2. cvičení z Matematické analýzy 2

1. října 2020

Motivace:

Pojem *otevřené* množiny intuitivně zavádíme jako množinu, která s každým bodem obsahuje ještě dost prostoru kolem něj (je to kvůli pozdějšímu použití pro derivování - potřebujeme se k bodu přiblížit "odkudkoliv").

Pojmem *uzavřené* množiny zase intuitivně myslíme takovou množinu, ze které nemůžeme vypadnout při "limitách posloupností," tj. taková množina obsahuje všechny body, ke kterým se můžeme z této množiny přiblížit libovolně blízko.

Kupodivu, tyto dva pojmy jsou nakonec navzájem doplňkové (viz níže).

Definice:

Okolím $U_\varepsilon(a_0)$ (tzv. otevřenou koulí) s poloměrem $\varepsilon > 0$ a středem v bodě $a_0 \in \mathbb{R}^n$ označujeme množinu

$$U_\varepsilon(a_0) \overset{\text{def}}{=} \{a \in \mathbb{R}^n \mid ||a - a_0|| < \varepsilon\}$$

kde $||a - a_0||$ je *eukleidovská vzdálenost* bodů a a a_0, tj. pro

$$a_0 = (x_1, \ldots, x_n)$$

a

$$a = (y_1, \ldots, y_n)$$

je

$$||a - a_0|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}\ .$$

Připomeňme si, že pro množinu $A \subseteq \mathbb{R}^n$ si

- *vnitřek* A° množiny A definujeme jako množinu všech bodů $a \in A$, které jsou v A i s nějakým okolím:

$$a \in A^\circ \overset{\text{def}}{\iff} (\exists\ \varepsilon > 0)\ \ U_\varepsilon(a) \subseteq A$$

- *hranice* ∂A množiny A je množina všech bodů $a \in \mathbb{R}^n$, jejichž libovolná okolí zasahují jak do samotné množiny A, tak do jejího doplňku $\mathbb{R}^n \setminus A$:

$$a \in \partial A \overset{\text{def}}{\iff} (\forall\ \varepsilon > 0)\quad U_\varepsilon(a) \cap A \neq \emptyset \quad \wedge \quad U_\varepsilon(a) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \neq \emptyset$$

- *uzávěr* $\overline{A}$ množiny A si definujeme jako množinu

$$\overline{A} \overset{\text{def}}{=} A \cup \partial A$$

  neboli (jak se dá snadno ověřit) jako množinu všech bodů $a \in \mathbb{R}^n$, jejichž libovolná okolí zasahují do množiny A:

$$a \in \overline{A} \iff (\forall\ \varepsilon > 0)\ \ U_\varepsilon(a) \cap A \neq \emptyset$$

Kromě toho ještě platí, že

$$\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ$$

a tedy

$$\overline{A} = A^\circ\ \ \dot\cup\ \ \partial A$$

kde "$\cup$" znamená disjunktní sjednocení. Pro libovolnou množinu A se dále celý prostor $\mathbb{R}^n$ vždy disjunktně rozloží na vnitřek A°, hranici ∂A a vnějšek $(\mathbb{R}^n \setminus A)^\circ$:

$$\mathbb{R}^n = A^\circ \;\cup\; \partial A \;\cup\; (\mathbb{R}^n \setminus A)^\circ$$

2.1 Určete vnitřek, hranici a uzávěr definičních oborů následujících funkcí:

(a) $f(x,y) = \sqrt{\frac{x^2-x+y^2}{2x-x^2-y^2}}$,

(b) $f(x,y) = \frac{\arcsin(x^2+2x+y^2)}{\sqrt{2x-x^2-y^2}}$,

Řešení:
Tento příklad je určený pro "intuitivní" řešení pomocí náčrtů daných množin.

(a) Nechť M je definiční obor funkce f.

$$M:\ (x^2-x+y^2 \geq 0 \ \wedge\ 2x-x^2-y^2 > 0) \ \vee\ (x^2-x+y^2 \leq 0 \ \wedge\ 2x-x^2-y^2 < 0)$$

Zadání lze upravit na přehlednější tvar. Doplněním na čtverec můžeme nerovnosti vyjádřit jako

$$M:\ \Big((x-\tfrac{1}{2})^2+y^2 \geq \tfrac{1}{4} \ \wedge\ (x-1)^2+y^2 < 1\Big) \ \vee\ \Big((x-\tfrac{1}{2})^2+y^2 \leq \tfrac{1}{4} \ \wedge\ (x-1)^2+y^2 > 1\Big)$$

což představuje oblasti vně a uvnitř kružnic. Z toho je vidět, že druhá závorka představuje prázdnou množinu, tedy celkem je

$$M:\ \left(x-\tfrac{1}{2}\right)^2+y^2 \geq \tfrac{1}{4} \ \wedge\ (x-1)^2+y^2 < 1$$

- (***vnitřek***) $M^\circ:\quad \left(x-\tfrac{1}{2}\right)^2+y^2 > \tfrac{1}{4} \ \wedge\ (x-1)^2+y^2 < 1.$
- (***uzávěr***) $\overline{M}:\quad \left(x-\tfrac{1}{2}\right)^2+y^2 \geq \tfrac{1}{4} \ \wedge\ (x-1)^2+y^2 \leq 1.$
- (***hranice***) $\partial M = \overline{M} \setminus M^\circ:\quad \left(x-\tfrac{1}{2}\right)^2+y^2 = \tfrac{1}{4} \ \vee\ (x-1)^2+y^2 = 1$
  (POZOR: je tu jiná logická spojka!)

(b) Nechť M je definiční obor funkce f.

$$M:\quad -1 \leq x^2+2x+y^2 \leq 1 \ \wedge\ 2x-x^2-y^2 > 0$$

Zadání lze upravit na přehlednější tvar. Doplněním na čtverec můžeme nerovnosti vyjádřit jako

$$M:\ 0 \leq (x+1)^2+y^2 \leq 2 \ \wedge\ (x-1)^2+y^2 < 1$$

což představuje průnik uzavřeného kruhu (o poloměru $\sqrt{2}$) a otevřeného kruhu (o poloměru 1).

- (***vnitřek***) $M^\circ:\quad (x+1)^2+y^2 < 2 \ \wedge\ (x-1)^2+y^2 < 1.$
- (***uzávěr***) $\overline{M}:\quad (x+1)^2+y^2 \leq 2 \ \wedge\ (x-1)^2+y^2 \leq 1.$
- (***hranice***) $\partial M = \overline{M} \setminus M^\circ:\quad \Big((x+1)^2+y^2 = 2 \ \wedge\ (x-1)^2+y^2 \leq 1\Big) \ \vee$
  $$\vee\ \Big((x+1)^2+y^2 \leq 2 \ \wedge\ (x-1)^2+y^2 = 1\Big)$$

2.2 Určete vnitřek, hranici a uzávěr množiny z příkladu **1.5**:

$$M: \ (x-1)^2 - y^2 > 1 \ \wedge \ (x-2)^2 + y^2 \leq 4$$

Řešení:
Tento příklad je určený pro "intuitivní" řešení pomocí náčrtů daných množin.

- (***vnitřek***) $M^\circ: \ (x-1)^2 - y^2 > 1 \ \wedge \ (x-2)^2 + y^2 < 4$.
- (***uzávěr***): Musíme si dát pozor na zápis, protože bod $(0,0)$ v uzávěru naší množiny M není, ačkoliv je průnikem hyperboly a kružnice.

$$\overline{M}: \quad (x-1)^2 - y^2 \geq 1 \ \wedge \ (x-2)^2 + y^2 \leq 4 \ \wedge \ (x,y) \neq (0,0) \ .$$

- (***hranice***): Hranice je jeden oblouk kružnice a jeden oblouk hyperboly. Opět si musíme dát pozor na zápis, protože bod $(0,0)$ na hranici naší množiny M není.

$$\partial M: \Big((x-1)^2 - y^2 = 1 \ \wedge \ (x-2)^2 + y^2 \leq 4 \ \wedge \ (x,y) \neq (0,0) \Big) \ \vee$$

$$\vee \ \Big((x-1)^2 - y^2 \geq 1 \ \wedge \ (x-2)^2 + y^2 = 4 \ \wedge \ (x,y) \neq (0,0) \Big)$$

2.3 Určete vnitřek, hranici, vnějšek a uzávěr množiny $\mathbb{Q}^2 \subseteq \mathbb{R}^2$, kde $\mathbb{Q}$ je množina všech racionálních čísel.

Řešení:
Uvědomíme si, že v libovolném okolí (na reálné přímce) libovolného $r \in \mathbb{R}$ leží jak nějaké racionální číslo, tak také nějaké iracionální číslo. Dále pokud máme $|r_i - s_i| < \frac{\varepsilon}{2}$ pro $i = 1, 2$ (kde $r_i, s_i \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$) pak

$$||(r_1, r_2) - (s_1, s_2)|| = \sqrt{(r_1 - s_2)^2 + (r_2 - s_2)^2} \leq \sqrt{\left(\tfrac{\varepsilon}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{\varepsilon}{2}\right)^2} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} < \varepsilon \ .$$

Speciálně tedy v libovolném ε-okolí bodu $a \in \mathbb{R}^2$ leží jak nějaký prvek z $\mathbb{Q}^2$, tak nějaký prvek z $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$. Proto můžeme ihned napsat, že

$$\overline{\mathbb{Q}^2} = \mathbb{R}^2, \quad (\mathbb{Q}^2)^\circ = \emptyset \ \text{ a } \ \partial \mathbb{Q}^2 = \overline{\mathbb{Q}^2} \setminus (\mathbb{Q}^2)^\circ = \mathbb{R}^2.$$

Poznámka: Při zdůvodnění toho, že nějaká množina je otevřená, případně uzavřená, se dá využít následující věta:

Jestliže $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce, pak

- množina $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid f(x_1, \ldots, x_n) > 0\}$ je otevřená

  (množina A je otevřená $\Leftrightarrow$ $A = A^\circ$)

- množina $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid f(x_1, \ldots, x_n) \geq 0\}$ je uzavřená

  (množina A je uzavřená $\Leftrightarrow$ $A = \overline{A}$ $\Leftrightarrow$ doplněk A je otevřená množina).

Můžeme si všimnout, že vnitřek (uzávěr, resp.) jsme v předchozích příkladech často získali tak, že jsme z neostrých nerovností udělali ostré (z ostrých neostré, resp.). Ale POZOR, takhle to obecně nefunguje (viz následující příklad).

2.4 Najděte příklad spojité funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, kdy pro

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) > 0\}$$

a

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) \geq 0\}$$

je

$$\overline{A} \subsetneqq B \quad \text{a} \quad A \subsetneqq B^\circ$$

(neboli: po přidání neostré nerovnosti je uzávěr obecně MENŠÍ a po ubrání neostré nerovnosti je vnitřek obecně VĚTŠÍ.)

Řešení:
Např. můžeme zvolit funkci

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2, & x < 0, \\ 0, & x \in \langle 0, 1 \rangle, \\ -(x-1)^2, & x > 1 \ . \end{cases}$$

Pak je $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0\}$ a $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 1\}$.

Problém vzniká proto, že zatímco vrstevnice

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = c\}$$

pro hladiny $c \neq 0$ jsou křivky (objekty s dimenzí 1), tak pro $c = 0$ je vrstevnice plocha (objekt s dimenzí 2).

Poznámka č. 2: Všimněme si, že problém vzniká v bodech, kde je derivace nulová. Pokud se tomuto vyhneme, pak už můžeme vnitřky i uzávěry vytvářet změnou nerovností:

Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je spojitě diferencovatelná funkce a $c \in \mathbb{R}$. Pokud pro každé $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ takové, že $f(x_1, \dots, x_n) = c$, je $f'(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) \neq (0, \dots, 0)$, pak

- pro $A = \{(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n \mid f(y_1, \dots, y_n) > c\}$ je

$$\overline{A} = \{(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n \mid f(y_1, \dots, y_n) \geq c\}$$

- a pro $B = \{(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n \mid f(y_1, \dots, y_n) \geq c\}$ je

$$B^\circ = \{(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n \mid f(y_1, \dots, y_n) > c\}.$$