4. cvičení z Matematické analýzy 2

12. - 16. října 2020

4.1 Zjistěte, zda existují následující limity a pokud ano, určete jejich hodnotu:

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \frac{4(x-1)^2+3y^2}{|x-1|+y}$,

(b) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(1,1,1)} \frac{xz^2-y^2z}{xyz-1}$.

Řešení:
(a) Definiční obor funkce $f(x,y) = \frac{4(x-1)^2+3y^2}{|x-1|+y}$ je

$$D(f): \quad y \neq -|x-1|$$

což znamená, že z roviny musíme vyjmout graf funkce ve tvaru absolutní hodnoty. Bod $(1,0)$ je evidentně hromadným bodem $D(f)$. V limitě se čitatel i jmenovatel blíží k nule. Můžeme zkusit přiblížení po přímkách procházejících tímto bodem, které budou tvaru $y = k(x-1)$, kde $k \neq \pm 1$. Zjistíme, že všechny dávají limitu 0.

Přesto ale (konečná) limita *neexistuje*. K tomu stačí použít jednoduché kritérium pro neexistenci (konečné) limity (viz Poznámky k limitám):

- $f(x,y) = \frac{h(x,y)}{g(x,y)}$, kde $h(x,y) = 4(x-1)^2 + 3y^2$ a $g(x,y) = |x-1| + y$ jsou spojité funkce
- položme $M: \; y = -|x-1| \;\wedge\; (x,y) \neq (1,0)$
- pro každé $a \in M$ je $g(a) = 0$ a $h(a) \neq 0$
- $a_0 = (1,0)$ je hromadný bod množiny M

Pak NEEXISTUJE (konečná) limita $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y)$.

A protože už z alespoň jednoho přiblížení máme hodnotu 0, tak ani případná "nekonečná" limita nemůže existovat.

- -

(b) Pro funkci $f(x,y,z) = \frac{xz^2-y^2z}{xyz-1}$ je její definiční obor

$$D_f: \quad xyz \neq 1$$

a bod $(1,1,1)$ je tedy hromadným bodem D_f. Stupně polynomů v čitateli i jmenovateli jsou stejné, takže spíš zkusíme, jestli limita vůbec existuje.

Zúžením f na přímku $x = y = z$ (bez bodu $(x,y,z) = (1,1,1)$) dostáváme $f(x,x,x) = \frac{x^3-x^3}{x^3-1} = 0$, takže

$$\lim_{\substack{(x,y,z)\to(1,1,1)\\ x=y=z}} f(x,y,z) = \lim_{x\to 1} f(x,x,x) = 0 \,.$$

Na druhou stranu zúžením f na přímku $x = y = 1$ (opět bez bodu $(x,y,z) = (1,1,1)$) dostáváme $f(1,1,z) = \frac{z^2-z}{z-1} = z$, takže

$$\lim_{\substack{(x,y,z)\to(1,1,1)\\ x=y=1}} f(x,y,z) = \lim_{z\to 1} f(1,1,z) = \lim_{z\to 1} z = 1 \,.$$

Původní limita tedy NEEXISTUJE.

Můžeme také použít kritérium pro neexistenci limity:

- $f(x, y, z) = \frac{h(x,y,z)}{g(x,y,z)}$, kde $h(x, y, z) = (xz - y^2)z$ a $g(x, y, z) = xyz - 1$ jsou spojité funkce
- položme $M: \; xyz = 1 \; \wedge \; y \neq 1$
- pro každé $a \in M$ je $g(a) = 0$ a $h(a) \neq 0$
- $a_0 = (1, 1, 1)$ je hromadný bod množiny M

Pak (konečná) limita $\lim\limits_{a \to a_0} f(a)$ neexistuje.

4.2 Zjistěte, zda existují následující limity a pokud ano, určete jejich hodnotu:

(a) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,1,0)} \frac{\sin(xy^2z^3)}{xyz}$,

(b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y}{y^2+x}$,

(c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x + y) \sin\left(\frac{1}{x}\right) \sin\left(\frac{1}{y}\right)$.

Řešení:

(a) Definiční obor funkce $f(x, y, z) = \frac{\sin(xy^2z^3)}{xyz}$ je

$$D(f): \quad x \neq 0 \quad \wedge \quad y \neq 0 \quad \wedge \quad z \neq 0 \, .$$

Bod $a_0 := (0, 1, 0)$ je zřejmě hromadný bod množiny $D(f)$. Pro body $(x, y, z) \in D(f)$ můžeme psát

$$f(x, y, z) = \frac{\sin(xy^2z^3)}{xy^2z^3} \cdot yz^2$$

což jsme takto udělali proto, abychom mohli vyšetřit $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,1,0)} \underbrace{\frac{\sin(xy^2z^3)}{xy^2z^3}}_{=F(x,y,z)}$ pomocí věty o limitě složené funkce. Ta nám říká, že pokud

- $F(x, y, z) = h\big(g(x, y, z)\big)$, kde $g(x, y, z) = xy^2z^3$ a $h(z) = \frac{\sin z}{z}$.
- $\lim\limits_{(x,y,z)\to a_0} g(x, y, z) = \lim\limits_{(x,y,z)\to(0,1,0)} xy^2z^3 = 0 \; (=: b_0)$ (neboť g je součin spojitých funkcí)
- $\lim\limits_{z\to b_0} h(z) = \lim\limits_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} = 1 \; (=: c)$
- a (pro korektní použití) existuje prstencové okolí $P_\varepsilon(a_0)$ bodu $a_0 = (0, 1, 0)$ takové, že pro každé $a \in P_\varepsilon(a_0) \cap D(g)$ je $g(a) \neq b_0$

  (což snadno zajistíme tím, že prostě omezíme definiční obor funkce g z celého $\mathbb{R}^3$ na $D(F)$, tj. $D(g): \quad x \neq 0 \quad \wedge \quad y \neq 0 \quad \wedge \quad z \neq 0$)

pak $\lim\limits_{(x,y,z)\to a_0} F(x, y, z) = c$.

Zjistili jsme tedy, že

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,1,0)} \frac{\sin(xy^2z^3)}{xy^2z^3} = 1$$

a tudíž

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,1,0)} \frac{\sin(xy^2z^3)}{xyz} = \lim_{(x,y,z)\to(0,1,0)} \underbrace{\frac{\sin(xy^2z^3)}{xy^2z^3}}_{\to 1} \cdot \underbrace{yz^2}_{\to 0} = 0 \ .$$

- -

(b) Definiční obor funkce $f(x,y) = \frac{x^2+y}{y^2+x}$ je

$$D(f): \quad x \neq -y^2 \ .$$

Bod $(0,0)$ je zřejmě hromadný bod množiny $D(f)$. Z tvaru funkce f už snadno vidíme, že na parabole $x = -y^2$ se jmenovatel zlomku vynuluje a čitatel ne (až na bod $(0,0)$). Takže můžeme použít jednoduché kritérium pro neexistenci (konečné) limity (viz Poznámky k limitám):

- $f(x,y) = \frac{h(x,y)}{g(x,y)}$, kde $h(x,y) = x^2 + y$ a $g(x,y) = y^2 + x$ jsou spojité funkce
- položme $M: \ x = -y^2 \ \wedge \ (x,y) \neq (0,0)$
- pro každé $a \in M$ je $g(a) = 0$ a $h(a) \neq 0$
- $a_0 = (0,0)$ je hromadný bod množiny M

Pak NEEXISTUJE (konečná) limita $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Pro pořádek si ještě spočítejme alespoň jedno přiblížení, abychom věděli, že ani případná "nekonečná" limita nemůže existovat:

Vyzkoušíme se přiblížit k bodu $a_0 = (0,0)$ po přímce $y = kx$, kde $k \in \mathbb{R}$. Pro $x \to 0$ máme $(x,kx) \to (0,0)$. Takže nás zajímá

$$\lim_{x\to 0} f(x,kx) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+kx}{k^2x^2+x} = \lim_{x\to 0} \frac{x+k}{k^2x+1} = k \ .$$

I z tohoto výsledku už vidíme, že limita závisí na přiblížení. Takže i toto nám ukazuje, že limita $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y}{y^2+x}$ prostě neexistuje.

- -

(c) Definiční obor funkce $f(x,y) = (x+y)\sin\left(\frac{1}{x}\right)\sin\left(\frac{1}{y}\right)$ je

$$D(f): \quad x \neq 0 \quad \wedge \quad y \neq 0.$$

Máme zde případ, kdy omezená funkce je násobena funkcí, která má limitu nula. Stačí tedy použít odhad pro $(x,y) \in D(f)$:

$$0 \leq \big|f(x,y)\big| = |x+y| \cdot \underbrace{\left|\sin\left(\tfrac{1}{x}\right)\right|}_{\leq 1} \cdot \underbrace{\left|\sin\left(\tfrac{1}{y}\right)\right|}_{\leq 1} \leq |x+y|$$

Z věty o limitě sevřené funkce pak máme, že

$$0 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 \ \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \big|f(x,y)\big| \ \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} |x+y| \ = 0$$

kde jsme použili to, že funkce $g(x,y) = |x+y|$ je spojitá, protože je to složení spojitých funkcí (abs. hodnota, polynom).

Nebo-li dokázali jsme, že $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

4.3 Zjistěte, zda existují následující limity a pokud ano, určete jejich hodnotu:

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+2y^2}$,

(b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}$,

(c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^3}$.

Řešení:

(a) Definiční obor funkce $f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+2y^2}$ je

$$D(f): \quad (x,y) \neq (0,0).$$

Tedy jmenovatel ve zlomku se vynuluje jen v jediném bodě. Nemůžeme tedy použít kritérium pro neexistenci limity (nemáme totiž dost velkou množinu, co by vynulovala jmenovatele).

Co teď dál? Funkce ve jmenovateli je polynomem se stupněm 2, funkce v čitateli je zase polynom se stupněm $2+2=4$, který by měl převážit jmenovatele. Tušíme tedy, že by limita mohla existovat (a být nulová).

Zkusíme si nějaké přiblížení, např. po ose x (tj. při $y=0$):

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

Tedy jediný kandidát na limitu je $c=0$. Teď ukážeme, že to skutečně limita je a to pomocí odhadu:

$$|x|, |y| \leq \sqrt{x^2+y^2}$$

Pro $(x,y) \neq (0,0)$ tak dostaneme

$$0 \leq \big|f(x,y) - \underbrace{c}_{=0}\big| = \frac{|x|^2 \cdot |y|^2}{x^2+2y^2} \leq \frac{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^4}{x^2+2y^2} \leq \frac{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^4}{x^2+y^2} = x^2+y^2$$

Z věty o limitě sevřené funkce pak máme, že

$$0 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \big|f(x,y) - c\big| \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2+y^2 = 0$$

kde jsme použili to, že funkce $g(x,y) = x^2+y^2$ je spojitá, protože je to polynom.
Nebo-li dokázali jsme, že $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = c = 0$.

(b) Definiční obor funkce $f(x,y) = \frac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}$ je

$$D(f): \quad x \neq 0 \quad \wedge \quad y \neq 0 \quad \wedge \quad xy \neq -1\ .$$

Bod $a_0 := (0,1)$ je zřejmě hromadný bod množiny $D(f)$.

Použijeme větu o limitě složené funkce. Máme, že

- $f(x,y) = h\big(g(x,y)\big)$, kde $g(x,y) = xy$ a $h(z) = \frac{\sqrt{z+1}-1}{z}$.
- $\lim\limits_{(x,y)\to a_0} g(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} xy = 0 \ (=: b_0)$ (neboť g je součin spojitých funkcí)

- $\lim\limits_{z\to b_0} h(z) = \lim\limits_{z\to 0} \frac{\sqrt{z+1}-1}{z} \cdot \frac{\sqrt{z+1}+1}{\sqrt{z+1}+1} = \lim\limits_{z\to 0} \frac{z}{z(\sqrt{z+1}+1)} = \frac{1}{2}$ $(=: c)$
- existuje prstencové okolí $P_\varepsilon(a_0)$ bodu $a_0 = (0,1)$ takové, že pro každé $a \in P_\varepsilon(a_0) \cap D(g)$ je $g(a) \neq b_0$ (což snadno zajistíme tím, že prostě omezíme definiční obor funkce g z celého $\mathbb{R}^2$ na $D(f)$, tj. $D(g): \quad x \neq 0 \quad \wedge \quad y \neq 0 \quad \wedge \quad xy \neq -1$)

a tedy $\lim\limits_{(x,y)\to a_0} f(x,y) = c$.

Zjistili jsme tedy, že

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\sqrt{xy+1}-1}{xy} = \frac{1}{2} \ .$$

- -

(c) Definiční obor funkce $f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^3}$ je

$$D(f): \quad y^3 \neq -x^2 \ .$$

Bod $(0,0)$ je zřejmě hromadný bod množiny $D(f)$. Z tvaru funkce f snadno vidíme, že na křivce $y = -\sqrt[3]{x^2}$ se jmenovatel zlomku vynuluje a čitatel ne (až na bod $(0,0)$). Takže můžeme použít jednoduché kritérium pro neexistenci (konečné) limity (viz Poznámky k limitám):

- $f(x,y) = \frac{h(x,y)}{g(x,y)}$, kde $h(x,y) = x^2y^2$ a $g(x,y) = x^2 + y^3$ jsou spojité funkce
- položme $M: \ y = -\sqrt[3]{x^2} \ \wedge \ (x,y) \neq (0,0)$
- pro každé $a \in M$ je $g(a) = 0$ a $h(a) \neq 0$
- $a_0 = (0,0)$ je hromadný bod množiny M

Pak NEEXISTUJE (konečná) limita $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Pro pořádek si ještě spočítejme alespoň jedno přiblížení, abychom věděli, že ani případná "nekonečná" limita nemůže existovat:

Vyzkoušíme se přiblížit k bodu $a_0 = (0,0)$ po přímce $y = kx$, kde $k \in \mathbb{R}$. Pro $x \to 0$ máme $(x,kx) \to (0,0)$. Takže dostaneme

$$\lim_{x\to 0} f(x,kx) = \lim_{x\to 0} \frac{k^2x^4}{x^2+k^3x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{k^2x^2}{1+k^3x} = 0 \ .$$

Proto ani "nekonečná" limita neexistuje.

Celkově máme, že $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^3}$ neexistuje.

4.4 Vyšetřete existenci limit:

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$.

(b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4y^2}{x^8+y^4}$.

(c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|^\alpha |y|^\beta}{|x|^\gamma + |y|^\delta}$, kde $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$.

Řešení:

(a) Definiční obor funkce $f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}$ je

$$D(f): \quad (x,y) \neq (0,0) \ .$$

Bod $(0,0)$ je zřejmě hromadný bod množiny $D(f)$. Abychom zjistili, jakou hodnotu by případná limita měla mít, vyzkoušíme se přiblížit k počátku po různých přímkách, konkrétně po přímkách $y = kx$, kde $k \in \mathbb{R}$. Pak máme

$$\lim_{x \to 0} f(x, kx) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x^2 + k^2 x^2} = \frac{1}{1+k^2} \ .$$

Tato hodnota je ale různá pro různé k. Původní limita funkce f tedy neexistuje.

- -

(b) Definiční obor funkce $f(x,y) = \frac{x^4y^2}{x^8+y^4}$ je

$$D(f): \quad (x,y) \neq (0,0) \ .$$

Bod $(0,0)$ je zřejmě hromadný bod množiny $D(f)$. Abychom zjistili, jakou hodnotu by případná limita měla mít, vyzkoušíme se přiblížit k počátku po různých přímkách, konkrétně po přímkách $y = kx$, kde $k \in \mathbb{R}$. Pak máme

$$\lim_{x \to 0} f(x, kx) = \lim_{x \to 0} \frac{k^2x^6}{x^8 + k^4 x^4} = \lim_{x \to 0} \frac{k^2x^2}{x^4 + k^4} = 0 \ .$$

Vypadá to, že limita by mohla být $c = 0$, ale na druhé straně polynom v čitateli má stupeň $4+2 = 6$ a ve jmenovateli zase stupeň 8. Abychom lépe pochopili, jak se funkce chová, vyrovnáme vhodnou substitucí stupně mocnin x a y ve jmenovateli:

$$f(|x|^{\frac{1}{8}}, |y|^{\frac{1}{4}}) = \frac{|x|^{\frac{4}{8}} \cdot |y|^{\frac{2}{4}}}{|x| + |y|} = \frac{\sqrt{|x| \cdot |y|}}{|x| + |y|}$$

Teď už je vidět, že když ve *výsledném* výrazu bude $|x| = |y|$, tak dostaneme jinou limitu, než je 0. Tedy naše volba křivky $\varphi : (0, +\infty) \to \mathbb{R}^2$ pro *původní* funkci bude

$$\varphi : \begin{array}{l} x = t^{\frac{1}{8}} \\ y = t^{\frac{1}{4}} \end{array} \ , \text{ pro } t > 0$$

neboli $y = t^{\frac{1}{4}} = x^2$ pro $x > 0$, což je prostě *parabola*. Po dosazení pak máme

$$\lim_{t \to 0_+} (f \circ \varphi)(t) = \lim_{t \to 0_+} f(t^{\frac{1}{8}}, t^{\frac{1}{4}}) = \lim_{t \to 0_+} \frac{\sqrt{t \cdot t}}{t+t} = \frac{1}{2} \ .$$

Máme různé hodnoty pro různá přiblížení. Původní limita $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x^4y^2}{x^8+y^4}$ tedy neexistuje.

- -

(c) Definiční obor funkce $f(x,y) = \frac{|x|^\alpha |y|^\beta}{|x|^\gamma + |y|^\delta}$, kde $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$, je

$$D(f): \quad (x,y) \neq (0,0) \ .$$

Bod $(0,0)$ je zřejmě hromadný bod množiny $D(f)$. Abychom zjistili, jakou hodnotu by případná limita měla mít, přiblížíme se k počátku např. po ose y:

$$\lim_{y \to 0} f(0, y) = \lim_{y \to 0} 0 = 0 \ .$$

Pokud limita existuje musí tedy být $c = 0$. Po vzoru předchozího příkladu zkusíme opět vyrovnat mocniny ve jmenovateli. Pro $t > 0$ tedy bude

$$f(t^{\frac{1}{\gamma}}, t^{\frac{1}{\delta}}) = \frac{t^{\frac{\alpha}{\gamma}} \cdot t^{\frac{\beta}{\delta}}}{t + t} = \tfrac{1}{2} \cdot t^{\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\delta} - 1} .$$

Vidíme tedy, že pokud bude $\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\delta} - 1 \leq 0$, tak

$$\lim_{t \to 0_+} f(t^{\frac{1}{\gamma}}, t^{\frac{1}{\delta}}) = \lim_{t \to 0_+} \tfrac{1}{2} \cdot t^{\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\delta} - 1} = \begin{cases} \frac{1}{2} & , \text{ pro } \ \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\delta} - 1 = 0 \ , \\ \infty & , \text{ pro } \ \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\delta} - 1 < 0 \ . \end{cases}$$

Pro různá přiblížení máme různé hodnoty (jedna z nich bude výše zmíněná 0), takže v tomto případě limita neexistuje.

Nechť je nyní $\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\delta} - 1 > 0$. Použijeme jednoduchý odhad:

$$|x|^\gamma, |y|^\delta \leq |x|^\gamma + |y|^\delta$$

Pro $(x, y) \neq (0, 0)$ tak dostaneme

$$0 \leq f(x, y) = \frac{\left(|x|^\gamma\right)^{\frac{\alpha}{\gamma}} \cdot \left(|y|^\delta\right)^{\frac{\beta}{\delta}}}{|x|^\gamma + |y|^\delta} \leq \frac{\left(|x|^\gamma + |y|^\delta\right)^{\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\delta}}}{|x|^\gamma + |y|^\delta} \leq \left(|x|^\gamma + |y|^\delta\right)^{\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\delta} - 1} .$$

Z věty o limitě sevřené funkce pak máme, že

$$0 = \lim_{(x,y) \to (0,0)} 0 \ \leq \lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y) \ \leq \lim_{(x,y) \to (0,0)} \left(|x|^\gamma + |y|^\delta\right)^{\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\delta} - 1} = 0$$

kde jsme vyu žili to, že funkce $g(x, y) = \left(|x|^\gamma + |y|^\delta\right)^{\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\delta} - 1}$ je spojitá pro $\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\delta} - 1 > 0$, protože je to složení spojitých funkcí (obecné mocniny). V tomto případě tedy $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y) = 0$.

Celkově jsme zjistili, že

- pro $\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\delta} > 1$ je limita rovna 0,
- pro $\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\delta} \leq 1$ limita neexistuje.

Připomenutí:

Nechť f je funkce z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$ a nechť a_0 je vnitřní bod jejího definičního oboru. *Derivace podle vektoru* $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$ funkce f v bodě a_0 je definována jako následující (konečná) hodnota

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{h}}(a_0) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(a_0 + t\vec{h})|_{t=0} = \lim_{t \to 0} \frac{f(a_0 + t\vec{h}) - f(a_0)}{t}$$

Neboli: Definiční obor $D(f)$ “projíždíme” po přímce $\varphi(t) = a_0 + t\vec{h}$, kde t představuje čas a $\vec{h}$ tím pádem vektor rychlosti pohybu po dané přímce. A ptáme se, jak se rychle se přitom budou měnit hodnoty funkce f při průchodu bodem a_0. Je zřejmé, že čím větší bude rychlost průchodu $\vec{h}$, tím rychlejší budou i změny hodnot funkce f.

Speciálně definujeme tzv. *parciální derivaci podle i-té proměnné* (dejme tomu, že se bude jmenovat x_i) jako

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_0) := \frac{\partial f}{\partial \vec{e}_i}(a_0)$$

kde $\vec{e}_i = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{i-\text{tá pozice}}, 0, \ldots, 0)$ je vektor standardní báze.

Konkrétně pro funkci $f : D \to \mathbb{R}$, kde $D \subseteq \mathbb{R}^2$ a vnitřní bod $a_0 = (x_0, y_0)$ definičního oboru $D(f) = D$ je

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x, y_0)_{|x=x_0}$$

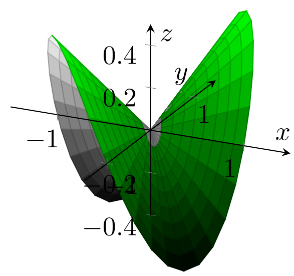
tedy funkci f stačí "obyčejně"derivovat podle proměnné x, kde druhou proměnnou y bereme na chvíli jako konstantu.

4.5 Najděte parciální derivaci $\frac{\partial f}{\partial x}$ funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{pro } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{pro } (x,y) = (0,0)\ . \end{cases}$$

ve všech bodech $a = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Je funkce $\frac{\partial f}{\partial x}$ spojitá v bodě $a_0 = (0, 0)$?

Řešení:
Graf funkce f:



V bodech $a = (x, y) \neq (0, 0)$ je předpis funkce f v nějakém okolí $U_\varepsilon(a)$ ve tvaru $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Můžeme tak standardně použít postupy o derivování funkcí:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)(a) = \frac{y\sqrt{x^2+y^2} - xy\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-1/2}2x}{(\sqrt{x^2+y^2})^2} =$$

$$= \frac{y(x^2+y^2) - yx^2}{(\sqrt{x^2+y^2})^3} = \frac{y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

Pro bod $a = (0, 0)$, který nemá v žádném svém okolí "jednotný" předpis funkce f, musíme použít (explicitní) definici:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} 0 = 0\ .$$

Celkem jsme tedy dostali, že

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}, & \text{pro } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{pro } (x,y) = (0,0)\ . \end{cases}$$

a podíváme se, jestli je tato funkce spojitá v bodě $(0, 0)$. Když si vezmeme např. přiblížení po ose y (tj. $x = 0$) dostaneme, že

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \frac{y^3}{(y^2)^{3/2}} = \begin{cases} 1, & \text{pro } y > 0, \\ -1, & \text{pro } y < 0\ . \end{cases}$$

Tedy nejenže $\lim_{y\to 0} \frac{\partial f}{\partial x}(0,y)$ není rovna 0 (což je hodnota $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$), ale dokonce tato limita vůbec neexistuje. Tedy ani limita

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$

neexistuje a funkce $\frac{\partial f}{\partial x}$ není spojitá v bodě $(0,0)$.

Na druhou stranu, jak je snadno vidět díky předpisu a spojitosti funkcí, v bodech $a = (x,y) \neq (0,0)$ funkce $\frac{\partial f}{\partial x}$ spojitá je.

Důležitá poznámka: Hodnotu $\frac{\partial f}{\partial x}(a_0)$ nelze obecně počítat jako $\lim_{a\to a_0} \frac{\partial f}{\partial x}(a)$! Často ale ano, a to ovšem právě tehdy, jestliže funkce $\frac{\partial f}{\partial x}$ je spojitá v bodě a_0.

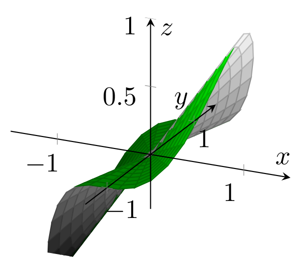
4.6 Najděte parciální derivaci $\frac{\partial f}{\partial x}$ funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & , \ (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & , \ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

ve všech bodech $a = (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Je funkce $\frac{\partial f}{\partial x}$ spojitá v bodě $a_0 = (0,0)$?

Řešení:

Graf funkce f:



V bodech $a = (x,y) \neq (0,0)$ je předpis funkce f v nějakém okolí $U_\varepsilon(a)$ ve tvaru $f(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2}$. Můžeme tak standardně použít postupy o derivování funkcí:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^3}{x^2+y^2}\right)(a) = \frac{3x^2(x^2+y^2) - 2x \cdot x^3}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

Pro bod $a = (0,0)$, který nemá v žádném svém okolí "jednotný" předpis funkce f, musíme použít (explicitní) definici:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t^3}{t^2+0} - 0}{t} = 1 \ .$$

Celkem jsme tedy dostali, že

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2}, & \text{pro } (x,y) \neq (0,0), \\ 1, & \text{pro } (x,y) = (0,0) \ . \end{cases}$$

a podíváme se, jestli je tato funkce spojitá v bodě $(0,0)$. Když si vezmeme např. přiblížení po ose y (tj. $x=0$) dostaneme, že

$$\lim_{y\to 0} \tfrac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \lim_{y\to 0} 0 = 0\ .$$

Tedy limita

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \tfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$

nemůže být rovna 1, což je hodnota $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, a tedy funkce $\frac{\partial f}{\partial x}$ *není spojitá v bodě* $(0,0)$.

Na druhou stranu, jak je snadno vidět díky předpisu a spojitosti funkcí, v bodech $a=(x,y)\neq(0,0)$ funkce $\frac{\partial f}{\partial x}$ spojitá je.

4.7 Pro následující funkce f najděte parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}$ a $\frac{\partial f}{\partial y}$ a obory jejich existence:

(a) $f(x,y) = x^2y + \ln(x+2y)$,

(b) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y}$.

Řešení:

(a) Definiční obor $D(f) : x+2y > 0$ je otevřená množina.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + \frac{1}{x+2y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + \frac{2}{x+2y}$$

Obě parciální derivace evidentně existují na $D(f)$.

(b) Definiční obor $D(f) : y \geq -x^2$. Jeho vnitřek (tj. množina, kde se můžeme ptát na parciální derivace) je otevřená množina $D(f)^\circ : y > -x^2$. Parciální derivace jsou

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \tfrac{1}{2}(x^2+y)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \tfrac{1}{2}(x^2+y)^{-\frac{1}{2}}\cdot 1 = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y}}\ .$$

Obě parciální derivace evidentně existují na $D(f)^\circ$.