^2\ dz$$

kde

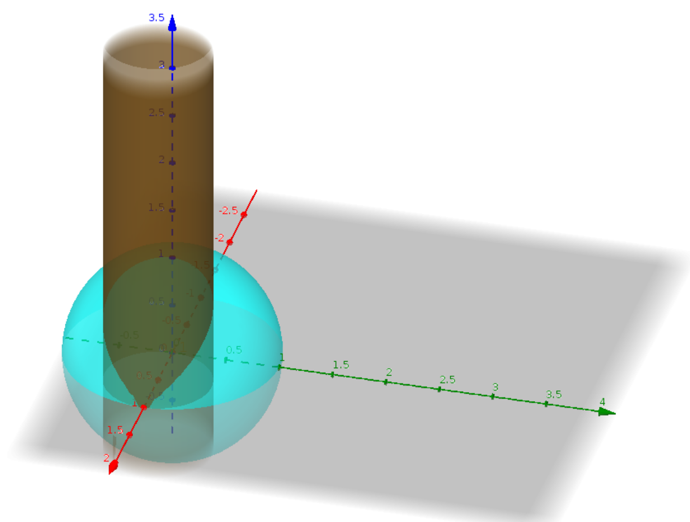
$$\mathcal{C}: \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad \& \quad x^2 + y^2 = x \quad \& \quad z \geq 0$$

je tzv. *Vivianiho* křivka (přesněji, jedna její část) s orientací v kladném smyslu při pohledu shora.

Řešení:

Máme pole $\vec{F} = (y^2,\ z^2,\ x^2)$. Rovnice $x^2 + y^2 = x$ je to samé jako $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = (\frac{1}{2})^2$ (což je válec).

Křivka představuje tedy průnik horní části sféry (o poloměru 1) s válcem jehož poloměr je $\frac{1}{2}$ a osa sféry leží v plášti válce.



Parametrizací můžeme udělat vícero způsoby:

- pomocí obvyklých válcových souřadnic:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \\ z &= h \end{aligned}$$

Po dosazení do podmínek dostaneme

$$r^2 + h^2 = 1 \quad \& \quad r^2 = r\cos\varphi \quad \& \quad h \geq 0$$

které splníme (pro všechny možnosti) při volbě $r = \cos\varphi$, $h = |\sin\varphi|$ a $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ (pro lepší pochopení si křivku načrtněte). Tím dostaneme parametrizaci:

$$\mathcal{C}: \quad x(\varphi) = \cos^2\varphi\ , \quad y(\varphi) = \cos\varphi\sin\varphi\ , \quad z(\varphi) = |\sin\varphi| \quad \text{pro} \quad \varphi \in \langle -\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2} \rangle$$

která má požadovanou orientaci.

- pomocí posunutých válcových souřadnic (do osy výše zmíněného válce):

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{2} + r\cos\alpha \\ y &= r\sin\alpha \\ z &= h \end{aligned}$$

Po dosazení do podmínek dostaneme

$$\frac{1}{4} + r\cos\alpha + r^2 + h^2 = 1 \quad \& \quad r^2 = (\tfrac{1}{2})^2 \quad \& \quad h \geq 0$$

které splníme (pro všechny možnosti) při volbě $r = \frac{1}{2}$, $h = \sqrt{\frac{1-\cos(2\cdot\frac{\alpha}{2})}{2}} = \sqrt{\sin^2(\frac{\alpha}{2})} = \sin(\frac{\alpha}{2})$ a $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ (pro lepší pochopení si křivku načrtněte). Tím dostaneme parametrizaci:

$$\mathcal{C}: \quad x(\alpha) = \tfrac{1}{2}(1+\cos\alpha)\ , \quad y(\alpha) = \tfrac{1}{2}\sin\alpha\ , \quad z(\alpha) = \sin(\tfrac{\alpha}{2}) \quad \text{pro} \quad \alpha \in \langle 0, 2\pi \rangle$$

která má požadovanou orientaci.

Pro výpočet zvolíme třeba tu druhou parametrizaci. Máme pak

$$x'(\alpha) = -\tfrac{1}{2}\sin\alpha\ , \quad y'(\alpha) = \tfrac{1}{2}\cos\alpha\ , \quad z'(\alpha) = \tfrac{1}{2}\cos(\tfrac{\alpha}{2})\ .$$

Opět můžeme využít formu, ve které byl integrál zadán:

$$\int_{\mathcal{C}} y^2\ dx + z^2\ dy + x^2\ dz = \int_0^{2\pi} \Big(y^2(\alpha)\cdot\frac{dx}{d\alpha} + z^2(\alpha)\cdot\frac{dy}{d\alpha} + x^2(\alpha)\cdot\frac{dz}{d\alpha} \Big)\ d\alpha =$$

$$= \int_0^{2\pi} \Big(-\tfrac{1}{8}\underbrace{\sin^2\alpha\cdot\sin\alpha}_{2\pi-\text{periodická}} + \tfrac{1}{2}\underbrace{\sin^2(\tfrac{\alpha}{2})}_{\frac{1-\cos\varphi}{2}}\cdot\cos\alpha + \tfrac{1}{2}\Big(\underbrace{\tfrac{1+\cos\alpha}{2}}_{\cos^2(\frac{\alpha}{2})}\Big)^2\cdot\cos(\tfrac{\alpha}{2})\Big)\ d\alpha =$$

$$= -\tfrac{1}{8}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\sin^3\alpha}_{\text{lichá}}\ d\alpha + \tfrac{1}{4}\int_0^{2\pi} \cos\alpha - \cos^2\alpha\ d\alpha + \underbrace{\tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos^5(\tfrac{\alpha}{2})\ d\alpha}_{\text{viz níže}} =$$

$$= 0 + 0 - \frac{\pi}{4} + 0 = -\frac{\pi}{4}\ .$$

Kde pro $n = 0, 1, \dots$ máme

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n+1}(\tfrac{\alpha}{2})\, d\alpha = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{2} - t \\ \frac{d\alpha}{2} = -dt \end{array} \right\} = -2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \big(\underbrace{\cos(\tfrac{\pi}{2} - t)}_{\sin t}\big)^{2n+1}\, d\alpha = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sin^{2n+1} t}_{\text{lichá}}\, d\alpha = 0$$

Tedy pro lichou mocninu je integrál nulový (což je vidět i z příslušného grafu funkce).

13.3 (konzervativní pole, potenciál)

Dokažte, že následující pole jsou konzervativní, najděte jejich potenciál a hodnotu práce síly z bodu A do B.

(i) $\vec{F}(x, y, z) = (y + z,\ \ x + z,\ \ x + y)$, $A = (0, 0, 0)$, $B = (1, 1, 1)$.

(ii) $\vec{F}(x, y, z) = \left(\frac{1}{z},\ \ -\frac{3}{z},\ \ \frac{3y-x}{z^2}\right)$, $A = (1, 0, 1)$, $B = (-1, 1, 2)$.

Řešení:

(i) Pokud se nám podaří najít potenciál, nepotřebujeme počítat rotaci.

Pro potenciál f máme

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y + z \tag{1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x + z \tag{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = x + y \quad . \tag{3}$$

Z první rovnice máme:

$$f(x, y, z) = \int y + z\ dx = xy + xz + C(y, z),$$

kde $C : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je neznámá funkce závislá nyní pouze na y a z. Nalezený tvar funkce f teď dosadíme do druhé rovnice

$$x + z = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\Big(xy + xz + C(y, z)\Big) = x + \frac{\partial C}{\partial y}$$

tedy

$$\frac{\partial C}{\partial y} = z.$$

Dostáváme $C(y, z) = \int z\ dy = yz + D(z)$, kde $D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je opět neznámá funkce závislá pouze na z. Dostáváme tedy zatím

$$f(x, y, z) = xy + xz + yz + D(z)$$

a dosazením do poslední rovnice máme

$$x + y = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\Big(xy + xz + yz + D(z)\Big) = x + y + \frac{\partial D}{\partial z}.$$

Takže $\frac{\partial D}{\partial z} = 0$, a tudíž $D(z) = K$, kde $K \in \mathbb{R}$ je konstanta. Celkově tak máme potenciál

$$f(x, y, z) = xy + xz + yz + K.$$

Práce pole pak je

$$\int_A^B \vec{F}\ d\vec{s} = f(B) - f(A) = f(1,1,1) - f(0,0,0) = 3 - 0 = 3\ .$$

- -

(ii) Zde je podstatné podívat se na definiční obor:

$$D(\vec{F}): \quad z \neq 0$$

Znamená to, že po vyjmutí roviny z $\mathbb{R}^3$ vzniknou dva poloprostory, které navzájem nejdou propojit křivkou.

Pokud se nám podaří najít potenciál, nepotřebujeme počítat rotaci.

Pro potenciál f musí platit

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{z} \tag{4}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{3}{z} \tag{5}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{3y - x}{z^2}\quad . \tag{6}$$

Začneme třeba první rovnici:

$$f(x,y,z) = \int \frac{1}{z}\ dx = \frac{x}{z} + C(y,z),$$

kde $C : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je neznámá funkce závislá nyní pouze na y a z. Nalezený tvar funkce f teď dosadíme do druhé rovnice

$$-\frac{3}{z} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{z} + C(y,z)\right) = \frac{\partial C}{\partial y}$$

tedy

$$\frac{\partial C}{\partial y} = -\frac{3}{z}.$$

Dostáváme $C(y,z) = \int -\frac{3}{z}\ dy = -\frac{3y}{z} + D(z)$, kde $D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je opět neznámá funkce závislá pouze na z. Dostáváme tedy zatím

$$f(x,y,z) = \frac{x - 3y}{z} + D(z)$$

a dosazením do poslední rovnice máme

$$\frac{3y - x}{z^2} = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x - 3y}{z} + D(z)\right) = -\frac{x - 3y}{z^2} + \frac{\partial D}{\partial z}.$$

Takže $\frac{\partial D}{\partial z} = 0$ a tedy $D(z) = K$, kde $K \in \mathbb{R}$ je konstanta. Celkově tak máme potenciál

$$f(x,y,z) = \frac{x - 3y}{z} + K.$$

Teď určíme práci pole: Nejdříve zkontrolujeme, jestli body $A = (-1,1,2)$ a $B = (1,0,1)$ vůbec lze propojit křivkou, tj. jestli leží ve stejném poloprostoru. Ty jsou určeny pomocí hodnoty z, tedy jako

$$P_+ = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0\}$$
$$P_- = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z < 0\}$$

Zřejmě máme $A, B \in P_+$ a proto má smysl ptát se na práci pole z A do B:

$$\int_A^B \vec{F}\, d\vec{s} = f(B) - f(A) = f(-1,1,2) - f(1,0,1) = 2 - 1 = 1\ .$$

Připomenutí: Integrál z funkce $f : M \to \mathbb{R}$ je určený jako

$$\iint_M f\ dS = \iint_U f(\Phi(u,v)) \cdot \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\|\ dS\ ,$$

kde $\Phi : U \to M$ je vhodná parametrizace.

13.4 (plošný integrál z funkce)
Spočítejte

(i)
$$\iint_M z\ dS,$$
kde M je částí válce $x^2 + y^2 = 2$ vymezená rovinou $z = 0$ a plochou $z = x^2 + (y-1)^2$.

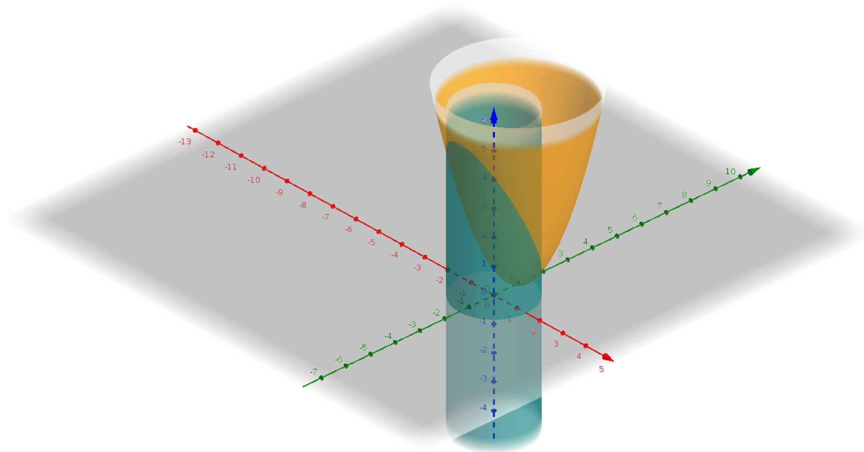
(ii)
$$\iint_M yz\ dS,$$
kde M je povrch popsaný parametricky rovnicemi $x = uv$, $y = u + v$, $z = u - v$ a $u^2 + v^2 \leq 1$.

(iii)
$$\iint_M x^2 z + y^2 z\ dS,$$
kde M je povrch polokoule $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \geq 0$.

(iv)
$$\iint_M z^2\ dS,$$
kde M je část povrchu koule $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x, y, z \geq 0$.

Řešení:
(i) Plocha je určena jako

$$M: \quad x^2 + y^2 = 1 \quad \& \quad 0 \leq z \leq x^2 + (y-1)^2.$$



Její parametrizaci vytvoříme pomocí cylindrických souřadnic

$$
\begin{aligned}
x &= r\cos\varphi \\
y &= r\sin\varphi \\
z &= h
\end{aligned}
$$

kde po dosazení z první podmínky dostaneme $r^2 = 2$ a po dosazeni $r = \sqrt{2}$ z druhé podmínky pak

$$0 \leq h \leq (\sqrt{2}\cos\varphi)^2 + (\sqrt{2}\sin\varphi - 1)^2 = 3 - 2\sqrt{2}\sin\varphi$$

Tím dostaneme předpis

$$\Phi(\varphi, h) = (\sqrt{2}\cos\varphi, \sqrt{2}\sin\varphi, h)$$

s definičním oborem

$$U: \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad \& \quad 0 \leq h \leq 3 - 2\sqrt{2}\sin\varphi.$$

Dále je

$$
\begin{aligned}
\tfrac{\partial\Phi}{\partial\varphi} &= (-\sqrt{2}\sin\varphi, \quad \sqrt{2}\cos\varphi, \quad 0) \\
\tfrac{\partial\Phi}{\partial h} &= (\qquad 0, \qquad 0, \quad 1) \\
\tfrac{\partial\Phi}{\partial\varphi} \times \tfrac{\partial\Phi}{\partial h} &= (\ \sqrt{2}\cos\varphi, \quad \sqrt{2}\sin\varphi, \quad 0)
\end{aligned}
$$

$$\left\| \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} \times \frac{\partial\Phi}{\partial h} \right\| = \sqrt{2}.$$

Takže pro funkci $f(x, y, z) = z$ máme

$$\iint_M f\ dS = \iint_U z\ dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{3-2\sqrt{2}\sin\varphi} h \cdot \sqrt{2}\ dh\ d\varphi = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \frac{(3 - 2\sqrt{2}\sin\varphi)^2}{2}\ d\varphi =$$

$$= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{9}{2} - 6\sqrt{2}\sin\varphi + 4\sin^2\varphi \right)\ d\varphi = \sqrt{2}(9\pi + 0 + 4\pi) = 13\sqrt{2}\pi.$$

- -

(ii) Plochu máme nyní definovanou jako $M = \Phi(U)$, kde

$$U: \quad u^2 + v^2 \le 1$$

a $\Phi : U \to \mathbb{R}^3$,

$$\Phi(u, v) = (uv, u + v, u - v).$$

Ověříme ještě, že Φ je skutečně parametrizace plochy M (tj. Φ je prosté a hodnost derivace Φ' je 2).

Prostota Φ plyne z toho, ze druhá a třetí souřadnice tohoto zobrazení (tj. $y = u + v$ a $z = u - v$) tvoří regulární lineární zobrazení (které je prosté). Hodnost derivace ověříme jako v předchozím případě pomocí vektorového součinu:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} = (v, 1, 1)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial v} = (u, 1, -1)$$

a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} = (-2, v + u, v - u) \qquad \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\| = \sqrt{2(u^2 + v^2) + 4} \ne 0.$$

Pro integrál pak máme

$$\iint_M yz \, dS = \iint_U (u^2 - v^2)\sqrt{2(u^2 + v^2) + 4} \, dS = \left[\begin{smallmatrix} u = r\cos\varphi \\ v = r \sin\varphi \\ (r,\varphi) \in \langle 0,1 \rangle \times \langle 0, 2\pi \rangle \end{smallmatrix} \right] =$$

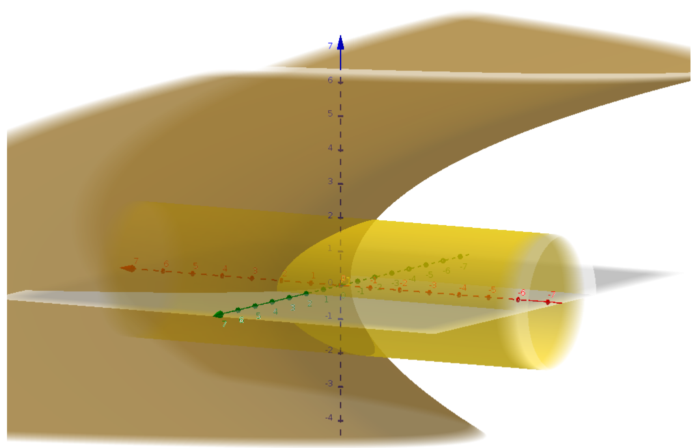
$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\sqrt{2r^2 + 4} \, dr \, d\varphi = \left(\int_0^3 r^3 \sqrt{2r^2 + 4} \, dr \right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} \cos 2\varphi \, d\varphi \right) = 0,$$

protože druhý integrál je nulový.

Poznámka: Můžeme ještě určit, jak vlastně plocha M vypadá. Z rovnic $y = u + v$ a $z = u - v$ dostaneme $u = \frac{z+y}{2}$ a $v = \frac{y-z}{2}$. Takže $x = uv = \frac{y^2 - z^2}{4}$ a $1 \ge u^2 + v^2 = \frac{z^2 + y^2}{4}$. Celkově tedy máme vztahy

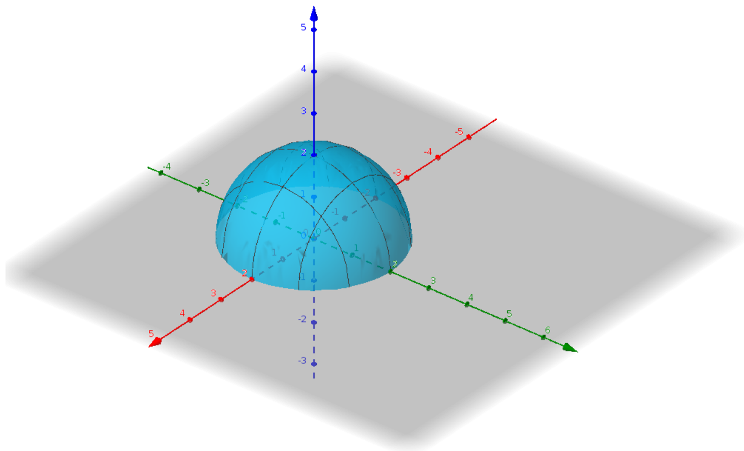
$$y^2 - z^2 = 4x, \quad y^2 + z^2 \le 4$$

což je část hyperbolického paraboloidu (tj. sedlo) nacházející se uvnitř válce s osou x a poloměrem 2.



- -

(iii) Plocha $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 4 \ \& \ z \geq 0\}$ je polovina sféry.



Zparametrizujeme ji pomocí sférických souřadnic jako

$$\Phi(\varphi, \vartheta) = (2\sin\vartheta\cos\varphi, \quad 2\sin\vartheta\sin\varphi, \quad 2\cos\vartheta)$$

s definičním oborem

$$U: \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad \& \quad 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Dále máme

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} &= (-2\sin\vartheta\sin\varphi, \quad 2\sin\vartheta\cos\varphi, \quad 0 \quad) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} &= (\ 2\cos\vartheta\cos\varphi, \quad 2\cos\vartheta\sin\varphi, \quad -2\sin\vartheta). \end{aligned}$$

Výpočet normy vektorového součinu si zjednodušíme tím, že si všimneme, že dané vektory jsou na sebe kolmé, tj. $\frac{\partial \Phi}{\partial u} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial v} = 0$. Pak je

$$\left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\| = \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right\| \cdot \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\| = 4|\sin\vartheta|.$$

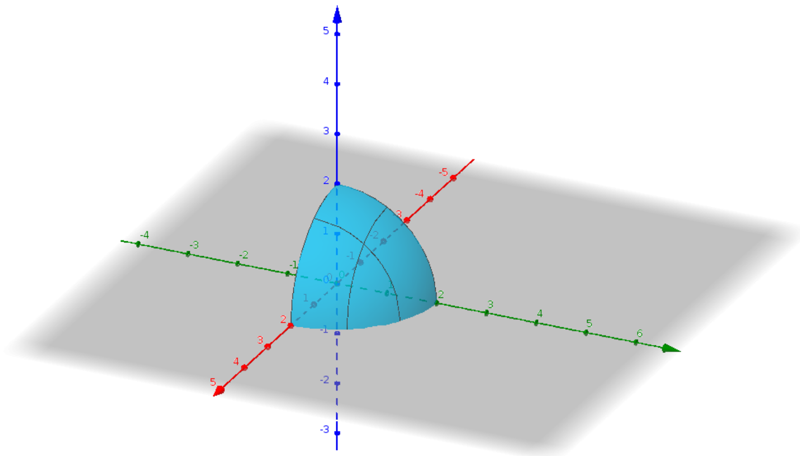
Máme tedy

$$\iint\limits_M x^2 z + y^2 z \ dS = \iint\limits_U \left(8\sin^2\vartheta\cos\vartheta\right) \cdot 4|\sin\vartheta| \ dS = \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 32\sin^3\vartheta\cos\vartheta \ d\vartheta \right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} 1 \ d\varphi \right) =$$

$$= 2\pi \Big[8\sin^4\vartheta \Big]_{\vartheta=0}^{\vartheta=\frac{\pi}{2}} = 16\pi.$$

- -

(iv) Plocha $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \ \& \ z \geq 0\}$ je jedna osmina sféry.



Zparametrizujeme ji proto pomocí sférických souřadnic jako

$$\Phi(\varphi, \vartheta) = (\sin\vartheta\cos\varphi, \quad \sin\vartheta\sin\varphi, \quad \cos\vartheta)$$

s definičním oborem

$$U: \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \quad \& \quad 0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}.$$

Dále máme

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} = (-\sin\vartheta\sin\varphi, \quad \sin\vartheta\cos\varphi, \qquad 0 \qquad)$$
$$\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta} = (\ \cos\vartheta\cos\varphi, \quad \cos\vartheta\sin\varphi, \quad -\sin\vartheta).$$

Výpočet normy vektorového součinu si opět zjednodušíme tím, že si všimneme, že dané vektory jsou na sebe kolmé, tj. $\frac{\partial\Phi}{\partial u}\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial v} = 0$. Pak je

$$\left\|\frac{\partial\Phi}{\partial u}\times\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right\| = \left\|\frac{\partial\Phi}{\partial u}\right\|\cdot\left\|\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right\| = |\sin\vartheta|.$$

Máme tedy

$$\iint_M z^2\ dS = \iint_U \left(\sin^2\vartheta\right)\cdot|\sin\vartheta|\ dS = \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\vartheta\ d\vartheta\right)\cdot\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\ d\varphi\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2\vartheta)\sin\vartheta\ d\vartheta = \frac{\pi}{2}\left[-\cos\vartheta + \frac{\cos^3\vartheta}{3}\right]_{\vartheta=0}^{\vartheta=\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{\pi}{3}\ .$$

Připomenutí: Tok vektorového pole $\vec{F}: M \to \mathbb{R}^3$ orientovanou plochou $M \subseteq \mathbb{R}^3$ se spočítá jako

$$\iint_M \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint_U \vec{F}\big(\Phi(u,v)\big)\cdot\left(\frac{\partial\Phi}{\partial u}\times\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right) dS\ ,$$

kde $\Phi: U \to M$ je opět vhodná parametrizace, $U \subseteq \mathbb{R}^2$, a orientace daná vektorovým polem $\frac{\partial\Phi}{\partial u}\times\frac{\partial\Phi}{\partial v}$ souhlasí se zadanou parametrizací plochy M. (Pokud by orientace nesouhlasila, stačí jen změnit pořadí ve vektorovém součinu, tj. změnit znaménko integrálu.)

13.5 (plošný integrál z vektorového pole - tok)

Spočítejte

$$\iint\limits_M \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

kde

(i) $\vec{F}(x, y, z) = (x,\ y,\ z)$ a M je část paraboloidu $z = 1 - x^2 - y^2$ pro $z \geq 0$ s orientací danou vektorovým polem směřujícím vzhůru.

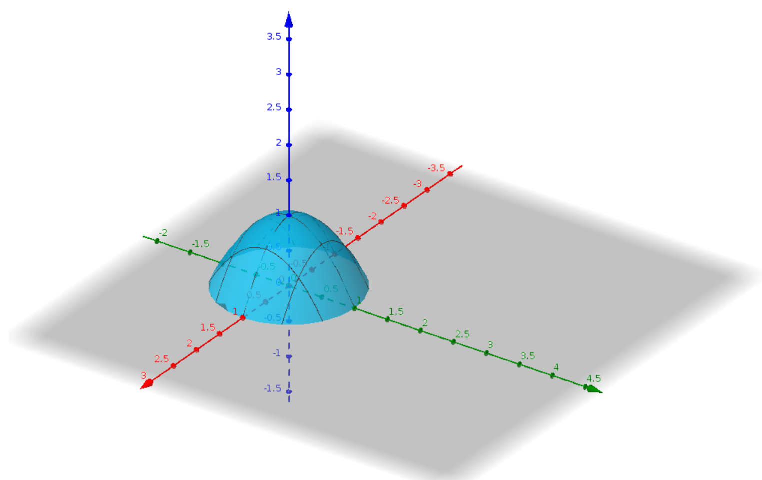
(ii) $\vec{F}(x, y, z) = (0,\ x,\ -y)$ a M je částí sféry $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $0 \leq y$, $0 \leq z$ s horní orientací.

(iii) $\vec{F}(x, y, z) = (x,\ y^2,\ yz)$ a M je na plášti kuželu $x^2 + y^2 = (z-1)^2$ pro $0 \leq z \leq 1$ s orientací danou vektorovým polem směřujícím vzhůru.

(iv) $\vec{F}(x, y, z) = (e^y,\ ye^x,\ x^2y)$ a M je částí paraboloidu $z = x^2 + y^2$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ s horní orientací.

Řešení:

(i)



Plochu S zparametrizujeme přirozeně jako graf funkce:

$$\Phi(x, y) = \left(x,\ y,\ 1 - x^2 - y^2\right)$$

s definičním oborem

$$U: \quad x^2 + y^2 \leq 1.$$

Máme

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \left(1, \quad 0, \quad -2x\right)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \left(0, \quad 1, \quad -2y\right)$$

a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \big(2x, \quad 2y, \quad 1\big).$$

Třetí složka tohoto vektoru je kladná, takže toto pole je orientované v souhlase se zadáním. Takže máme

$$\iint\limits_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint\limits_U \vec{F}\big(\Phi(x,y)\big) \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) dS \;= \iint\limits_U (x, y, 1 - x^2 - y^2) \cdot \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 1 \end{pmatrix} dS \;=$$

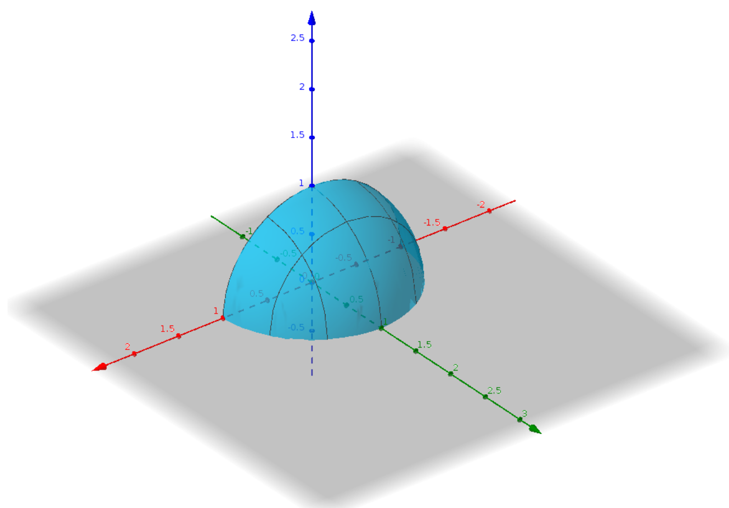
$$= \iint\limits_U (1 + x^2 + y^2)\ dS = \begin{bmatrix} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \\ 0\le r\le 1 \\ 0\le\varphi\le 2\pi \end{bmatrix} = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1+r^2)r\ dr d\varphi = \left(\int_0^1 (1+r^2)r\ dr\right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} 1\ d\varphi\right) =$$

$$= 2\pi \left[\frac{(1+r^2)^2}{4}\right]_{r=0}^{r=1} = 2\pi \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{2}\pi.$$

Poznámka: Ke zjištění hodnoty integrálu můžeme použít i Gaussovu větu (viz třeba příklad **14.12**), protože tok pole podstavou $x^2 + y^2 \le 1$, $z = 0$ je v tomto případě nulový (neboť pole je rovnoběžné s podstavou).

- -

(ii)



Plochu M zparametrizujeme pomocí sférických souřadnic jako

$$\Phi(\varphi, \vartheta) = (\sin\vartheta\cos\varphi, \quad \sin\vartheta\sin\varphi, \quad \cos\vartheta)$$

s definičním oborem

$$U: \quad 0 \le \varphi \le \pi \quad \& \quad 0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}.$$

Máme

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial \Phi}{\partial \varphi} &= \big(-\sin\vartheta\sin\varphi, \quad \sin\vartheta\cos\varphi, \quad 0 \big) \\ \tfrac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} &= \big(\cos\vartheta\cos\varphi, \quad \cos\vartheta\sin\varphi, \quad -\sin\vartheta \big) \end{aligned}$$

a odsud je

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} = \big(-\sin^2\vartheta\cos\varphi, \ -\sin^2\vartheta\sin\varphi, \ -\sin\vartheta\cos\vartheta \big).$$

Třetí složka tohoto vektoru je záporná (na vnitřku definičního oboru), takže toto pole je orientované opačně k zadání. Takže máme

$$\iint\limits_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = -\iint\limits_U \vec{F}\big(\Phi(\varphi,\vartheta)\big) \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta}\right) dS \ =$$

$$= -\iint\limits_U (0, \sin\vartheta\cos\varphi, -\sin\vartheta\sin\varphi) \cdot \begin{pmatrix} -\sin^2\vartheta\cos\varphi \\ -\sin^2\vartheta\sin\varphi \\ -\sin\vartheta\cos\vartheta \end{pmatrix} dS \ =$$

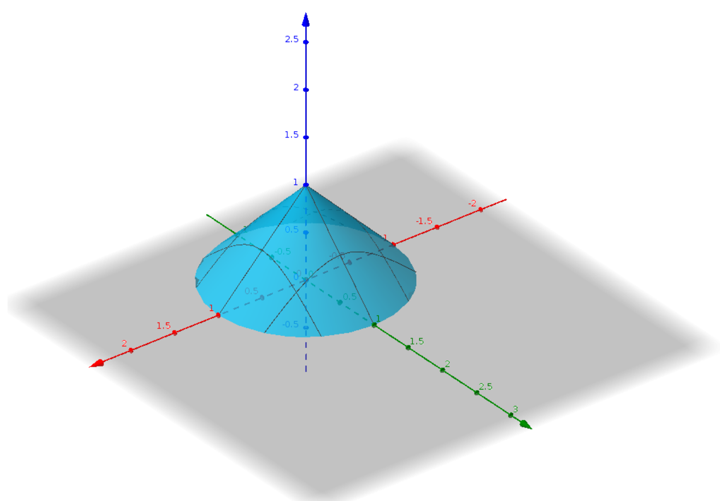
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\pi} \sin^3\vartheta \cdot (\sin\varphi\cos\varphi) - (\sin^2\vartheta\cos\vartheta) \cdot \sin\varphi \ d\vartheta \ d\varphi =$$

$$= \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2\vartheta)\sin\vartheta \ d\vartheta\right) \cdot \left(\underbrace{\int_0^{\pi} \frac{\sin(2\varphi)}{2} \ d\varphi}_{=0}\right) - \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\vartheta\cos\vartheta \ d\vartheta\right) \cdot \left(\int_0^{\pi} \sin\varphi \ d\varphi\right) =$$

$$= 0 - \left[\frac{\sin^3\vartheta}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \Big[-\cos\varphi\Big]_0^{\pi} = -\frac{2}{3} \ .$$

- -

(iii) Plochu M je část kužele a je zadaná také jako graf funkce $z = 1 - \sqrt{x^2+y^2}$ pro $x^2+y^2 \leq 1$.



Můžeme ji proto takto přirozeně zparametrizovat:

$$\Phi(x,y) = \left(x, \ y, \ 1 - \sqrt{x^2+y^2}\right)$$

s definičním oborem

$$U: \quad x^2+y^2 \leq 1.$$

Všimněme si, že v bodě $(0,0)$ nemá tato funkce derivaci (je to vrchol kužele). Ale protože jde jen o jeden bod, nemá to vliv na integrál.

Dále máme

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \left(1, \quad 0, \quad -\tfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \left(0, \quad 1, \quad -\tfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \Big(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad 1\Big).$$

Třetí složka tohoto vektoru je kladná, takže toto pole je orientované v souhlase se zadáním. Takže máme

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_U \vec{F}\big(\Phi(x,y)\big) \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) dS = \iint_U \big(x, y^2, y(1-\sqrt{x^2+y^2})\big) \cdot \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 1 \end{pmatrix} dS =$$

$$= \iint_U \frac{x^2+y^3-y(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} + y \; dS = \iint_U \frac{x^2(1-y)}{\sqrt{x^2+y^2}} + y \; dS =$$

$$= \begin{bmatrix} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \\ 0\leq r\leq 1 \\ 0\leq\varphi\leq 2\pi \end{bmatrix} = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \Big(r\cos^2\varphi(1-r\sin\varphi) + r\sin\varphi\Big) r \; drd\varphi =$$

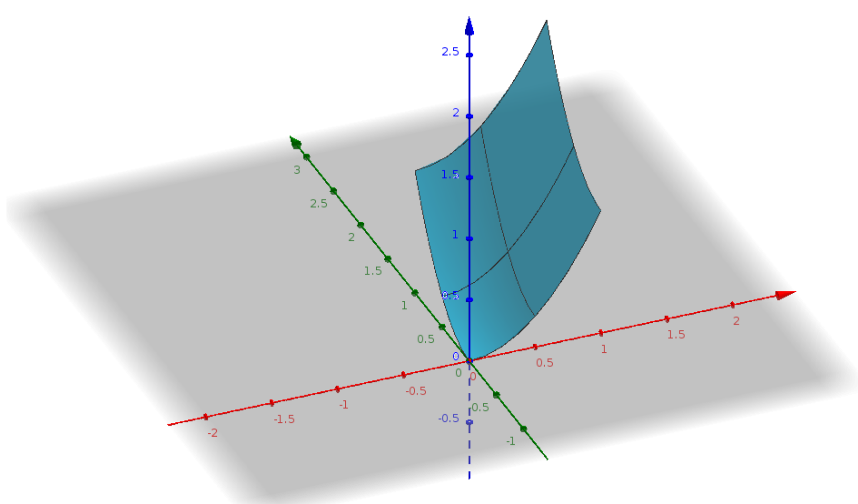
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2\cos^2\varphi - r^3\cos^2\varphi\sin\varphi + r^2\sin\varphi \; drd\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\varphi + \sin\varphi}{3} - \frac{\cos^2\varphi\sin\varphi}{4} \; d\varphi =$$

$$= \frac{\pi}{3} + \left[\frac{\cos^3\varphi}{12}\right]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{3}\,.$$

Poznámka: Ke zjištění hodnoty integrálu můžeme použít i Gaussovu větu (viz třeba příklad **14.12**), protože tok pole podstavou $x^2+y^2 \leq 1$, $z=0$ je v tomto případě nulový (neboť pole je rovnoběžné s podstavou).

- -

(iv)



Plocha M je grafem funkce $f(x,y)=x^2+y^2$, takže ji přirozeně parametrizujeme pomocí

$$\Phi(x,y)=\Big(x,y,f(x,y)\Big)=(x,y,x^2+y^2)$$

s definičním oborem

$$U: \quad 0\le x\le 1 \;\;\&\;\; 0\le y\le 1 \ .$$

Máme

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=(1,0,2x)$$
$$\frac{\partial\Phi}{\partial y}=(0,1,2y)$$

a

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}\times\frac{\partial\Phi}{\partial y}=(-2x,-2y,1)$$

Třetí složka vektoru $\frac{\partial\Phi}{\partial x}\times\frac{\partial\Phi}{\partial y}$ je kladná, tedy tento normálový vektor odpovídá zadané orientaci plochy "nahoru." Máme tak

$$\iint\limits_M \vec{F}\cdot d\vec{S}=\iint\limits_U \vec{F}(\Phi(x,y))\cdot\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\times\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)dS=\iint\limits_U \left(e^y,ye^x,x^2y\right)\cdot\begin{pmatrix}-2x\\-2y\\1\end{pmatrix}\,dS=$$

$$=\int_0^1\int_0^1\left(-2xe^y-2y^2e^x+x^2y\right)\,dx\,dy=\int_0^1 -e^y-2y^2(e^1-1)+\frac{y}{3}\,dy=-(e-1)-\frac{2}{3}(e-1)+\frac{1}{6}=$$

$$=\frac{11}{6}-\frac{5}{3}e\ .$$