5. cvičení z Matematické analýzy 2

19. - 23. října 2020

5.1 Pro funkci $f(x,y) = (xy)^{\sqrt{x^2+y^2}}$ najděte parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}$ a $\frac{\partial f}{\partial y}$ a obory jejich existence.

Řešení:
Funkci si vhodně přepíšeme jako $f(x,y) = (xy)^{\sqrt{x^2+y^2}} = e^{\ln(xy)\sqrt{x^2+y^2}}$. Definiční obor $D(f) : xy > 0$ je opět otevřená množina. Protože funkce je symetrická v proměnných x a y, stačí spočítat jen jednu z derivací a druhou pak příslušně přepsat:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{\ln(xy)\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \left[\frac{1}{x}\sqrt{x^2+y^2} + \ln(xy)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right] = e^{\ln(xy)\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{y^2 + x^2(1+\ln(xy))}{x\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{\ln(xy)\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{x^2 + y^2(1+\ln(xy))}{y\sqrt{x^2+y^2}}$$

Obě parciální derivace opět existují na $D(f)$.

Připomenutí: *Derivace (totální diferenciál)* funkce f z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$ ve vnitřním bodě $a_0 \in D(f)$ definičního oboru $D(f) \subseteq \mathbb{R}^n$ je takové lineární zobrazení (označené jako $f'(a_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$), které je nejlepší aproximací funkce f v bodě a_0 v tomto smyslu:

Rozdíl hodnot funkcí $f(a)$ a

$$g(a) := f(a_0) + f'(a_0)[a - a_0]$$

klesá v okolí bodu a_0 rychleji než $\|a - a_0\|$, tj.

$$\lim_{a\to a_0} \frac{f(a)-g(a)}{\|a-a_0\|} = \lim_{a\to a_0} \frac{f(a)-f(a_0)-f'(a_0)[a-a_0]}{\|a-a_0\|} = 0\ .$$

Funkce g se nazývá *linearizací* funkce f v bodě a_0.

Také to můžeme říct tak, že existuje $\varepsilon > 0$ a funkce ω definovaná na ε-okolí počátku souřadnic $\vec{0}$ taková, že

$$\lim_{\vec{u}\to\vec{0}} \omega(\vec{u}) = 0$$

a platí, že

$$f(a_0 + \vec{h}) = f(a_0) + f'(a_0)[\vec{h}] + \|\vec{h}\| \cdot \omega(\vec{h})$$

pro každý vektor $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$ takový, že $\|\vec{h}\| < \varepsilon$.

Poznámka:

- Pokud existuje derivace $f'(a_0)$, pak také existují derivace $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a_0)$ podle vektoru pro každý vektor $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ a platí, že

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a_0) = f'(a_0)[\vec{u}]\ .$$

  Speciálně, existují pak všechny parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a_0)$ a matice zobrazeni $f'(a_0)$ ve standardní bázi má tvar

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_0)\ , \ldots,\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(a_0)\right)\ .$$

  (Pro jednoduchost zápisu, budeme ztotožňovat zobrazení a jeho matici ve standardní bázi.)

  POZOR: Pouhá existence parciálních derivací ještě nezaručuje existenci (úplné) derivace! Ta je mnohem komplikovanější objekt. Máme ale tuto postačující podmínku:

- Nechť všechny parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ existují a *jsou spojité* na otevřené množině $G \subseteq \mathbb{R}^n$. Pak derivace $f'(a)$ existuje v každém bodě $a \in G$.

Definice: Nechť existuje $f'(a_0)$. *Gradient funkce* f v bode a_0 je takový vektor $\mathrm{grad} f(a_0) \in \mathbb{R}^n$, že pro každé $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$ je

$$f'(a_0)[\vec{h}] = \mathrm{grad} f(a_0) \cdot \vec{h}$$

(kde $\cdot$ je standardní skalární součin). Tedy ve standardní bázi máme

$$\mathrm{grad} f(a_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

a proto gradient i derivaci budeme ztotožňovat.

Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ je *směrem nulového růstu* funkce f v bodě a_0 právě když $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(a_0) = 0$ (a vektor $\vec{v}$ je směr, tj. $\|\vec{v}\| = 1$.)

5.2 Pro funkci $f(x, y) = \mathrm{arctg}(xy^2)$ v bodě $a_0 = (1, 1)$ určete

(a) totální diferenciál a derivaci ve směru $\vec{u} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$,

(b) směry největšího a nejmenšího růstu a směry nulového růstu,

(c) tečnou rovinu,

(d) úhel, který tečná rovina svírá se základnou.

Řešení:
Podle předchozí poznámky ze spojitosti parciálních derivací (které vzápětí spočítáme) zjistíme, že derivace v bodě $a_0 = (1, 1)$ skutečně existuje.

(a) Pro $a_0 = (1, 1)$ tedy máme

$$f'(a_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a_0), \frac{\partial f}{\partial y}(a_0) \right) = \left(\frac{y^2}{1 + xy^2}, \frac{2xy}{1 + xy^2} \right)(a_0) = \left(\tfrac{1}{2}, 1 \right) \ .$$

Dále je

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a_0) = f'(a_0)[\vec{u}] = \left(\tfrac{1}{2},\ 1 \right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \tfrac{3\sqrt{2}}{2}.$$

(b) Jestliže má funkce f v daném bodě a_0 nenulový gradient, což je vektor

$$\mathrm{grad} f(a_0) := \left(\tfrac{\partial f}{\partial x}(a_0), \tfrac{\partial f}{\partial y}(a_0) \right)$$

pak směr tohoto vektoru je směrem největšího růstu funkce f v daném bodě (konkrétní směr je tedy znormovaný vektor $\frac{\mathrm{grad} f(a_0)}{\|\mathrm{grad} f(a_0)\|}$).

Pro vektor $\vec{h}$ takový, že $\|\vec{h}\| = 1$ je největší hodnotou, jaké může nabýt výraz $\frac{\partial f}{\partial \vec{h}}(a_0) = f'(a_0)[\vec{h}]$, hodnota $\|\mathrm{grad} f(a_0)\|$. To je okamžitý důsledek Cauchy-Schwartzovy nerovnosti, která říká, že pro každé dva vektory $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ platí

$$|\vec{v} \cdot \vec{w}| \leq \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|$$

a rovnost zde nastává pouze pokud jsou vektory $\vec{v}$ a $\vec{w}$ lineárně závislé.

Tedy skutečně dostáváme, že pokud $\|\vec{h}\| = 1$, pak

$$\left| \tfrac{\partial f}{\partial \vec{h}}(a_0) \right| = \left| \mathrm{grad} f(a_0) \cdot \vec{h} \right| \leq \|\mathrm{grad} f(a_0)\| \cdot \|\vec{h}\| = \|\mathrm{grad} f(a_0)\| \ .$$

V našem případě je tedy

$$\|\mathrm{grad} f(a_0)\| = \sqrt{(\tfrac{1}{2})^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

a

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{grad} f(a_0)}{\|\mathrm{grad} f(a_0)\|} = \tfrac{2}{\sqrt{5}} \cdot \left(\tfrac{1}{2}, 1\right) = \left(\tfrac{1}{\sqrt{5}}, \tfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

je směrem největšího růstu.

Směr nejmenšího růstu $\vec{w}$ (neboli největšího poklesu) je směr opačný ke gradientu tedy $\vec{w} = -\vec{v} = \left(-\tfrac{1}{\sqrt{5}}, -\tfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

Směr nulového růstu $\vec{w}$ je takový, že

$$0 = \tfrac{\partial f}{\partial \vec{w}}(a_0) = \mathrm{grad} f(a_0) \cdot \vec{w} \ .$$

Tedy jde o směry kolmé ke gradientu (tudíž kolmé k vektoru $\vec{v} = \left(\tfrac{1}{\sqrt{5}}, \tfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$) neboli dva navzájem opačné vektory

$$\vec{w}_1 = \left(-\tfrac{2}{\sqrt{5}}, \tfrac{1}{\sqrt{5}}\right) \ \text{ a } \ \vec{w}_2 = \left(\tfrac{2}{\sqrt{5}}, -\tfrac{1}{\sqrt{5}}\right) \ .$$

(c) Tečná rovina je graf linearizace funkce f v daném bodě $a_0 = (x_0, y_0)$. Má tedy rovnici:

$$z = f(a_0) + f'(a_0)[a - a_0]$$

neboli

$$z = f(a_0) + \left(\tfrac{\partial f}{\partial x}(a_0), \tfrac{\partial f}{\partial y}(a_0)\right) \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = \tfrac{\pi}{4} + \left(\tfrac{1}{2},\ 1\right) \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 1 \end{pmatrix} = \tfrac{\pi}{4} + \tfrac{1}{2}(x-1) + y - 1$$

$$\tfrac{1}{2}x + y - z = \tfrac{3}{2} - \tfrac{\pi}{4}$$

(d) Úhel $\alpha \in \langle 0, \tfrac{\pi}{2} \rangle$ mezi tečnou rovinou a základnou je ten, který odpovídá největší z možných směrnic přímek, které leží v tečné rovině dané linearizaci g, tedy:

$$\mathrm{tg}(\alpha) = \max \left\{ \frac{|g(a_0 + \vec{h}) - g(a_0)|}{\|\vec{h}\|} \,\middle|\, 0 \neq \vec{h} \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

a úpravou (z Cauchy-Schwartzovy nerovnosti) máme

$$\frac{|g(a_0 + \vec{h}) - g(a_0)|}{\|\vec{h}\|} = \frac{|f'(a_0)[\vec{h}]|}{\|\vec{h}\|} = \frac{|\mathrm{grad} f(a_0) \cdot \vec{h}|}{\|\vec{h}\|} \leq \|\mathrm{grad} f(a_0)\|$$

přičemž poslední nerovnost je nabyta pro $\vec{h} = \mathrm{grad} f(a_0)$. Odsud tedy máme, že

$$\mathrm{tg}(\alpha) = \|\mathrm{grad} f(a_0)\|$$

což je analogie toho, když pro funkci $\varphi(t)$ jedné proměnné v bodě t_0 je úhel tečné přímky daný jako $\mathrm{tg}(\alpha) = |\varphi'(t_0)|$.

V našem případě tudíž dostaneme:

$$\mathrm{tg}(\alpha) = \|\left(\tfrac{1}{2},\ 1\right)\| = \sqrt{(\tfrac{1}{2})^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

tedy

$$\alpha = \mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right) \doteq 48{,}19^\circ \ .$$

5.3 Pro funkci $f(x, y) = xy + \sin(x - y)$ v bodě $a_0 = (2, 2)$ určete

(a) derivaci a tečnou rovinu,

(b) ve kterém ze směrů $\vec{u}_1 = (0,1)$ a $\vec{u}_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ má funkce větší růst,

(c) směr největšího a směry nulového růstu,

(d) úhel, který tečná rovina svírá se základnou.

Řešení:

Ze spojitosti parciálních derivací (které vzápětí spočítáme) zjistíme, že derivace v bodě $a_0 = (2,2)$ skutečně existuje. Dále budeme postupovat podobně jako v příkladu **4.7**.

(a) Pro $a_0 = (2,2)$ tedy máme

$$f'(a_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a_0), \frac{\partial f}{\partial y}(a_0)\right) = \Big(y + \cos(x-y),\ x - \cos(x-y)\Big)(a_0) = (3,1)\ .$$

Tečná rovina má rovnici:

$$z = f(a_0) + f'(a_0)[a - a_0] = f(a_0) + \tfrac{\partial f}{\partial x}(a_0)\cdot(x - x_0) + \tfrac{\partial f}{\partial y}(a_0)\cdot(y - y_0) =$$

$$= 4 + 3(x-2) + y - 2$$

neboli

$$3x + y - z = 4$$

(b) Máme

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}_1}(a_0) = f'(a_0)[\vec{u}_1] = (3,\ 1)\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

a

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}_2}(a_0) = f'(a_0)[\vec{u}_2] = (3,\ 1)\cdot\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \sqrt{2}$$

takže větší růst je v $\vec{u}_2$.

(c) Směrem největšího růstu $\vec{v}$ je směr gradientu (pokud je nenulový), tj. je to směr daný vektorem $\mathrm{grad} f(a_0) = (3,1)$ (konkrétně jde o směr $\vec{v} = \frac{\mathrm{grad} f(a_0)}{\|\mathrm{grad} f(a_0)\|} = \frac{1}{\sqrt{10}}(3,1)$).

Směry nulového růstu $\vec{w}$ jsou kolmé ke gradientu, tj. jde o směry určené vektory $(1,-3)$ a $(-1,3)$, konkretní směry (tj. znormované vektory) tedy jsou

$$\vec{w}_1 = \left(\tfrac{1}{\sqrt{10}}, -\tfrac{3}{\sqrt{10}}\right) \ \text{ a } \ \vec{w}_2 = \left(-\tfrac{1}{\sqrt{10}}, \tfrac{3}{\sqrt{10}}\right)\ .$$

(d) Úhel $\alpha \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$ tečné roviny se základnou je

$$\mathrm{tg}(\alpha) = \|\mathrm{grad} f(a_0)\| = \|\,(3,\ 1)\,\| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

tedy

$$\alpha = \mathrm{arctg}\left(\sqrt{10}\right) \doteq 72.46^\circ\ .$$

5.4 Pro funkci $f(x,y) = \mathrm{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)$ v bodě $a_0 = (1,1)$ určete

(a) totální diferenciál a derivaci ve směru $\vec{u} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,

(b) směry největšího a nejmenšího růstu a směry nulového růstu,

(c) tečnou rovinu,

(d) úhel, který tečná rovina svírá se základnou.

Řešení:

Definiční obor je $D(f): y \neq 0$, což je otevřená množina a protože zde všechny parciálních derivace existují a jsou spojité (jak se ihned přesvědčíme), tak derivace v bodě a_0 skutečně existuje. Dále budeme postupovat podobně jako v příkladu **4.7**.

(a) Pro $a_0 = (1,1)$ je

$$f'(a_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a_0), \frac{\partial f}{\partial y}(a_0)\right) = \left(\frac{1}{y(1+(\frac{x}{y})^2)}, -\frac{x}{y^2(1+(\frac{x}{y})^2)}\right)(a_0) = \left(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right) .$$

Máme

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}_2}(a_0) = f'(a_0)[\vec{u}_2] = \left(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \sqrt{2}.$$

(b) Směrem největšího růstu $\vec{v}$ je směr gradientu (pokud je nenulový), tj. je to směr daný vektorem $\mathrm{grad} f(a_0) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ (konkrétně jde o směr $\vec{v} = \frac{\mathrm{grad} f(a_0)}{\|\mathrm{grad} f(a_0)\|} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$).

Směrem nejmenšího růstu je směr opačný ke gradientu (pokud je nenulový), tj. je to směr $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Směry nulového růstu $\vec{w}$ jsou kolmé ke gradientu, tj. jde o směry určené vektory $(1,1)$ a $(-1,-1)$, konkrétní směry (tj. znormované vektory) tedy jsou

$$\vec{w}_1 = \left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}, \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \text{a} \quad \vec{w}_2 = \left(-\tfrac{\sqrt{2}}{2}, -\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) .$$

(c) Tečná rovina má rovnici:

$$z = f(a_0) + f'(a_0)[a - a_0] = f(a_0) + \tfrac{\partial f}{\partial x}(a_0)\cdot(x - x_0) + \tfrac{\partial f}{\partial y}(a_0)\cdot(y - y_0) =$$

$$= \tfrac{\pi}{4} + \tfrac{1}{2}(x-1) - \tfrac{1}{2}(y-1)$$

neboli

$$x - y - 2z = -\tfrac{\pi}{2}$$

(d) Úhel $\alpha \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$ tečné roviny se základnou je

$$\mathrm{tg}(\alpha) = \|\mathrm{grad} f(a_0)\| = \|\left(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right)\| = \sqrt{(\tfrac{1}{2})^2 + (-\tfrac{1}{2})^2} = \tfrac{\sqrt{2}}{2}$$

tedy

$$\alpha = \mathrm{arctg}\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \doteq 35.26^\circ .$$

Poznámka: Nechť pro funkci $f(x,y)$ existuje $\mathrm{grad} f(a_0) \in \mathbb{R}^3$ v bodě $a_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Pak vektor $\vec{U} \in \mathbb{R}^3$ leží ve vektorovém prostoru příslušnému tečné rovině v bodě a_0 právě když je

$$(\mathrm{grad} f(a_0), -1) \cdot \vec{U} = 0 ,$$

kde $(\mathrm{grad} f(a_0), -1) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a_0), \frac{\partial f}{\partial y}(a_0), -1\right)$

Je to proto, ze rovnice tečné roviny má tvar $z = f(a_0) + \mathrm{grad} f(a_0)[a - a_0]$ neboli

$$(\mathrm{grad} f(a_0), -1) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - f(a_0) \end{pmatrix} = 0 .$$

Neboli $(\mathrm{grad} f(a_0), -1)$ je normálový vektor tečné roviny (a jejího přidruženého vektorového prostoru).

Nechť je nyní $\vec{U} = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$. Nechť $\vec{u} = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ představuje vektor z jeho prvních dvou souřadnic (neboli $\vec{u}$ je projekce $\vec{U}$ do základny). Pak $\vec{U}$ leží v tečné rovině právě když

$$0 = (\mathrm{grad} f(a_0), -1) \cdot \vec{U} = \alpha \cdot \tfrac{\partial f}{\partial x}(a_0) + \beta \cdot \tfrac{\partial f}{\partial y}(a_0) + \gamma \cdot (-1) = f'(a_0)[\vec{u}] - \gamma = \tfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a_0) - \gamma$$

neboli když

$$\gamma = \tfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a_0), \quad \text{pro} \quad \vec{u} = (\alpha, \beta)$$

tudíž vektor $\vec{U}$ je prostě tvaru

$$\vec{U} = \left(\vec{u}, \tfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a_0)\right) .$$

Současně si všimněme, že úhel $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$, který svírá vektor $\vec{U} = (\alpha, \beta, \gamma) = \left(\vec{u}, \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a_0)\right)$ se základnou je dán podobně jako předtím úhel tečné roviny (jen s tím rozdílem, že rozlišujeme směr nad a pod rovinou). Pro $\vec{u} \neq (0,0)$ je to tedy

$$\mathrm{tg}(\varphi) = \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = \frac{1}{\|\vec{u}\|} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a_0) = \frac{f'(a_0)[\vec{u}]}{\|\vec{u}\|} .$$

5.5 Pro funkci $f(x,y) = e^x \cos y + 2y$ v bodě $a_0 = (0,0)$ určete

(a) totální diferenciál a tečnou rovinu,

(b) směry největšího a nejmenšího růstu a směry nulového růstu,

(c) vektory $\vec{U}_1 = (0,1,?)$ a $\vec{U}_2 = (2,1,?)$ tak, aby ležely ve vektorovém prostoru odpovídajícímu tečné rovině. Který z vektoru ukazuje směrem většího stoupání v tečné rovině?

(d) úhel, který tečná rovina svírá se základnou.

Řešení:
Definiční obor $D(f) = \mathbb{R}^2$ je cela rovina, což je otevřená množina a protože zde všechny parciálních derivace existují a jsou spojité (jak se přesvědčíme dále), tak derivace v bodě a_0 skutečně existuje. Dále budeme postupovat podobně jako v příkladu **4.7**.

(a) Pro $a_0 = (x_0, y_0) = (0,0)$ máme

$$f'(a_0) = (e^x \cos y, -e^x \sin y + 2)_{|a_0} = (1, 2)$$

Tečná rovina má rovnici:

$$z = f(a_0) + f'(a_0)[a - a_0] = f(a_0) + \tfrac{\partial f}{\partial x}(a_0) \cdot (x - x_0) + \tfrac{\partial f}{\partial y}(a_0) \cdot (y - y_0) =$$

$$= 1 + (x - 0) + 2(y - 0)$$

neboli

$$x + 2y - z = -1 .$$

(b) Směrem největšího růstu $\vec{v}$ je směr gradientu (pokud je nenulový), tj. je to směr daný vektorem $\mathrm{grad} f(a_0) = (1,2)$ (konkrétně jde o směr $\vec{v} = \frac{\mathrm{grad} f(a_0)}{\|\mathrm{grad} f(a_0)\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)$).

Směr nejmenšího růstu $\vec{w}$ (neboli největšího poklesu) je směr opačný ke gradientu tedy $\vec{w} = -\vec{v} = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

Směry nulového růstu $\vec{w}$ jsou kolmé ke gradientu, tj. jde o směry určené vektory $(2,-1)$ a $(-2,1)$, konkrétní směry (tj. znormované vektory) tedy jsou

$$\vec{w}_1 = \left(\tfrac{2}{\sqrt{5}}, -\tfrac{1}{\sqrt{5}}\right) \quad \text{a} \quad \vec{w}_2 = \left(-\tfrac{2}{\sqrt{5}}, \tfrac{1}{\sqrt{5}}\right) .$$

(c) Podle poznámky výše potřebujeme zjistit jen derivace podle vektorů $\vec{u}_1 = (0,1)$ a $\vec{u}_2 = (2,1)$:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}_1}(a_0) = f'(a_0)[\vec{u}_1] = (1,\ 2) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2$$

a

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}_2}(a_0) = f'(a_0)[\vec{u}_2] = (1,\ 2) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 4$$

Jde tedy o vektory $\vec{U}_1 = (0,1,2)$ a $\vec{U}_2 = (2,1,4)$, které svírají se základnou postupně úhly

$$\mathrm{tg}(\varphi_1) = \frac{1}{\|\vec{u}_1\|} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{u}_1}(a_0) = \frac{2}{1} = 2$$

$$\mathrm{tg}(\varphi_2) = \frac{1}{\|\vec{u}_2\|} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{u}_2}(a_0) = \frac{4}{\sqrt{5}}\ (< 2)$$

takže větší stoupání v tečné rovině ukazuje vektor v $\vec{U}_1$.

(d) Úhel $\alpha \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ tečné roviny se základnou je

$$\mathrm{tg}(\alpha) = \|\mathrm{grad} f(a_0)\| = \|\,(1,\ 2)\,\| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

tedy

$$\alpha = \mathrm{arctg}\left(\sqrt{5}\right) \doteq 65.91^\circ\ .$$

5.6 Pomocí diferenciálu (vhodné funkce ve vhodném bodě) spočtěte přibližnou hodnotu výrazu

$$\frac{1.03^2}{\sqrt[3]{0.98 \cdot \sqrt[4]{1.05^3}}}\ .$$

Řešení:

Budeme uvažovat funkci

$$f(x,y,z) = \frac{x^2}{\sqrt[3]{y \cdot \sqrt[4]{z^3}}} = x^2 y^{-\frac{1}{3}} z^{-\frac{1}{4}}$$

(pro jednoduchost s definičním oborem $x,y,z > 0$) a najdeme její linearizaci g v bodě $a_0 = (1,1,1)$, tedy funkci

$$g(a) := f(a_0) + f'(a_0)[a - a_0]\ .$$

Hodnotu v bodě $a_1 = (1.03, 0.98, 1.05)$ pak vyjádříme přibližně jako

$$f(a_1) \doteq g(a_1) = f(a_0) + f'(a_0)[\vec{h}]$$

kde $\vec{h} = a_1 - a_0 = (0.03, -0.02, 0.05)$.

Máme tedy

$$f'(a_0) = \left(2xy^{-\frac{1}{3}}z^{-\frac{1}{4}}, -\tfrac{1}{3}x^2y^{-\frac{4}{3}}z^{-\frac{1}{4}}, -\tfrac{1}{4}x^2y^{-\frac{1}{3}}z^{-\frac{5}{4}}\right)(a_0) = \left(2, -\tfrac{1}{3}, -\tfrac{1}{4}\right)$$

takže

$$f(a_1) \doteq g(a_1) = f(a_0) + f'(a_0)[\vec{h}] = 1 + \left(2, -\tfrac{1}{3}, -\tfrac{1}{4}\right) \begin{pmatrix} 0.03 \\ -0.02 \\ 0.05 \end{pmatrix} =$$

$$= 1 + 0.06 + \tfrac{0.02}{3} - \tfrac{0.05}{4} = 1 + \tfrac{0.65}{12} \doteq 1.05417$$

(Pro srovnání: přesná hodnota zaokrouhlená na 5 desetinných míst je $f(a_1) \doteq 1.05512$.)

Věta: Nechť U je otevřená množina v $\mathbb{R}^3$, $\Phi : U \to \mathbb{R}$ je spojitě diferencovatelná na G. Označme

$$M = \{a \in U \mid \Phi(a) = 0\}$$

což je zřejmě vrstevnice funkce Φ.

Jestliže pro každé $a \in M$ platí, že $\mathrm{grad}\Phi(a) \neq \vec{0}$, pak M implicitně definovaná (regulární) plocha. Tečná rovina k M v bodě $a_0 = (x_0, y_0, z_0) \in M$ má rovnici

$$\mathrm{grad}\Phi(a_0) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = 0.$$

Poznámka: Každý graf spojitě diferencovatelné funkce $f : G \to \mathbb{R}$, kde $G \subseteq \mathbb{R}^2$ je otevřená v $\mathbb{R}^2$, můžeme přirozeně chápat jako implicitně definovanou (regulární) plochu pomocí funkce $\Phi : G \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\Phi(x, y, z) := f(x, y) - z$$

protože

$$GRAF\ (f) = \{(x, y, z) \in G \times \mathbb{R} \mid\ z = f(x, y)\ \} = \{(x, y, z) \in G \times \mathbb{R} \mid\ \Phi(x, y, z) = 0\ \}$$

Současně vidíme, že normálový vektor tečné roviny ke grafu funkce f v bodě $A_0 = \big(a_0, f(a_0)\big)$ pro $a_0 \in G$ je

$$\mathrm{grad}\Phi(A_0) = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}(A_0), \frac{\partial \Phi}{\partial y}(A_0), \frac{\partial \Phi}{\partial z}(A_0)\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a_0), \frac{\partial f}{\partial y}(a_0), -1\right) \neq \vec{0}$$

tedy je nenulový.

5.7 (úhly grafů funkcí)

Nalezněte úhel, který svírají

- graf funkce $f(x, y) = \ln(\sqrt{x^2 + y^2})$
- a plocha $M : (x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (z + 1)^2 = 2$

v bodě $(1, 0, ?)$.

Řešení:

Úhel, který svírají implicitně dané plochy M_1 a M_2, je dán jako úhel mezi jednotlivými tečnými rovinami a ten je zase určen jejich normálovými vektory n_1 a n_2, tj. gradienty funkcí Φ_1 a Φ_2. Z možných dvou (navzájem doplňkových) úhlů mezi tečnými rovinami si volíme ten menší. Tento úhel $\alpha \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ má tedy nezáporný kosinus a je tudíž jednoznačně určen jako

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{||\vec{n}_1|| \cdot ||\vec{n}_2||}\ .$$

Třetí souřadnice bodu $A = (1, 0, ?)$, který je na grafu funkce f, je dána hodnotou $f(1, 0) = \ln(1) = 0$. Tedy jde o bod $A = (1, 0, 0)$. Je dobře ještě ověřit, že takto určený bod skutečně leží v M.

Graf funkce f si zadejme implicitně pomocí funkce

$$\Phi_1(x, y, z) = f(x, y) - z = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) - z\ .$$

Plocha M je zadaná implicitně funkcí

$$\Phi_2(x, y, z) = (x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (z + 1)^2 - 2\ .$$

Normálové vektory tečných rovin v $A = (1, 0, 0)$ jsou

$$\vec{n}_1 = \text{grad } \Phi_1(A) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2},\ \frac{y}{x^2 + y^2},\ -1\right)_{|A} = (1, 0, -1)$$

$$\vec{n}_2 = \text{grad } \Phi_2(A) = \Big(2(x - 1),\ 2(y + 1),\ 2(z + 1)\Big)_{|A} = (0, 2, 2)$$

Úhel $\alpha \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ je dán jako $\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{||\vec{n}_1|| \cdot ||\vec{n}_2||} = \frac{2}{\sqrt{2}\sqrt{8}} = \frac{1}{2}$, tedy $\alpha = \frac{\pi}{3}$.