14. cvičení z Matematické analýzy 2

4. - 8. ledna 2021

Nechť $E \subseteq \mathbb{R}^2$ je oblast integrace, která je omezená, a nechť její hranice ∂E je tvořena uzavřenou křivkou $\mathcal{C}$, co sama sebe nikde neprotíná (tzv. jednoduchá uzavřená křivka). Nechť orientace křivky $\mathcal{C}$ je taková, že při jejím procházení máme v daném místě oblast E vždy po levé straně.

Podle **Greenovy věty** pro pole $\vec{F} = (F_1, F_2)$ máme

$$\int\limits_{\mathcal{C}=\partial E} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint\limits_{E} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \, dS,$$

kde výraz na pravé straně si můžeme pamatovat jako $\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ F_1 & F_2 \end{vmatrix}$. Je to analogie rotace pole (jakéhosi "víru"v daném bodě) ve třech dimenzích. Interpretací Greenovy věty je to, že "víry"pole uvnitř oblasti se v sousedních bodech vyruší a zbyde jen "vír"na okraji oblasti.

Poznámka: Hranici E může být tvořena i z více uzavřených křivek, u kterých opět požadujeme, aby hranice ležela po jejich levé straně při procházení po směru dané křivky.

14.1 (Greenova věta)

Použijte Greenovu větu k nalezení práce síly $\vec{F}(x, y) = (2xy^3,\ 4x^2y^2)$ vykonané na částici podél křivky $\mathcal{C}$, která je hranicí oblasti M ohraničené křivkami $y = 0$, $x = 1$ a $y = x^3$ v prvním kvadrantu. Křivka $\mathcal{C}$ je orientována v kladném smyslu (tj. proti směru hodinových ručiček).

Řešení:

Máme tedy oblast

$$M: \quad 0 \le x \le 1 \quad \& \quad 0 \le y \le x^3.$$

Její hranicí je po částech diferencovatelná křivka, která má orientaci odpovídající použití Greenovy věty.

Dále je

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 8xy^2 - 6xy^2 = 2xy^2$$

a proto

$$\int\limits_{\mathcal{C}=\partial M} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint\limits_{M} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \, dS = \iint\limits_{M} 2xy^2 \, dS = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{x^3} 2xy^2 \, dy \, dx = \int\limits_0^1 \frac{2}{3} x^{10} \, dx = \frac{2}{33}.$$

14.2 (Greenova věta)

Pomocí Greenovy věty spočítejte plochu v $\mathbb{R}^2$ omezenou cykloidou $\varphi(t) = (t - \sin t,\ 1 - \cos t)$ pro $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ a osou x.

Řešení:

Plochu E si vymezíme křivkami $\mathcal{C}_1$ (cykloida) a $\mathcal{C}_2$ (úsečka na ose x) tak, aby tyto křivky tvořily její okraj, který bude orientovaný v souladu s Greenovou větou. Cykloida

$$\mathcal{C}_1: \quad \varphi(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t), \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle$$

má podle zadané parametrizace opačnou orientaci než potřebujeme. Pro úsečku je nejjednodušší si zvolit parametrizaci

$$\mathcal{C}_2: \quad \psi(t) = (t, 0), \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle$$

která je ve směru, který chceme.

Greenovu větu, pro (zatím nespecifikované) vektorové pole $\vec{F}(x,y) = \Big(F_1(x,y), F_2(x,y)\Big)$, pak použijeme takto:

$$\iint\limits_E \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\, dS = \int\limits_{\partial E} \vec{F}\cdot d\vec{s} = -\int\limits_{\mathcal{C}_1} \vec{F}\cdot d\vec{s} + \int\limits_{\mathcal{C}_2} \vec{F}\cdot d\vec{s}$$

kde znaménka u křivek odpovídají tomu, jestli daná křivka má nebo nemá orientaci v souladu s Greenovou větou.

Teď už jen zbývá si zvolit vhodné vektorové pole a to tak, aby $\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 1$. Pak totiž bude

$$\text{obsah}(E) = \iint\limits_E \underbrace{1}_{\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}}\, dS = \cdots = -\int\limits_{\mathcal{C}_1} \vec{F}\cdot d\vec{s} + \int\limits_{\mathcal{C}_2} \vec{F}\cdot d\vec{s}\,.$$

Takových voleb je mnoho, ale pro nás bude nejlepší nějaká jednoduchá, např. $\frac{\partial F_2}{\partial x} = 1$ a $\frac{\partial F_1}{\partial y} = 0$, tj. $\vec{F} = (0, x)$. Pro takovouto volbu bude i integrál $\int\limits_{\mathcal{C}_2} \vec{F}\cdot d\vec{s}$ nulový, protože $\vec{F}$ je kolmé k ose x, takže při pohybu ve vodorovném směru nekoná práci. Ale stejně si nulovost ještě ověříme i explicitně.

Takže máme

$$\text{pro cykloidu: } \varphi(t) = (\underbrace{t - \sin t}_{=x(t)},\ \underbrace{1-\cos t}_{=y(t)}), \qquad \varphi'(t) = (1-\cos t,\ \ \sin t)$$

$$\text{pro úsečku: } \psi(t) = (\underbrace{t}_{=x(t)},\ \underbrace{0}_{=y(t)}), \qquad \psi'(t) = (1,\ \ 0)$$

a po dosazení dostaneme

$$\text{obsah}(E) = -\int\limits_{\mathcal{C}_1} \vec{F}\cdot d\vec{s} + \int\limits_{\mathcal{C}_2} \vec{F}\cdot d\vec{s} = -\int\limits_0^{2\pi} \vec{F}(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\ dt + \int\limits_0^{2\pi} \vec{F}(\psi(t))\cdot\psi'(t) =$$

$$= -\int\limits_0^{2\pi} (0,\ \ t - \sin t)\cdot\begin{pmatrix} 1-\cos t \\ \sin t\end{pmatrix}\ dt + \int\limits_0^{2\pi} \underbrace{(0,\ \ t)\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0\end{pmatrix}}_{=0}\ dt =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} t\cdot(-\sin t) + \sin^2 t\ dt = \underbrace{\big[t\cos t\big]_0^{2\pi}}_{=2\pi} - \underbrace{\int\limits_0^{2\pi} \cos t\ dt}_{=0} + \underbrace{\int\limits_0^{2\pi} \sin^2 t\ dt}_{=\pi} = 2\pi - 0 + \pi = 3\pi\ .$$

14.3 (Greenova věta)

Pomocí Greenovy věty spočítejte

$$\int\limits_{\mathcal{C}} (3y - e^{\sin x})\, dx + (7x + \sqrt{y^4+1})\, dy$$

kde $\mathcal{C}$ je kladně orientovaná kružnice $x^2 + y^2 = 9$.

Řešení:
Naše oblast M je kruh o poloměru 3

$$M: \quad x^2 + y^2 \leq 3^2$$

a pole je

$$\vec{F}(x,y) = \left(3y - e^{\sin x},\ 7x + \sqrt{y^4+1}\right) \ .$$

Orientace křivky $\mathcal{C}$ je v souhlase s Greenovou větou. Můžeme proto psát (s využitím znalosti obsahu kruhu)

$$\int\limits_{\mathcal{C}=\partial M} \vec{F}\cdot d\vec{s} = \iint\limits_{M} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\ dS = \iint\limits_{M} (7-3)\ dS = \iint\limits_{M} 4\ dS = 4\cdot\pi\cdot 3^2 = 36\pi \ .$$

Je vidět, že původní křivkový integrál bychom těžko počítali, ale s využitím Greenovy věty je výpočet snadný.

14.4 (Greenova věta)
Pomocí Greenovy věty spočítejte

$$\int\limits_{\mathcal{C}} y^2\,dx + 3xy\,dy$$

kde $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ je hranice mezikruží určeného záporně orientovanou kružnicí $\mathcal{C}_1$ s poloměrem 2 a středem v počátku a kladně orientovanou kružnicí $\mathcal{C}_2$ s poloměrem 1 a středem také v počátku.

Řešení:
Orientace hranice mezikruží odpovídá opačné orientaci, než je ta, co potřebujeme pro Greenovu větu (správná orientace znamená, že při postupu podél hranice máme oblast po levé straně). Naše oblast je tvaru

$$M: \quad 1^2 \leq x^2 + y^2 \leq 2^2$$

a pole je

$$\vec{F}(x,y) = \left(y^2,\ 3xy\right) \ .$$

Pro křivku $\mathcal{C}$ si označme její opačnou orientaci symbolicky jako $-\mathcal{C}$. Pak zjevně bude platit

$$\int\limits_{-\mathcal{C}} \vec{F}\cdot d\vec{s} = -\int\limits_{\mathcal{C}} \vec{F}\cdot d\vec{s} \ .$$

Křivka $-\mathcal{C}$ má už správnou orientaci pro Greenovu vetu, takže můžeme psát

$$\int\limits_{\mathcal{C}} \vec{F}\cdot d\vec{s} = -\int\limits_{-\mathcal{C}} \vec{F}\cdot d\vec{s} = -\iint\limits_{M} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\ dS =$$

$$= -\iint\limits_{M} 3y - 2y\ dS = \iint\limits_{M} -y\ dS = \begin{bmatrix} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \\ 1\leq r\leq 2 \\ 0\leq\varphi\leq 2\pi \end{bmatrix} =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_1^2 -r^2\cos\varphi\ dr\ d\varphi = \left(\int\limits_1^2 -r^2\ dr\right)\cdot \underbrace{\left(\int\limits_0^{2\pi} \cos\varphi\ d\varphi\right)}_{=0} = 0 \ .$$

Stokesova věta je zobecnění Greenovy věty z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^3$ (orientovaná plocha, jejímž okrajem je křivka $\mathcal{C}$, už může být různě zakřivená v prostoru):

$$\int_{\mathcal{C}=\partial M} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint_M \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{S} \ ,$$

kde

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) := \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z},\ -\left(\frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z} \right),\ \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) .$$

Orientace plochy a jejího okraje musí být v souladu a to pomocí pravidla pravé ruky (ruku položíme na plochu poblíž okraje tak, aby vektor její orientace mířil do dlaně a palec ukazoval směrem dovnitř plochy - pak zbylé prsty ukazují směr orientace okraje), nebo jednodušeji - když obcházíme plochu podél okraje, musíme ji aktuálně mít vždy po levé straně.

14.5 (Stokesova věta)

Spočítejte práci síly

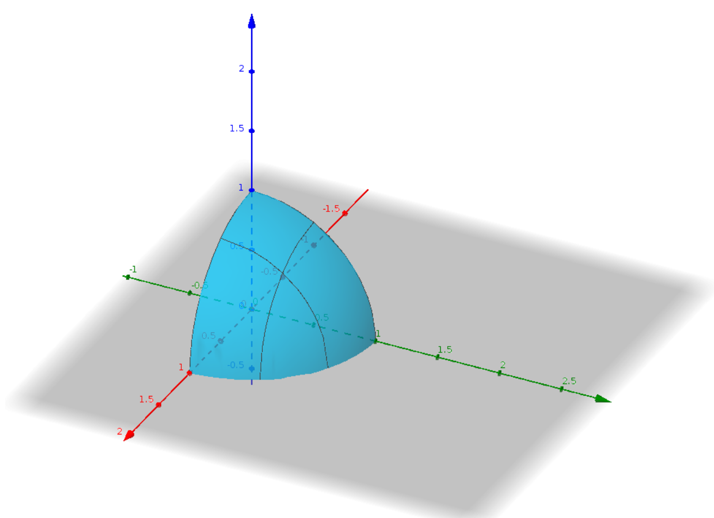
$$\vec{F}(x,y,z) = \Big((x+1)^x + z^2\Big)\vec{i} + \Big((y+1)^y + x^2\Big)\vec{j} + \Big((z+1)^z + y^2\Big)\vec{k}$$

vykonané na částici, která se pohybuje podél okraje části sféry $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ležící v prvním oktantu. Křivka $\mathcal{C}$ daná okrajem této plochy je orientovaná v záporném smyslu při pohledu seshora (přesněji: ve směru daném posloupnosti bodů $(2,0,0) \to (0,0,2) \to (0,2,0)$).

Řešení:

Jak je vidět z tvaru vektorového pole, integrál odpovídající práci $\vec{F}$ síly podél uvedeného okraje $\mathcal{C}$ bychom přímým způsobem počítali asi těžko. Pomůžeme si proto Stokesovou větou, která integrál převede na tok pole $\operatorname{rot}(\vec{F})$ plochou

$$M: \quad x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad x, y, z \geq 0 \ .$$



Tu musíme orientovat tak, aby její orientace byla v souladu se zvolenou orientací křivky $\mathcal{C}$. To lze uvidět např. z náčrtku a správná orientace plochy M je pak směrem *do počátku souřadnic* (tedy kdyby M byla celá sféra, byla by to ta orientace dovnitř).

Stokesova věta pak říká, že pro plochu M a okraj $\mathcal{C}(= \partial M)$, co mají orientace v souladu, je

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint_M \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{S}$$

kde pro pole $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ je

$$\mathrm{rot}(\vec{F}) := \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z},\ \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x},\ \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

což v našem případě je

$$\mathrm{rot}(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (x+1)^x + z^2 & (y+1)^y + x^2 & (z+1)^z + y^2 \end{vmatrix} = (2y - 0,\ 2z - 0,\ 2x - 0) \ .$$

Dále budeme potřebovat ještě plochu M zparametrizovat. K tomu bude nejvhodnější použít sférických souřadnic (pro $r = 2$). Parametrizace pak bude

$$\Phi : \quad \begin{array}{rcl} x & = & 2 \sin \vartheta \cos \varphi \\ y & = & 2 \sin \vartheta \sin \varphi \\ z & = & 2 \cos \vartheta \end{array}$$

pro

$$U : \quad 0 \le \varphi \le \tfrac{\pi}{2} \quad \& \quad 0 \le \vartheta \le \tfrac{\pi}{2} \ .$$

Pro výpočet plošného integrálu budeme potřebovat ještě vektorový součin

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x}{\partial \vartheta} & \frac{\partial y}{\partial \vartheta} & \frac{\partial z}{\partial \vartheta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 \sin \vartheta \sin \varphi & 2 \sin \vartheta \cos \varphi & 0 \\ 2 \cos \vartheta \cos \varphi & 2 \cos \vartheta \sin \varphi & -2 \sin \vartheta \end{vmatrix} =$$

$$= (-4 \sin^2 \vartheta \cos \varphi, \quad -4 \sin^2 \vartheta \sin \varphi, \quad -4 \sin \vartheta \cos \vartheta)$$

který má zjevně tu správnou orientaci odpovídající orientaci plochy (tj. směrem *do počátku* souřadnic), protože znaménko z-tové složky je záporné pro body z vnitřku množiny U. Kdyby součin neměl požadovanou orientaci, vzali bychom ho s opačným znaménkem. Proto teď můžeme psát

$$\int\limits_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint\limits_{M = \Phi(U)} \mathrm{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{S} = \iint\limits_{U} \left(\mathrm{rot}(\vec{F}) \circ \Phi \right) \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} \right) d\varphi \ d\vartheta =$$

$$= \iint\limits_{U} (4 \sin \vartheta \sin \varphi, \quad 4 \cos \vartheta, \quad 4 \sin \vartheta \cos \varphi) \cdot \begin{pmatrix} -4 \sin^2 \vartheta \cos \varphi \\ -4 \sin^2 \vartheta \sin \varphi \\ -4 \sin \vartheta \cos \vartheta \end{pmatrix} d\varphi \ d\vartheta =$$

$$= -16 \iint\limits_{U} \sin^3 \vartheta (\sin \varphi \cos \varphi) + (\sin^2 \vartheta \cos \vartheta) \sin \varphi + (\sin^2 \vartheta \cos \vartheta) \cos \varphi \ d\varphi \ d\vartheta =$$

$$= \left(-16 \int\limits_0^{\pi/2} \underbrace{\sin^3 \vartheta}_{(1 - \cos^2 \vartheta) \sin \vartheta} \ d\vartheta \right) \cdot \left(\int\limits_0^{\pi/2} \sin \varphi \cos \varphi \ d\varphi \right) + \left(-16 \int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 \vartheta \cos \vartheta \ d\vartheta \right) \cdot \left(\int\limits_0^{\pi/2} (\sin \varphi + \cos \varphi) \ d\varphi \right) =$$

$$= \Big[-16(-\cos \vartheta + \tfrac{1}{3} \cos^3 \vartheta) \Big]_0^{\pi/2} \cdot \Big[\tfrac{1}{2} \sin^2 \varphi \Big]_0^{\pi/2} + \Big[-\tfrac{16}{3} \sin^3 \vartheta \Big]_0^{\pi/2} \cdot \Big[-\cos \varphi + \sin \varphi \Big]_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{32}{3} \cdot \frac{1}{2} + \left(-\frac{16}{3} \right) \cdot 2 = -\frac{16}{3} \ .$$

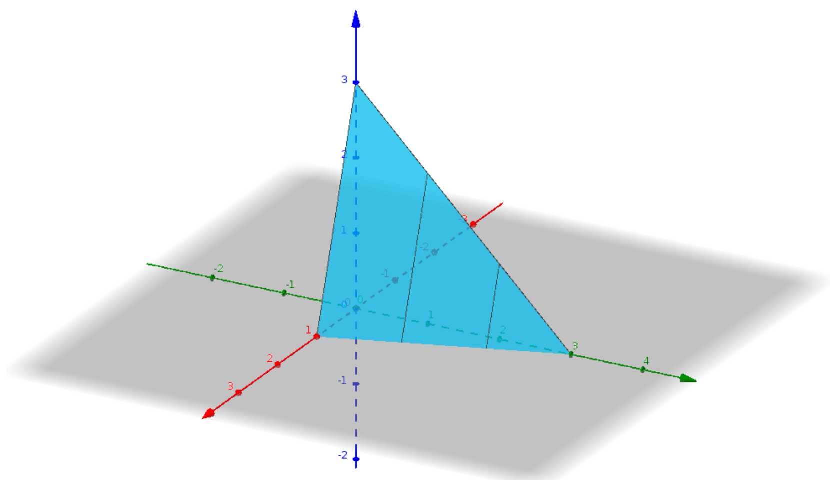
14.6 (Stokesova věta)

Pomocí Stokesovy věty spočítejte

$$\int_{\partial M} \vec{F} \cdot d\vec{s},$$

kde $\vec{F}(x,y,z) = (xz, 2xy, 3xy)$ a $\mathcal{C}$ je hranice části roviny $3x + y + z = 3$, která je v prvním oktantu. Okraj plochy je orientovaný v záporném smyslu při pohledu seshora (neboli: jestliže křivku, která tvoří okraj zprojektujeme do roviny xy, bude mít tento její obraz zápornou orientaci).

Řešení:
Plocha M je trojúhelník.



Orientace plochy v souladu s orientací okraje je tedy směrem dolů (při pohledu zdola bude okraj orientovaný v "kladném" smyslu). Normované normálové pole je tak dané směrem vektoru

$$\vec{n} = -(3,1,1)\ .$$

Dále máme

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz & 2xy & 3xy \end{vmatrix} = \big(3x,\ x - 3y,\ 2y\big)\ .$$

Plochu zparametrizujeme jako graf funkce $z = 3 - 3x - y$, tedy

$$\Phi(x,y) = (x, y, 3 - 3x - y)$$

pomocí množiny

$$U: \quad 0 \le x \le 1 \ \ \& \ \ 0 \le y \le 3 - 3x\ .$$

(U je jen projekcí M do roviny xy). Pro tečné vektory máme

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= \big(1, \quad 0, \quad -3\big) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} &= \big(0, \quad 1, \quad -1\big) \end{aligned}$$

a

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}\times\frac{\partial\Phi}{\partial y}=\big(3,1,1\big).$$

Protože tento vektorový součin má opačný směr než zadaná orientace $\vec{n}$, musíme ho do integrálu dosadit s opačným znaménkem (nebo prostě změnit pořadí vektorů v součinu, tj. dosadit $\frac{\partial\Phi}{\partial y}\times\frac{\partial\Phi}{\partial x}$ namísto $\frac{\partial\Phi}{\partial x}\times\frac{\partial\Phi}{\partial y}$). Takže máme

$$\int\limits_{\partial M}\vec{F}\cdot d\vec{s}=\iint\limits_{M=\Phi(U)}\operatorname{rot}(\vec{F})\cdot d\vec{S}=\iint\limits_{U}\Big(\operatorname{rot}(\vec{F})\circ\Phi\Big)\cdot\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\times\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)dS=$$

$$=\iint\limits_{U}(3x,\ x-3y,\ 2y)\cdot\begin{pmatrix}-3\\-1\\-1\end{pmatrix}dS=\iint\limits_{U}(-10x+y)\ dS=\int\limits_0^1\int\limits_0^{3(1-x)}y-10x\ dy\ dx=$$

$$=\int\limits_0^1\frac{9}{2}(1-x)^2-30x(1-x)\ dx=\frac{3}{2}-30\cdot\frac{1}{6}=-\frac{7}{2}\ .$$

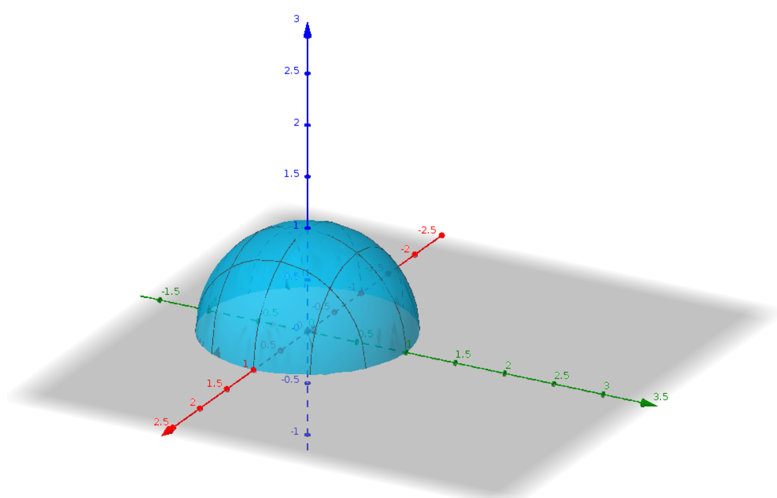
14.7 (Stokesova věta)

Pomocí Stokesovy věty spočítejte

$$\iint\limits_{M}\operatorname{rot}(\vec{F})\cdot d\vec{S},$$

kde $\vec{F}(x,y,z)=(xyz,x,e^{xy}\cos z)$ a M je polosféra $x^2+y^2+z^2=1$ a $z\geq 0$ s orientací směrem vzhůru.

Řešení:



Stokesovu větu teď použijeme obráceně: pomocí křivkového integrálu spočítáme hodnotu plošného integrálu.

Máme

$$M:\quad x^2+y^2+z^2=1\ \ \&\ \ z\geq 0$$

a

$$\partial M: \quad x^2+y^2=1 \quad \& \quad z=0.$$

Plocha M je orientovaná směrem "nahoru"a orientace jejího okraje ∂M tedy odpovídá orientaci dané např. parametrizací $\varphi(\alpha)=(\cos\alpha, \sin\alpha, 0)$ pro $0 \le \alpha \le 2\pi$.

Máme tedy

$$\varphi'(\alpha)=(-\sin\alpha, \cos\alpha, 0)$$

$$\iint_M \operatorname{rot}(\vec{F})\cdot d\vec{S} = \int_{\partial M} \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} (0, \cos\alpha, e^{\sin\alpha\cos\alpha})\cdot \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \, d\alpha = \int_0^{2\pi} \cos^2\alpha \; d\alpha = \pi.$$

14.8 (Stokesova věta)

Určete

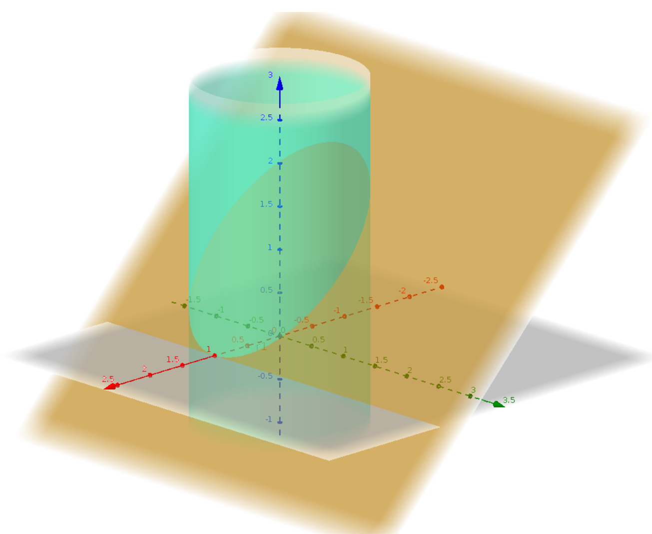
$$\int_{\mathcal{C}} (y-z)\; dx + (z-x)\; dy + (x-y)\; dz$$

kde

$$\mathcal{C}: \; x^2+y^2=1 \;\; \& \;\; x+z=1$$

je kladně orientovaná křivka při pohledu seshora.

Řešení:
Křivka $\mathcal{C}$ je elipsa, která vznikne jako průnik roviny $x+z=1$, která šikmo přeřízne povrch válce $x^2+y^2=1$.



Můžeme ji chápat jako hranici plochy

$$M: \quad x^2+y^2 \le 1 \;\; \& \;\; x+z=1$$

s orientací nahoru. Použijeme proto Stokesovu větu. Spočítáme si rotaci

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y-z & z-x & x-y \end{vmatrix} = \big(-2, \; -2, \; -2\big) \; .$$

Protože pole $\mathrm{rot}(\vec{F})$ je konstantní a M představuje plochu ohraničenou elipsou, jde o celkem lehký výpočet, který si zkusíme udělat bez použití parametrizace M.

Normované normálové vektorové pole orientované plochy M je určené normálovým vektorem roviny, ve které plocha leží, a sice $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$ (směr vektoru také odpovídá zadání). Můžeme pak psát

$$\int\limits_{\mathcal{C}=\partial M} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint\limits_{M} \mathrm{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{S} = \iint\limits_{M} \left(\mathrm{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{n}\right) \, dS = -2\sqrt{2} \iint\limits_{M} 1 \, dS \; .$$

Teď už stačí jen určit velikost povrchu plochy M (tj. $\iint\limits_{M} 1 \, dS$). Protože ale jde o plochu ohraničenou elipsou s délkami poloos $a = 1$ a $b = \sqrt{2}$ (snadno určíme z obrázku), je obsah roven $\pi ab = \sqrt{2}\pi$.

Dosazením pak dostáváme

$$\int\limits_{\mathcal{C}=\partial M} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \cdots = -2\sqrt{2} \iint\limits_{M} 1 \, dS = -2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}\pi = -4\pi \; .$$

Nebo prostě můžeme použít parametrizaci plochy M - plochu zparametrizujeme jako graf funkce $z = 1 - x$, tedy

$$\Phi(x, y) = (x, y, 1 - x)$$

pomocí množiny

$$U : \quad x^2 + y^2 \leq 1$$

a dál postupujeme už obvyklým způsobem.

Gaussova věta

$$\iint\limits_{\partial E} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint\limits_{E} \mathrm{div}(\vec{F}) \, dV$$

dává do souvislosti tok pole $\vec{F}$ přes okraj $M = \partial E$ oblasti E v $\mathbb{R}^3$ s integrálem přes tuto oblast E. Okraj ∂E má zde vždy vnější orientaci. Funkce

$$\mathrm{div}(\vec{F}) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z},$$

která se integruje v M se nazývá divergence pole $\vec{F}$ a interpretuje se jako "zdroj"pole v daném bodě (při kladné hodnotě) případně "odtok"pole v daném bodě (při záporné hodnotě). Smyslem Gaussovy věty tedy je, že celková "změna pole"v objemu odpovídá příslušnému toku pole přes okraj.

14.9 (Gaussova věta)

Pomocí Gaussovy věty spočítejte tok pole $\vec{F} = (3x, \; xy, \; 2xz)$ povrchem krychle $E = \langle 0, 1\rangle^3 \subseteq \mathbb{R}^3$ s vnější orientací.

Řešení:
Máme

$$\mathrm{div}(\vec{F}) = 3 + x + 2x = 3 + 3x$$

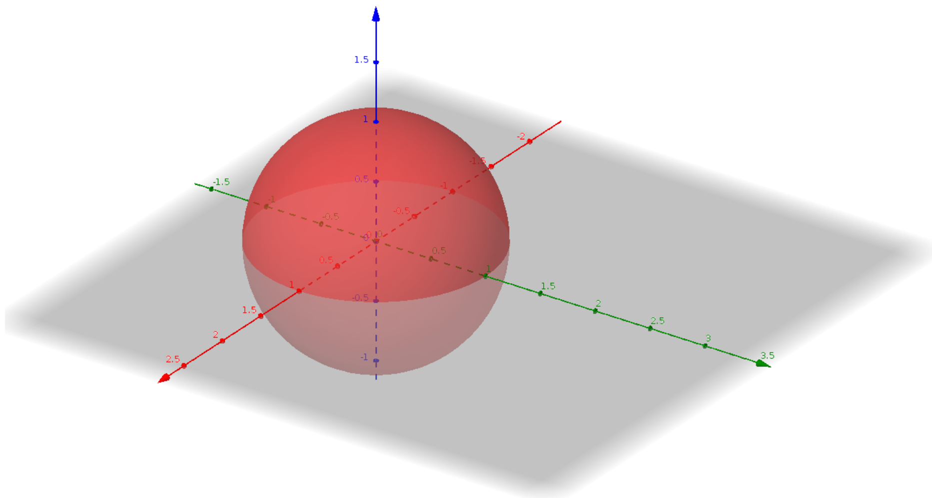
a tedy

$$\iint\limits_{\partial E} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint\limits_{E} \mathrm{div}(\vec{F}) \, dV = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (3 + 3x) \, dx \, dy \, dz = \left(\int_0^1 3 + 3x \, dx \right) \cdot \left(\int_0^1 \int_0^1 1 \, dy \, dz \right) = \frac{9}{2}.$$

14.10 (Gaussova věta)

Pomocí Gaussovy věty spočítejte tok vektorového pole $\vec{F}(x,y,z) = (x^3,\ y^3,\ z^3)$ a sférou $x^2+y^2+z^2=1$ s vnější orientací.

Řešení:



Máme

$$E: \quad x^2+y^2+z^2 \leq 1$$

a

$$\partial E: \quad x^2+y^2+z^2 = 1\ .$$

Orientace okraje $M = \partial E$ je dána vnější normálou.
Máme

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = 3(x^2+y^2+z^2)$$

a Gaussova věta nám dává

$$\iint\limits_{\partial E} \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iiint\limits_{E} \operatorname{div}(\vec{F})\ dV = \iiint\limits_{E} 3\left(x^2+y^2+z^2\right)\ dV = \left[\begin{smallmatrix} x=r\sin\vartheta\cos\varphi \\ y=r\sin\vartheta\sin\varphi \\ z=r\cos\vartheta \\ (r,\varphi,\vartheta)\in\langle 0,1\rangle\times\langle 0,2\pi\rangle\times\langle 0,\pi\rangle \end{smallmatrix}\right] =$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{1} 3r^2\cdot|r^2\sin\vartheta|\ dr\ d\varphi\ d\vartheta = \left(\int_0^1 3r^4\ dr\right)\cdot\left(\int_0^{2\pi} 1\ d\varphi\right)\cdot\left(\int_0^{\pi}\sin\vartheta\ d\vartheta\right) = \frac{3}{5}\cdot 2\pi\cdot 2 = \frac{12}{5}\pi.$$

14.11 (Gaussova věta)
Pomocí Gaussovy věty určete

$$\iint\limits_{M} \vec{F}\cdot d\vec{S}$$

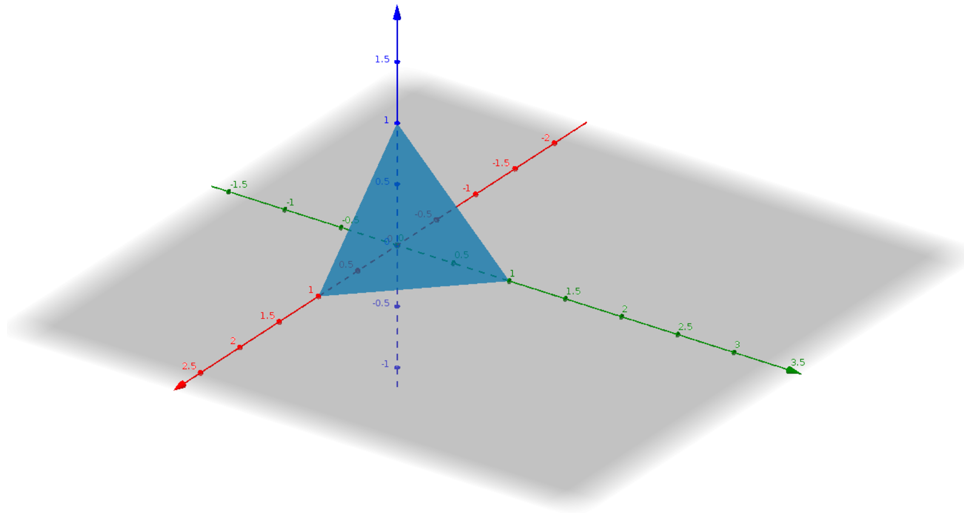
kde plocha je

$$M: \quad x+y+z=1\ \ \&\ \ x,y,z\geq 0$$

a je orientovaná směrem vzhůru a vektorové pole je

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(xy,\ yz,\ xz\right)\ .$$

Řešení:



Abychom mohli použít Gaussovu větu, potřebujeme nějakou trojrozměrnou oblast E, jejíž okraj ∂E bude obsahovat plochu M a kde tok pole zbytkem okraje, tj. orientovanou plochou $\partial E \setminus M$ bude nulový.

Jestliže si zvolíme čtyřstěn

$$E : \quad x + y + z \leq 1 \;\; \& \;\; x, y, z \geq 0$$

pak se jeho okraj ∂E skládá z plochy M (jejíž zadaná orientace odpovídá vnější orientaci) a tří trojúhelníků Δ_1, Δ_2 a Δ_2 (jejichž orientaci si zvolíme také jako "vnější"). Pole $\vec{F}$ na trojúhelníku

$$\Delta_1 : \quad x = 0 \;\; \& \;\; y + z \geq 1 \;\; \& \;\; y, z \geq 0$$

je tvaru $\vec{F}(0, y, z) = \big(0,\ yz,\ 0\big)$ a je proto rovnoběžné s plochou tohoto trojúhelníka (neboli toto pole $\vec{F}$ je kolmé na normálové vektorové pole $\vec{N}_1 = (-1, 0, 0)$ plochy trojúhelníka, tj. $\vec{F} \cdot \vec{N}_1 = 0$). Proto bude

$$\iint\limits_{\Delta_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint\limits_{\Delta_1} (\vec{F} \cdot \vec{N}_1)\ dS = 0\ .$$

A podobně to dopadne i pro zbylé trojúhelníky.

Celkově tedy budeme mít, že (při vnější orientaci okraje ∂E) bude

$$\iint\limits_{\partial E} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint\limits_{M} \vec{F} \cdot d\vec{S} + \underbrace{\sum_{i=1}^{3} \iint\limits_{\Delta_i} \vec{F} \cdot d\vec{S}}_{=0} = \iint\limits_{M} \vec{F} \cdot d\vec{S}\ .$$

Teď tedy použijeme Gaussovu větu. Spočítáme si divergenci

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = y + z + x\ .$$

a čtyřstěn E si rozřežeme (kvůli Fubiniově větě) např. jako

$$E : \quad 0 \leq x \leq 1 \quad \& \quad 0 \leq y \leq 1 - x \quad \& \quad 0 \leq z \leq 1 - x - y$$

Máme tedy

$$\iint_M \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint_{\partial E} \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iiint_E \operatorname{div}(\vec{F})\ dV = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} x+y+z\ dz\ dy\ dx =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} \left[(x+y) + \frac{1}{2}(1-x-y)\right](1-x-y)\ dy\ dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \int_0^{1-x} 1-(x+y)^2\ dy\ dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left[y - \frac{(x+y)^3}{3}\right]_{y=0}^{y=1-x} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2}{3} - x + \frac{x^3}{3}\ dx = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{12}\right) = \frac{1}{8}\ .$$

14.12 (Gaussova věta)

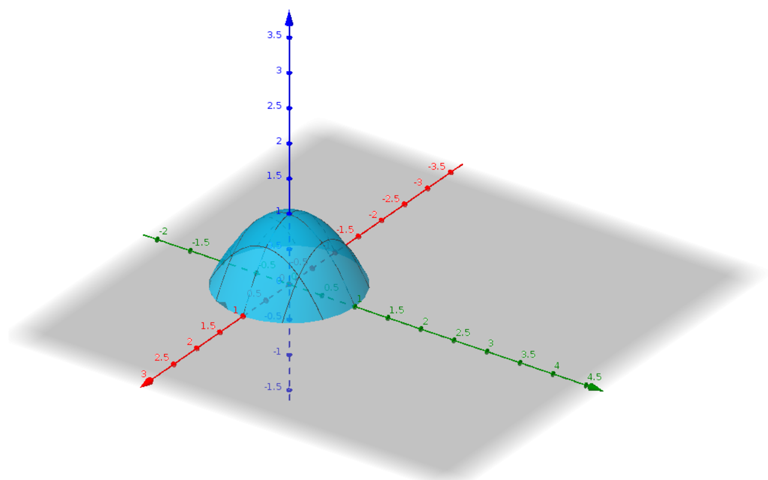
Pomocí Gaussovy věty určete

$$\iint_M \vec{F}\cdot d\vec{S}$$

kde $\vec{F}(x,y,z) = (x,\ y,\ z)$ a M je část paraboloidu $z = 1 - x^2 - y^2$ pro $z \geq 0$ s orientací danou vektorovým polem směřujícím vzhůru.

(viz příklad **13.5**(i).)

Řešení:



Budeme postupovat podobně jako v příkladu **14.11**. Plocha M spolu s kruhem

$$K: \quad x^2 + y^2 \leq 1 \quad \& \quad z = 0$$

(jehož orientace je směrem dolů) tvoří hranici ∂E (s vnější orientací) pro těleso

$$E: \quad 0 \leq z \leq 1 - (x^2 + y^2)\ .$$

Pole na kruhu K má tvar $\vec{F}(x,y,0) = (x,\ y,\ 0)$ a je tedy rovnoběžné z plochou kruhu. Proto je

$$\iint\limits_K \vec{F} \cdot d\vec{S} = 0\ .$$

Tudíž díky Gaussově větě pak budeme mít:

$$\iint\limits_M \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint\limits_M \vec{F} \cdot d\vec{S} + \underbrace{\iint\limits_K \vec{F} \cdot d\vec{S}}_{=0} = \iint\limits_{\partial E} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint\limits_E \underbrace{\operatorname{div}(\vec{F})}_{=1+1+1=3}\ dV = \iiint\limits_E 3\ dV =$$

$$= \begin{bmatrix} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \\ z=h \\ \\ 0\leq\varphi\leq 2\pi \\ 0\leq r\leq 1 \\ 0\leq z\leq 1-r^2 \end{bmatrix} = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^1\int\limits_0^{1-r^2} 3r\ dh\ dr\ d\varphi = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^1 3r(1-r^2)\ dr\ d\varphi =$$

$$= \left(\int\limits_0^1 (r-r^3)\ dr\right) \cdot \left(\int\limits_0^{2\pi} 3\ d\varphi\right) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) 6\pi = \frac{3}{2}\pi\ .$$

(Srovnejte s výsledkem příkladu **13.5**(i).)