3. cvičení z Matematické analýzy 2

5. - 9. října 2020

Příklady **2.2**, **2.3**.

3.1 Určete vnitřek, hranici a uzávěr definičních oborů funkcí z příkladu **1.4**, tj. množin:

(a) $M: \ (x > 0 \ \wedge \ y - x > 1) \ \vee \ (x < 0 \ \wedge \ 0 < y - x < 1)$

(b) $M: \ (x+1)^2 + y^2 \geq 1 \ \wedge \ (x-1)^2 + y^2 > 1$

Řešení:
Tento příklad je určený pro "intuitivní" řešení pomocí náčrtů daných množin.

(a)

- (***vnitřek***): Množina M je zadána ostrými nerovnostmi, je tedy otevřená a proto $M^\circ = M$.
- (***uzávěr***) $\overline{M}: \quad (x \geq 0 \ \wedge \ y - x \geq 1) \ \vee \ (x \leq 0 \ \wedge \ 0 \leq y - x \leq 1)$
- (***hranice***) $\partial M: \quad y = x + 1 \ \vee \ (y = x \ \wedge \ x \leq 0) \ \vee \ (x = 0 \ \wedge \ y \geq 0)$
  (Hranice jsou části přímek.)

(b)

- (***vnitřek***) $M^\circ: \ (x+1)^2 + y^2 > 1 \ \wedge \ (x-1)^2 + y^2 > 1.$
- (***uzávěr***) $\overline{M}: \ (x+1)^2 + y^2 \geq 1 \ \wedge \ (x-1)^2 + y^2 \geq 1.$
- (***hranice***) $\partial M = \overline{M} \setminus M^\circ: \quad (x+1)^2 + y^2 = 1 \ \vee \ (x-1)^2 + y^2 = 1$

Připomenutí:
Jestliže chceme zjišťovat, jak se chová funkce v okolí nějakého bodu ve smyslu limity, pak se k tomuto bodu potřebujeme přiblížit pomocí bodu z definičního oboru dané funkce. Přitom však tyto body chceme mít jiné, než je samotný původní bod, ve kterém limitu zjišťujeme. To vede k následujícím pojmům:

- *Prstencovým okolím* $P_\varepsilon(a_0)$ s poloměrem $\varepsilon > 0$ a středem v bodě $a_0 \in \mathbb{R}^n$ označujeme množinu
$$P_\varepsilon(a_0) \stackrel{\text{def}}{=} U_\varepsilon(a_0) \setminus \{a_0\} = \{a \in \mathbb{R}^n \mid 0 < ||a - a_0|| < \varepsilon\}$$
- bod a_0 je *hromadným bodem množiny* M, jestliže v každém sveém okolí má nějaký bod této množiny, ale jiný než a_0, tj.:
$$(\exists \ \varepsilon > 0) \ \ P_\varepsilon(a) \cap M \neq \emptyset$$
  (hromadný bod je tedy určitě bodem uzávěru množiny M, ale není "osamocený")

Limita funkce je nyní definována takto:
Nechť $f : D \to \mathbb{R}$ je funkce s definičním oborem $D \subseteq \mathbb{R}^n$ a $a_0 \in \mathbb{R}^n$ je hromadný bod tohoto definičního oboru D. Následující definice a značení znamená, že hodnota $c \in \mathbb{R}$ je limitou funkce f v bodě a_0:

$$\lim_{a \to a_0} f(a) = c \ \stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \ (\forall \ \varepsilon > 0)(\exists \ \delta > 0)(\forall a \in D) \quad \underbrace{0 < \|a - a_0\| < \delta}_{a \in P_\delta(a_0)} \ \Rightarrow \ \underbrace{|f(a) - c| < \varepsilon}_{f(a) \in U_\varepsilon(c)}$$

(tj. když jsme v dostatečně malém prstencovém okolí bodu a_0, pak se body odsud zobrazují funkcí f do zvoleného malého okolí hodnoty c.)

3.2 Vyšetřete existenci limity $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)^2}{x-y}$.

Řešení:
Definiční obor funkce $f(x,y) = \frac{(x+y)^2}{x-y}$ je

$$D(f): \quad x \neq y \ .$$

Bod $(0,0)$ je zřejmě hromadný bod množiny $D(f)$. Abychom zjistili, jakou hodnotu $c \in \mathbb{R}$ by případná limita měla mít, vyzkoušíme se přiblížit k bodu $a_0 = (0,0)$ po vhodné křivce. Nejjednodušší jsou obvykle přímky. Vezměme si tedy přímku $y = kx$, kde $k \neq 1$. Pro $x \to 0$ máme $(x, kx) \to (0,0)$. Takže nás bude zajímat

$$\lim_{x\to 0} f(x,kx) = \lim_{x\to 0} \frac{(x+kx)^2}{x-kx} = \lim_{x\to 0} \frac{(1+k)^2}{1-k} x = 0 \ .$$

Pokud naše původní limita existuje musí mít tedy hodnotu $c = 0$ (to, že jsme prověřili přímky a dostali stejnou hodnotu, ale ještě nic o existenci limity nerika!).

Můžeme se pokusit najít jiná přiblížení (viz níže) anebo můžeme využít jednoduché kritérium pro neexistenci (konečné) limity (viz Poznámky k limitám):

- $f(x,y) = \frac{h(x,y)}{g(x,y)}$, kde $h(x,y) = (x+y)^2$ a $g(x,y) = x - y$ jsou spojité funkce
- položme $M: \ x = y \ \wedge \ (x,y) \neq (0,0)$
- pro každé $a \in M$ je $g(a) = 0$ a $h(a) \neq 0$
- $a_0 = (0,0)$ je hromadný bod množiny M

Pak NEEXISTUJE (konečná) limita $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

(Vzhledem k už nalezené limitě 0 při nějakém přiblížení z toho vyplývá, že ani případná "nekonečná" limita nemůže existovat.)

Zjistili jsme tedy, že $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)^2}{x-y}$ neexistuje.

Poznámka: Jestliže chceme najít přiblížení, pro které vyjde jiná hodnota než 0, můžeme v tomto případě zkusit "variaci konstanty k" a vzít křivku ve tvaru $y(x) = k(x) \cdot x$, kde $k(x)$ je zatím neznámá funkce a kdy chceme, aby pro $x \to 0$ bylo také $y(x) \to 0$. Křivku dosadíme do funkce:

$$f(x, y(x)) = \frac{\big(x + k(x) \cdot x\big)^2}{x - k(x) \cdot x} = \frac{\big(1 + k(x)\big)^2}{1 - k(x)} \cdot x$$

Nyní bude stačit, když se např. $\frac{x}{1-k(x)}$ bude blížit k nenulové hodnotě $d \in \mathbb{R}$ a současně i $\big(1+k(x)\big)^2$ se bude blížit ke konečné nenulové hodnotě.

Stačí položit $\frac{x}{1-k(x)} = d$, tj. $k(x) = 1 - \frac{x}{d}$. Musíme ještě ověřit, že v tomto případě je křivka

$$y(x) = k(x) \cdot x = \left(1 - \frac{x}{d}\right) x$$

stále v definičním oboru $D(f)$ (což by stačilo i jen pro x blízká k 0). To je ale ihned vidět. Dále také zřejmě je $y(x) \to 0$ pro $x \to 0$.

A nakonec vidíme, že

$$f\big(x, y(x)\big) = \cdots = \frac{\big(1 + k(x)\big)^2}{1 - k(x)} \cdot x = d\left(2 - \frac{x}{d}\right)^2 \ \overset{x\to 0}{\longrightarrow} \ 4d$$

což je kýžený výsledek.

Současně si všimněme, že k bodu $(0,0)$ se blížíme v tomto případě po parabole $y(x) = x - \frac{x^2}{d}$ jejíž tečna v bodě $(0,0)$ je právě přímka $y = x$, kterou jsme vyloučili z definičního oboru $D(f)$. Toto je v jistém smyslu i návod pro jiné příklady - hledejme křivky "napodobující" hranici definičního oboru v daném bodě.

3.3 Vyšetřete existenci limity $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x+y}$.

Řešení:
Budeme postupovat podobně jako v příkladu **2.7**. Definiční obor funkce $f(x,y) = \frac{xy}{x+y}$ je

$$D(f): \quad x \neq -y \ .$$

Bod $(0,0)$ je zřejmě hromadný bod množiny $D(f)$. Při pohledu na funkci můžeme rovnou využít kritérium pro neexistenci (konečné) limity (viz Poznámky k limitám):

- $f(x,y) = \frac{h(x,y)}{g(x,y)}$, kde $h(x,y) = xy$ a $g(x,y) = x + y$ jsou spojité funkce
- položme $M: \ x = -y \ \wedge \ (x,y) \neq (0,0)$
- pro každé $a \in M$ je $g(a) = 0$ a $h(a) \neq 0$
- $a_0 = (0,0)$ je hromadný bod množiny M

Pak NEEXISTUJE (konečná) limita $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

(Kromě toho při přiblížení po přímce $y = x$ máme $f(x,x) = \frac{x^2}{x+x} = \frac{x}{2} \overset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, takže ani případná "nekonečná" limita neexistuje.)

Zjistili jsme tedy, že $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x+y}$ neexistuje.

Poznámka:

(a) Přiblížení, pro které vyjde jiná hodnota než 0, můžeme opět zkusit hledat ve tvaru $y(x) = k(x) \cdot x$, kde $k(x)$ je zatím neznámá funkce a kdy chceme, aby pro $x \to 0$ bylo také $y(x) \to 0$. Křivku dosadíme do funkce:

$$f\big(x, y(x)\big) = \frac{k(x) \cdot x^2}{x + k(x) \cdot x} = \frac{k(x)}{1 + k(x)} \cdot x$$

Nyní bude stačit, když se $\frac{x}{1+k(x)}$ bude blížit k nenulové hodnotě $d \in \mathbb{R}$ a současně i $k(x)$ se bude blížit ke konečné nenulové hodnotě.
Stačí proto položit $\frac{x}{1+k(x)} = d$, tj. $k(x) = \frac{x}{d} - 1$. Křivka

$$y(x) = k(x) \cdot x = \left(\frac{x}{d} - 1\right) x$$

pro $x \neq 0$ je pak stále v definičním oboru $D(f)$. Dále také zřejmě je $y(x) \to 0$ pro $x \to 0$.
A po dosazení dostaneme

$$f\big(x, y(x)\big) = \cdots = \frac{k(x)}{1 + k(x)} \cdot x = x - d \overset{x\to 0}{\longrightarrow} -d$$

což jsme potřebovali.
Současně si všimněme, že k bodu $(0,0)$ se opět blížíme po parabole $y(x) = \frac{x^2}{d} - x$ jejíž tečna v bodě $(0,0)$ je právě přímka $y = -x$, kterou jsme vyloučili z definičního oboru $D(f)$.

(b) Vhodné přiblížení můžeme hledat i pomocí polárních souřadnic (a to obvykle tak, že parametrem bude úhel φ, pro který budeme hledat vhodnou funkci vzdálenosti $\varrho(\varphi)$):

$$x(\varphi) = \varrho(\varphi) \cos\varphi$$
$$y(\varphi) = \varrho(\varphi) \sin\varphi$$

tak, aby $\varrho(\varphi) \to 0$ pro $\varphi \to \varphi_0$ pro nějaké vhodné $\varphi_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ neboť chceme mít $\big(x(\varphi), y(\varphi)\big) \overset{\varphi\to\varphi_0}{\longrightarrow} (0,0)$ (což je bod, kde limitu hledáme).
Opět dosadíme

$$f\big(x(\varphi), y(\varphi)\big) = \frac{\varrho^2(\varphi)\cos\varphi\sin\varphi}{\varrho(\varphi)\cdot(\cos\varphi + \sin\varphi)} = \frac{\cos\varphi\sin\varphi}{\cos\varphi+\sin\varphi}\varrho(\varphi)$$

Potřebujeme nějak vyvážit, to že $\varrho(\varphi) \to 0$, a jako jediná protiváha se nabízí výraz $\cos\varphi + \sin\varphi$ ve jmenovateli zlomku. Proto zvolíme φ_0 tak, aby $\cos\varphi_0 + \sin\varphi_0 = 0$, tedy např. $\varphi_0 = -\frac{\pi}{4}$.

Dále pro $0 \neq d \in \mathbb{R}$ položíme zase $\frac{\varrho(\varphi)}{\cos\varphi+\sin\varphi} = d$, čímž dostaneme $\varrho(\varphi) := d(\cos\varphi + \sin\varphi)$ a skutečně je pak $\varrho(\varphi) \to 0$ pro $\varphi \to -\frac{\pi}{4}$.
Současně opět (díky tomu, že $\varphi \neq -\frac{\pi}{4}$ a hodnoty φ jsou blízké k $-\frac{\pi}{4}$) budeme mít, že křivka

$$x(\varphi) = d(\cos\varphi + \sin\varphi)\cos\varphi$$
$$y(\varphi) = d(\cos\varphi + \sin\varphi)\sin\varphi$$

je v definičním oboru $D(f)$ (protože pouze body na přímce $y = -x$ mají úhel buď $-\frac{\pi}{4}$ nebo $\frac{3\pi}{4}$).
Zbývá už jen zjistit, k čemu se budou blížit hodnoty funkce f pro tuto křivku:

$$f\big(x(\varphi), y(\varphi)\big) = \cdots = \frac{\cos\varphi\sin\varphi}{\cos\varphi+\sin\varphi}\varrho(\varphi) = d\cos\varphi\sin\varphi \quad \overset{\varphi\to-\frac{\pi}{4}}{\longrightarrow} \quad -d\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{d}{2}$$

což jsme opět potřebovali.
Opět si všimněme, že úhel φ průvodiče křivky se zase přibližuje k úhlu přímky $y = -x$, která je vyřazena z definičního oboru $D(f)$.

3.4 Zjistěte, zda existují následující limity a pokud ano, určete jejich hodnotu:

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+xy+y^2}{x^2-y^2}$,

(b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{|x|+|y|}$,

(c) $\lim\limits_{(x,y)\to(4,0)} \frac{\operatorname{tg}(xy)}{y}$.

Řešení:
(a) Definiční obor funkce $f(x,y) = \frac{x^2+xy+y^2}{x^2-y^2}$ je

$$D(f): \quad x \neq y \ \wedge \ x \neq -y.$$

Bod $(0,0)$ je zřejmě hromadný bod množiny $D(f)$. Z tvaru funkce f už snadno vidíme, že na přímce $x = y$ se jmenovatel zlomku vynuluje a čitatel ne (až na bod $(0,0)$). Takže můžeme použít jednoduché kritérium pro neexistenci (konečné) limity (viz Poznámky k limitám):

- $f(x,y) = \frac{h(x,y)}{g(x,y)}$, kde $h(x,y) = x^2 + xy + y^2$ a $g(x,y) = x^2 - y^2$ jsou spojité funkce
- položme $M: \ x = y \ \wedge \ (x,y) \neq (0,0)$
- pro každé $a \in M$ je $g(a) = 0$ a $h(a) \neq 0$
- $a_0 = (0,0)$ je hromadný bod množiny M

Pak NEEXISTUJE (konečná) limita $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Pro pořádek si ještě spočítejme alespoň jedno přiblížení, abychom věděli, že ani případná "nekonečná" limita nemůže existovat:

Vyzkoušíme se přiblížit k bodu $a_0 = (0,0)$ po přímce $y = kx$, kde $k \neq \pm 1$. Pro $x \to 0$ máme $(x, kx) \to (0,0)$. Takže nás zajímá

$$\lim_{x\to 0} f(x, kx) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + kx^2 + k^2x^2}{x^2 - k^2x^2} = \frac{1 + k + k^2}{1 - k^2} \ .$$

I z tohoto výsledku už vidíme, že např. pro $k = 0$ je limita 1 a pro $k = 2$ je zase $-\frac{7}{3}$. Takže i toto nám ukazuje, že limita $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+xy+y^2}{x^2-y^2}$ prostě neexistuje.

- -

(b) Definiční obor funkce $f(x,y) = \frac{xy}{|x|+|y|}$ je

$$D(f): \quad (x,y) \neq (0,0).$$

Tedy jmenovatel ve zlomku se vynuluje jen v jediném bodě. Nemáme tudíž možnost použít kritérium pro neexistenci limity (nemáme totiž dost velkou množinu, co by vynulovala jmenovatel). Zde vidíme, jak důležité pro další úvahy je určit si definiční obor funkce.

Co teď dál? Funkce ve jmenovateli by (bez absolutních hodnot) byla vlastně polynomem se stupněm 1. Na druhé straně v čitateli je zase polynom se stupněm 2, který by nejspíš měl převážit jmenovatele. Tušíme tedy, že by limita mohla existovat (a být nulová).

Zkusíme si to na nějakém přiblížení, např. po ose x (tj. při $y = 0$):

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

Tedy jediný kandidát na limitu je $c = 0$. Teď ukážeme, že to skutečně limita je. Použijeme přitom tyto odhady:

$$|x|, |y| \leq \underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{\|(x,y)-(0,0)\|} \leq |x| + |y|$$

Pro $(x,y) \neq (0,0)$ tak dostaneme

$$0 \leq \left| f(x,y) - \underbrace{c}_{=0} \right| = \frac{|x|\cdot|y|}{|x|+|y|} \leq \frac{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}{|x|+|y|} \leq \frac{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2}$$

Z věty o limitě sevřené funkce pak máme, že

$$0 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 \ \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| f(x,y) - c \right| \ \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2} \ = 0$$

kde jsme použili to, že funkce $g(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ je spojitá, protože je to složení spojitých funkcí (polynom, odmocnina).

Nebo-li dokázali jsme, že $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = c = 0$.

Obecnější způsob: Existenci limity $\lim\limits_{a\to a_0} f(a) = c$ si ještě procvičíme pomocí její definice. Má tedy platit, že

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall a \in D(f) \quad 0 < \|a - a_0\| < \delta \ \Rightarrow \ |f(a) - c| < \varepsilon \ .$$

Opět použijeme stejný odhad pro $c = 0$:

$$\big|f(x,y) - c\big| = \big|f(x,y)\big| \leq \cdots \leq \sqrt{x^2+y^2} = \|(x,y)-(0,0)\|$$

Pro $\varepsilon > 0$ teď stačí vzít $\delta := \varepsilon$ a pak pro $a_0 = (0,0)$ a $a = (x,y)$ takové, že $0 < \|a - a_0\| < \delta$ určitě máme, že

$$|f(a) - 0| \leq \cdots \leq \|a - a_0\| < \delta = \varepsilon\ .$$

- -

(c) Definiční obor funkce $f(x,y) = \frac{\mathrm{tg}(xy)}{y}$ je

$$D(f): \quad xy \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad \wedge \quad y \neq 0.$$

Bod $a_0 := (4,0)$ je zřejmě hromadný bod množiny $D(f)$. Protože nás zajímá $(x,y) \to (4,0)$, tak hodnoty x v nějakém okolí bodu $(4,0)$ jsou nenulové. Proto (pro body z $D(f)$ v nějakém okolí a_0) můžeme psát

$$f(x,y) = \frac{\mathrm{tg}(xy)}{y} = \frac{\mathrm{tg}(xy)}{xy} \cdot x$$

což jsme takto udělali proto, abychom mohli vyšetřit $\lim\limits_{(x,y)\to(4,0)} \underbrace{\frac{\mathrm{tg}(xy)}{xy}}_{=F(x,y)}$ pomocí věty o limitě složené funkce. Ta nám říká, že pokud

- $F(x,y) = h(g(x,y))$, kde $g(x,y) = xy$ a $h(z) = \frac{\mathrm{tg}(z)}{z}$.
- $\lim\limits_{(x,y)\to a_0} g(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(4,0)} xy = 0\ (=: b_0)$ (neboť g je součin spojitých funkcí)
- $\lim\limits_{z\to b_0} h(z) = \lim\limits_{z\to 0} \underbrace{\frac{\sin(z)}{z}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{\cos(z)}}_{\to 1} = 1\ (=: c)$
- a pokud (pro korektní použití) máme ještě zajištěno,
  - ∗ že buď v prstencovém okolí $P_\varepsilon(a_0)$ bodu $a_0 = (4,0)$ je $g(a) \neq b_0$ pro $a \in P_\varepsilon(a_0) \cap D(g)$ (což snadno zajistíme tím, že omezíme definiční obor funkce g z celého $\mathbb{R}^2$ jen na $D(g) : y \neq 0$, a i potom stále ještě budeme mít $D(g) \supseteq D(F)$)
  - ∗ nebo že funkce h je spojitá v $b_0 = 0$ (což zajistíme tím, že funkci h spojitě dodefinujeme v $b_0 = 0$).

pak $\lim\limits_{(x,y)\to a_0} F(x,y) = c$.

Zjistili jsme tedy, že

$$\lim_{(x,y)\to(4,0)} \frac{\mathrm{tg}(xy)}{xy} = 1$$

a tudíž

$$\lim_{(x,y)\to(4,0)} \frac{\mathrm{tg}(xy)}{y} = \lim_{(x,y)\to(4,0)} \underbrace{\frac{\mathrm{tg}(xy)}{xy}}_{\to 1} \cdot \underbrace{x}_{\to 4} = 4\ .$$

3.5 Zjistěte, zda existují následující limity a pokud ano, určete jejich hodnotu:

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}$,

(b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{x^2y^2}$,

(c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^3}$.

Řešení:

(a) Definiční obor funkce $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}$ je

$$D(f): \quad (x,y) \neq (0,0).$$

Tedy jmenovatel ve zlomku se vynuluje jen v jediném bodě. Nemáme tudíž možnost použít kritérium pro neexistenci limity (nemáme totiž dost velkou množinu, co by vynulovala jmenovatel).

Co teď dál? Funkce ve jmenovateli je polynomem se stupněm 2, funkce v čitateli je zase polynom se stupněm 3, který by měl převážit jmenovatele. Tušíme tedy, že by limita mohla existovat (a být nulová).

Zkusíme si nějaké přiblížení, např. po ose x (tj. při $y = 0$):

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

Tedy jediný kandidát na limitu je $c = 0$. Teď ukážeme, že to skutečně limita je a to (opět) pomocí odhadu:

$$|x|, |y| \leq \sqrt{x^2+y^2}$$

Pro $(x,y) \neq (0,0)$ tak dostaneme

$$0 \leq \big|f(x,y) - \underbrace{c}_{=0}\big| = \frac{|x|^2 \cdot |y|}{x^2+y^2} \leq \frac{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3}{x^2+y^2} = \sqrt{x^2+y^2}$$

Z věty o limitě sevřené funkce pak máme, že

$$0 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 \;\leq\; \lim_{(x,y)\to(0,0)} \big|f(x,y) - c\big| \;\leq\; \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2} \;= 0$$

kde jsme použili to, že funkce $g(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ je spojitá, protože je to složení spojitých funkcí (polynom, odmocnina).

Nebo-li dokázali jsme, že $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = c = 0$.

Ještě pomocí polárních souřadnic: Můžeme ještě použít odhad pomocí polárních souřadnic (který ale vlastně nepřináší v tomto případě nic nového): body (x,y) v okolí $a_0 = (0,0)$ vyjádříme jako

$$x = \varrho\cos\varphi \quad \text{a} \quad y = \varrho\sin\varphi$$

a dosadíme:

$$0 \leq \big|f(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi) - \underbrace{c}_{=0}\big| = \frac{|\varrho\sin\varphi|^2 \cdot |\varrho\cos\varphi|}{\varrho^2} = \varrho \cdot \underbrace{|\sin\varphi|^2}_{\leq 1} \cdot \underbrace{|\cos\varphi|}_{\leq 1} \leq \varrho =: g(\varrho)$$

Nyní, protože $\lim\limits_{\varrho\to 0_+} g(\varrho) = 0$ vyplývá z toho (viz Poznámky k limitám), že $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = c = 0$.

(b) Pro funkci $f(x,y) = (x^2+y^2)^{x^2y^2} = e^{x^2y^2\ln(x^2+y^2)}$ je její definiční obor

$$D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

Stačí tedy zjistit $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x^2y^2\ln(x^2+y^2)$. Zkusíme si přiblížení, např. po ose x (tj. při $y=0$):

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

Tedy jediný kandidát na limitu je $c=0$. Ze zkušenosti s limitami můžeme už tušit, že limita bude existovat. Použijeme odhad:

$$|x|, |y| \le \sqrt{x^2+y^2}$$

a z něj máme

$$0 \le \left|x^2y^2\ln(x^2+y^2)\right| \le (x^2+y^2)^2 \cdot \left|\ln(x^2+y^2)\right|.$$

Použitím věty o limitě složené funkce pro předpoklady

- $g(x,y) = x^2+y^2$ a $h(z) = z^2\ln z$
- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0 \ (= b_0)$
- $\lim\limits_{z\to(b_0)_+} h(z) = \lim\limits_{z\to 0_+} z^2\ln z = 0 \quad \stackrel{\text{L'Hospital}}{\Longleftarrow} \quad \lim\limits_{z\to 0_+} \frac{(\ln z)'}{(z^{-2})'} = \lim\limits_{z\to 0_+} \frac{z^{-1}}{-2z^{-3}} = \lim\limits_{z\to 0_+} \frac{z^2}{-2} = 0$
- v prstencovém okolí bodu $(0,0)$ je $g(x,y) \ne b_0$

dostáváme

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^2\ln(x^2+y^2) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} h(g(x,y)) = 0.$$

Z věty o limitě sevřené funkce pak máme

$$0 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 \ \le \ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|x^2y^2\ln(x^2+y^2)\right| \ \le \ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|(x^2+y^2)^2\cdot\ln(x^2+y^2)\right| = 0$$

tedy

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2y^2\ln(x^2+y^2) = 0$$

a konečně pak

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{x^2y^2} = e^0 = 1.$$

Ještě pomocí polárních souřadnic: Můžeme opět použít odhad pomocí polárních souřadnic (ale ani zde nedostaneme nic nového): body (x,y) v okolí $a_0 = (0,0)$ vyjádříme jako

$$x = \varrho\cos\varphi \quad \text{a} \quad y = \varrho\sin\varphi$$

a dosadíme:

$$0 \le \left|x^2y^2\ln(x^2+y^2)\right| = \varrho^4\cos^2\varphi\sin^2\varphi\ln(\varrho^2) \le \varrho^4\ln(\varrho^2) =: g(\varrho)$$

A protože $\lim\limits_{\varrho\to 0_+} g(\varrho) = \lim\limits_{\varrho\to 0_+} 2\varrho^4\ln\varrho = 0$ (viz výše) vyplývá z toho (viz Poznámky k limitám), že

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2y^2\ln(x^2+y^2) = 0\ .$$

A zbytek by byl stejný.

(c) Definiční obor funkce $f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^3}$ je

$$D(f): \quad y^3 \ne -x^2\ .$$

Bod $(0,0)$ je zřejmě hromadný bod množiny $D(f)$. Z tvaru funkce f snadno vidíme, že na křivce $y = -\sqrt[3]{x^2}$ se jmenovatel zlomku vynuluje a čitatel ne (až na bod $(0,0)$). Takže můžeme použít jednoduché kritérium pro neexistenci (konečné) limity (viz Poznámky k limitám):

- $f(x,y) = \frac{h(x,y)}{g(x,y)}$, kde $h(x,y) = x^2y^2$ a $g(x,y) = x^2 + y^3$ jsou spojité funkce
- položme $M: \ y = -\sqrt[3]{x^2} \ \wedge \ (x,y) \neq (0,0)$
- pro každé $a \in M$ je $g(a) = 0$ a $h(a) \neq 0$
- $a_0 = (0,0)$ je hromadný bod množiny M

Pak NEEXISTUJE (konečná) limita $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Pro pořádek si ještě spočítejme alespoň jedno přiblížení, abychom věděli, že ani případná "nekonečná" limita nemůže existovat:

Vyzkoušíme se přiblížit k bodu $a_0 = (0,0)$ po přímce $y = kx$, kde $k \in \mathbb{R}$. Pro $x \to 0$ máme $(x,kx) \to (0,0)$. Takže dostaneme

$$\lim_{x\to 0} f(x,kx) = \lim_{x\to 0} \frac{k^2x^4}{x^2 + k^3x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{k^2x^2}{1 + k^3x} = 0 \ .$$

Proto ani "nekonečná" limita neexistuje.

Celkově máme, že $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^3}$ neexistuje.