6. cvičení z Matematické analýzy 2

26. - 30. října 2020

6.1 Pomocí diferenciálu (vhodné funkce ve vhodném bodě) spočtěte přibližnou hodnotu výrazu

$$1.04^{2.02\cdot\sqrt{0.99}}\ .$$

Řešení:
Budeme uvažovat funkci

$$f(x,y,z) = x^{y\sqrt{z}} = e^{y\sqrt{z}\ln x}$$

(pro jednoduchost s definičním oborem $x, y, z > 0$) a najdeme její linearizaci g v bodě $a_0 = (1, 2, 1)$. Hodnotu v bodě $a_1 = (1.04, 2.02, 0.99)$ pak vyjádříme přibližně jako

$$f(a_1) \doteq g(a_1) = f(a_0) + f'(a_0)[\vec{h}]$$

kde $\vec{h} = a_1 - a_0 = (0.04, 0.02, -0.01)$.

Máme tedy

$$f'(a_0) = \left(\frac{y\sqrt{z}}{x}e^{y\sqrt{z}\ln x},\ \sqrt{z}\ln x\cdot e^{y\sqrt{z}\ln x},\ \frac{y\ln x}{2\sqrt{z}}e^{y\sqrt{z}\ln x}\right)(a_0) = (2,0,0)$$

takže

$$f(a_1) \doteq g(a_1) = f(a_0) + f'(a_0)[\vec{h}] = 1 + (2,0,0)\begin{pmatrix} 0.04 \\ 0.02 \\ -0.01 \end{pmatrix} =$$

$$= 1 + 0.08 = 1.08$$

(Pro srovnání: přesná hodnota zaokrouhlená na 5 desetinných míst je $f(a_1) \doteq 1.08202$.)

6.2 (úhly grafů funkcí)
Nalezněte úhel, který svírají

- graf funkce $f(x,y) = e^{\sin xy}$
- a plocha $M : (x-1)^2 + \frac{y^2}{2} + (z-3)^2 = 7$

v bodě $(0, 2, ?)$.

Řešení:
Úhel, který svírají implicitně dané plochy M_1 a M_2, je dán jako úhel mezi jednotlivými tečnými rovinami a ten je zase určen jejich normálovými vektory n_1 a n_2, tj. gradienty funkcí Φ_1 a Φ_2. Z možných dvou (navzájem doplňkových) úhlů mezi tečnými rovinami si volíme ten menší. Tento úhel $\alpha \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$ má tedy nezáporný kosinus a je tudíž jednoznačně určen jako

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{||\vec{n}_1||\cdot||\vec{n}_2||}\ .$$

Třetí souřadnice bodu $A = (0, 2, ?)$, který je na grafu funkce f, je dána hodnotou $f(0, 2) = e^{\sin 0} = 1$. Tedy jde o bod $A = (0, 2, 1)$. Je dobré ještě ověřit, že takto určený bod skutečně leží v M.

Graf funkce f si zadejme implicitně pomocí funkce

$$\Phi_1(x, y, z) = e^{\sin(xy)} - z \ .$$

Plocha M je zadána implicitně funkcí

$$\Phi_2(x, y, z) = (x-1)^2 + \frac{y^2}{2} + (z-3)^2 - 7 \ .$$

Normálové vektory tečných rovin v $A = (0, 2, 1)$ jsou

$$\vec{n}_1 = \text{grad } \Phi_1(A) = \Big(y\cos(xy)e^{\sin(xy)},\ x\cos(xy)e^{\sin(xy)},\ -1\Big)_{|A} = (2, 0, -1)$$

$$\vec{n}_2 = \text{grad } \Phi_2(A) = \Big(2(x-1),\ y,\ 2(z-3)\Big)_{|A} = (-2, 2, -4)$$

Úhel $\alpha \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$ je dán jako $\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{||\vec{n}_1|| \cdot ||\vec{n}_2||} = 0$, tedy $\alpha = \frac{\pi}{2}$ a plochy jsou vzájemně kolmé.

6.3 Najděte rovnici tečné roviny k elipsoidu $M: \ x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$, která je rovnoběžná s rovinou $\varrho: \ 4x + 2y + z = 3$.

Řešení:
Použijeme větu o tečné rovině k implicitně definované ploše v $\mathbb{R}^3$.

V našem případě je $\Phi(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2 - 1$ a $U = \mathbb{R}^3$. Zřejmě $\text{grad}\Phi(a) = (2x, 4y, 2z)$.

Ověříme si, že v každém bodě $a_0 = (x_0, y_0, z_0) \in M$ je skutečně $\text{grad}\Phi(a_0) \neq \vec{0}$ (tj. že v každém bodě M máme k dispozici normálový vektor tečné roviny $\text{grad}\Phi(a_0)$):

Dokážeme to nepřímo: zřejmě $\text{grad}\Phi(a) = (2x, 4y, 2z) = \vec{0}$ právě když $a = (0, 0, 0)$. Ovšem tento bod není v M, protože nesplňuje $\Phi(a) = 0$.

Normálový vektor tečné roviny v bodě $a_0 = (x_0, y_0, z_0) \in M$ je tedy právě $\text{grad}\Phi(a_0)$. Tato rovina bude rovnoběžná s ϱ, která má normálový vektor $\mathbf{n}_\varrho = (4, 2, 1)$, právě když

$$(2x_0, 4y_0, 2z_0) = \text{grad}\Phi(a_0) = \lambda \cdot \mathbf{n}_\varrho = \lambda \cdot (4, 2, 1)$$

pro nějaké $\lambda \in \mathbb{R}$, tedy $(x_0, y_0, z_0) = (2\lambda, \lambda/2, \lambda/2)$. Současně má také platit, že $x_0^2 + 2y_0^2 + z_0^2 = 1$. Po dosazení pak dostaneme $(2\lambda)^2 + 2(\lambda/2)^2 + (\lambda/2)^2 = 1$ tedy $\lambda = \pm 2/\sqrt{19}$.

Hledané tečné roviny pak musí mít normálový vektor $\mathbf{n}_\varrho$, tedy rovnici $4x + 2y + z = c$, kde neznámé hodnoty $c \in \mathbb{R}$ určíme dosazením spočítaných bodů $a_0 = \pm\frac{1}{\sqrt{19}} \cdot (4, 1, 1)$, kterými tečné roviny musí procházet. Výsledek je

$$4x + 2y + z = \sqrt{19}$$

a

$$4x + 2y + z = -\sqrt{19}.$$

Připomenutí: Derivace pro funkci s více složkami (říkejme jí obecněji: zobrazení) se definuje analogicky jako pro reálnou (jednosložkovou) funkci. Tedy:

Nechť $U \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina. *Derivace* zobrazení $\Phi : U \to \mathbb{R}^m$ ve bodě $a_0 \in U$ je takové lineární zobrazení (označené jako $\Phi'(a_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$), které je nejlepší aproximací zobrazení Φ v bodě a_0 v tomto smyslu:

$$\lim_{a \to a_0} \frac{\| \ \Phi(a) - \Phi(a_0) - \Phi'(a_0)[a - a_0] \ \|}{\|a - a_0\|} = 0$$

kde jsme v čitateli výrazu použili normu (v $\mathbb{R}^m$), což je ekvivalentní tomu, že výše uvedená limita platí v každé složce výrazů v čitateli. Upřesněme, co se tím myslí:

Nechť jednotlivé složky zobrazení jsou funkce $f_i : U \to \mathbb{R}^m$, $i = 1, \dots, m$, tedy

$$\Phi(a) = \big(f_1(a), \dots, f_m(a)\big) \quad \text{pro} \quad a \in U$$

pak výše uvedená limita platí právě když

$$\lim_{a \to a_0} \frac{f_i(a) - f_i(a_0) - \Big(\Phi'(a_0)[a - a_0]\Big)_i}{\|a - a_0\|} = 0 \qquad \text{pro} \qquad i = 1, \dots, m$$

kde $\Big(\Phi'(a_0)[a - a_0]\Big)_i$ je i-tá složka vektoru $\Phi'(a_0)[a - a_0]$.

Také to celé můžeme říct tak (jako u jednosložkové funkce), že pro lineární zobrazení $\Phi'(a_0)$ platí:

$$\Phi(a_0 + \vec{h}) = \Phi(a_0) + \Phi'(a_0)[\vec{h}] + o\big(\|\vec{h}\|\big)$$

Existence derivace: Nechť $U \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina. Nechť $\Phi = (f_1, \dots, f_m) : U \to \mathbb{R}^m$ je takové zobrazení, že všechny složky $f_i : U \to \mathbb{R}^m$ jsou spojitě diferencovatelné (říkáme pak, že Φ je spojitě diferencovatelné, neboli třídy C^1). Pak pro $a \in U$ existuje derivace $\Phi'(a)$ a její matice (ve standardní bázi) typu $m \times n$ je

$$\Phi'(a) = \begin{pmatrix} \operatorname{grad} f_1(a) \\ \vdots \\ \operatorname{grad} f_m(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

kde opět ztotožňujeme lineární zobrazení s jeho maticí.

Derivace složeného zobrazení: Nechť $U \subseteq \mathbb{R}^n$ a $V \subseteq \mathbb{R}^m$ jsou otevřené množiny (v příslušných prostorech). A mějme zobrazení

$$\begin{array}{ccccc} U & \xrightarrow{\Phi} & V & \xrightarrow{\Psi} & \mathbb{R}^k \\ \cap\!\!\!\!\!\raisebox{-0.5ex}{--} & & \cap\!\!\!\!\!\raisebox{-0.5ex}{--} & & \\ \mathbb{R}^n & & \mathbb{R}^m & & \end{array}$$

se složkami $\Phi = (f_1, \dots, f_m)$ a $\Psi = (g_1, \dots, g_k)$.

Jestliže existuje derivace $\Phi'(a)$ v bodě $a \in U$ a derivace $\Psi'(b)$ v bodě $b = \Phi(a) \in V$, pak existuje derivace $\Big(\Psi \circ \Phi\Big)'(a)$ a platí:

$$\Big(\Psi \circ \Phi\Big)'(a) = \Psi'(b) \circ \Phi'(a) = \Psi'\Big(\Phi(a)\Big) \circ \Phi'(a)$$

a maticově zapsáno je to:

$$\Big(\Psi \circ \Phi\Big)'(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(b) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial y_m}(b) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_k}{\partial y_1}(b) & \dots & \frac{\partial g_k}{\partial y_m}(b) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

kde opět ztotožňujeme lineární zobrazení s jeho maticí.

Konkrétně, pro i-tou složku $\Psi \circ \Phi$:

$$\Big(\Psi \circ \Phi\Big)_i(x_1, \dots, x_n) = (g_i \circ \Phi)(x_1, \dots, x_n) = g_i\Big(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)\Big)$$

z tohoto vyplývá tzv. řetězové pravidlo (což je jen přepis maticového násobení) a to ve tvaru

$$\frac{\partial (g_i \circ \Phi)}{\partial x_j}(a) = \sum_{\ell=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial y_\ell}(b) \cdot \frac{\partial f_\ell}{\partial x_j}(a)$$

Poznámka: Někdy potřebujeme vyjádřit nějaký výraz (případně rovnici) v jiných souřadnicích. Co se tím přesně myslí:

Představme si to tak, že v $\mathbb{R}^2$ "žije" funkce f (tj. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$). Prostor $\mathbb{R}^2$ (nebo jeho část) můžeme ale popisovat také pomocí jiných (křivočarých) souřadnic $\Phi : G \to \mathbb{R}^2$, kde $G \subseteq \mathbb{R}^2$ je vhodná množina. Je to podobné, jako když nějaké území na Zemi zachycujeme na různých mapách. A stejně jako nějaká oblast na Zemi vypadá na různých mapách vždy trochu jinak, stejně tak se funkce f vyjádřená pomocí souřadnicového popisu Φ bude také pokaždé jevit jinak (půjde totiž o funkci $f \circ \Phi : G \to \mathbb{R}$). Jak je vidět, i přes složení funkce f se zobrazením Φ, jde vlastně pořád o tentýž "objekt", tj. tutéž "funkci" na prostoru $\mathbb{R}^2$.

Pokud nyní funkci

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

přiřadíme např. následující odvozenou funkci

$$\widetilde{f} := x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

(popsanou kartézskými souřadnicemi), pak chceme vědět, jak bude vypadat odpovídající přiřazení pomocí transformace Φ, kdy funkci

$$F := f \circ \Phi : \quad G \to \mathbb{R}$$

přiřazujeme odpovídající funkci

$$\widetilde{F} = \widetilde{f} \circ \Phi = \left(x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} \right) \circ \Phi : \quad G \to \mathbb{R} \ .$$

Posledně zmíněnou funkci $\widetilde{F}$ ovšem chceme vyjádřit pomocí derivací funkce F podle nových souřadnic (podobně jako $\widetilde{f}$ byla vyjádřena pomocí parciálních derivací funkce f).

Doplnění: Transformace souřadnic je bijektivní zobrazení. Pro *diferencovatelnou* transformaci, pak požadujeme, aby definiční obor i obor hodnot byly obě otevřené množiny a inverzní zobrazení bylo také diferencovatelné.

6.4 Transformujte výraz $x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x}$ pomocí polárních souřadnic:

$$\begin{aligned} \Phi : (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \quad &\to \quad \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \geq 0\} \\ (r, \varphi) \quad &\mapsto \quad (x, y) \end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \ . \end{aligned}$$

Řešení:

Potřebujeme vyjádřit hodnoty $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ pomocí hodnot a $\frac{\partial F}{\partial r}(r, \varphi)$ a $\frac{\partial F}{\partial \varphi}(r, \varphi)$, kde $(x, y) = \Phi(r, \varphi)$ a $F(r, \varphi) = f(x, y)$.

Vezmeme si tedy rovnost

$$F(r, \varphi) = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$$

a použijeme na ní $\frac{\partial}{\partial \varphi}$ a $\frac{\partial}{\partial r}$ čímž podle řetězového pravidla dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial r}\big(f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\big) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial (r\cos\varphi)}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial (r\sin\varphi)}{\partial r} = \cos\varphi \, \frac{\partial f}{\partial x} + \sin\varphi \, \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial F}{\partial \varphi} &= \frac{\partial}{\partial \varphi}\big(f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\big) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial (r\cos\varphi)}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial (r\sin\varphi)}{\partial \varphi} = -r\sin\varphi \, \frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\varphi \, \frac{\partial f}{\partial y} \end{aligned}$$

Řetězové pravidlo je jen důsledek toho, jak se derivuje složené zobrazení: Ze vztahu

$$F = f \circ \Phi$$

(a diferencovatelnosti zobrazení f a Φ) plyne, že v bodě $\alpha = (r, \varphi)$ bude

$$F'(\alpha) = f'(\Phi(\alpha)) \circ \Phi'(\alpha)$$

(což je složení lineárních zobrazení) neboli

$$\left(\frac{\partial F}{\partial r}, \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

Odsud vypočítáme např. invertováním matice

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial F}{\partial r}, \frac{\partial F}{\partial \varphi}\right) \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \left(\frac{\partial F}{\partial r}, \frac{\partial F}{\partial \varphi}\right) \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\frac{\sin\varphi}{r} & \frac{\cos\varphi}{r} \end{pmatrix}$$

nebo analogicky vynásobením rovnic tak, abychom získali výraz $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$, že

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial f}{\partial x} &= \cos\varphi \, \tfrac{\partial F}{\partial r} - \tfrac{\sin\varphi}{r} \, \tfrac{\partial F}{\partial \varphi} \\ \tfrac{\partial f}{\partial y} &= \sin\varphi \, \tfrac{\partial F}{\partial r} + \tfrac{\cos\varphi}{r} \, \tfrac{\partial F}{\partial \varphi} \end{aligned}$$

Takže po dosazení (a vyjádření x a y pomocí r a φ) dostáváme

$$x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} = r\cos\varphi\left(\sin\varphi\,\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\cos\varphi}{r}\,\frac{\partial F}{\partial \varphi}\right) - r\sin\varphi\left(\cos\varphi\,\frac{\partial F}{\partial r} - \frac{\sin\varphi}{r}\,\frac{\partial F}{\partial \varphi}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \varphi}$$

Definice: Parciální derivace vyšších řádů funkce $f : U \to \mathbb{R}$ (kde $U \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina) v bodě $a \in U$ definujeme induktivně jako

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}}(a) := \frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_k}}\right)(a)$$

kde $\frac{\partial^1 f}{\partial x_i} := \frac{\partial f}{\partial x_i}$ a $k \in \mathbb{N}$. Dále se zavádí zkrácené značení $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} := \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}$ a podobně pro vyšší derivace.

Obecnější pohled na to, co je druhá derivace: Jestliže v každém bodě $a \in U$ existuje derivace $f'(a)$, získáme zobrazení

$$\begin{aligned} f' : \quad U &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ a &\mapsto f'(a) = \left(\tfrac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \tfrac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right) \end{aligned}$$

Pokud nyní v $a_0 \in U$ existuje derivace

$$(f')'(a_0) = \begin{pmatrix} \text{grad } \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_0) \\ \vdots \\ \text{grad } \frac{\partial f}{\partial x_n}(a_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a_0) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a_0) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a_0) \end{pmatrix} (= \mathbb{A})$$

nazýváme tuto (čtvercovou) matici *Hessovou* maticí a druhou derivaci $f''(a_0)$ definujeme jako bilineární zobrazení

$$f''(a_0) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$f''(a_0)[\vec{u}, \vec{v}] = \vec{u}^T \cdot \mathbb{A} \cdot \vec{v} \quad \text{pro} \quad \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$$

Obvykle nám ale stačí pracovat s kvadratickým homogenním polynomem (tzv. kvadratickou formou)

$$Q[\vec{h}] := f''(a_0)[\vec{h}, \vec{h}] = \vec{h}^T \cdot \mathbb{A} \cdot \vec{h} \quad \text{pro} \quad \vec{h} \in \mathbb{R}^n \ .$$

Protože bilineární formy a z nich odvozené kvadratické homogenní polynomy si vzájemně jednoznačně odpovídají, tak pro naše účely budeme nakonec druhou derivací rozumět právě tento kvadratický homogenní polynom Q, který ztotožníme jak s bilineární formou $f''(a_0)$, tak s jeho Hessovou maticí $\mathbb{A}$.

Bude to podobné jako když jsme u první derivace ztotožňovali lineární zobrazení, jeho matici a gradient.

Postačující podmínka existence druhé derivace: Jestliže funkce $f : U \to \mathbb{R}$ je třídy C^2 (neboli: všechny druhé parciální derivace $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}$ pro $i, j = 1, \dots, n$ existují na celé množině U a jsou zde spojíte) pak $f''(a)$ existuje pro $a \in U$ a odpovídající Hessova matice je symetrická.

Taylorův polynom: Taylorův polynom řádu 2 (pro bod a_0 a funkci f) je takový polynom $T_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stupně nejvýše 2, který nejlépe aproximuje funkci f v okolí bodu a_0 v tomto smyslu

$$f(a_0 + \vec{h}) = T_2(a_0 + \vec{h}) + o(\|\vec{h}\|^2)$$

tedy

$$\lim_{\vec{h} \to 0} \frac{f(a_0 + \vec{h}) - T_2(a_0 + \vec{h})}{\|\vec{h}\|^2} = 0 \, .$$

Tento polynom je jednoznačně určený (pokud existuje).

Existence a tvar Taylorova polynomu: Jestliže existuje $f''(a_0)$, pak existuje i Taylorův polynom řádu 2 (pro bod a_0 a funkci f) a je tvaru

$$T_2(a_0 + \vec{h}) = f(a_0) + f'(a_0)[\vec{h}] + \frac{1}{2!} f''(a_0)[\vec{h}, \vec{h}]$$

kde $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$.

6.5 (Taylorův polynom)

Napište Taylorův polynom 2. řádu pro

(i) funkci $f(x, y) = e^x \sin y$ v okolí bodu $a_0 = (0, 0)$.

(ii) funkci $f(x, y) = \frac{1}{x-y}$ v okolí bodu $a_0 = (2, 1)$.

Řešení:

(i) Máme

$$f'(a_0) = (e^x \sin y,\ e^x \cos y)_{|a_0} = (0, 1)$$

a

$$f''(a_0) = \begin{pmatrix} e^x \sin y & e^x \cos y \\ e^x \cos y & -e^x \sin y \end{pmatrix}_{|a_0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Tedy

$$T_2(a_0 + \vec{h}) = f(a_0) + f'(a_0)[\vec{h}] + \frac{1}{2!} f''(a_0)[\vec{h}, \vec{h}] =$$

$$= 0 + (0, 1) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(h_1, h_2) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} =$$

$$= h_2 + h_1 h_2$$

kde $\vec{h} = (h_1, h_2)$.

(ii) Podobně dostaneme:

$$f'(a_0) = \left(-\frac{1}{(x-y)^2},\ \frac{1}{(x-y)^2} \right)_{|a_0} = (-1, 1)$$

a

$$f''(a_0) = \begin{pmatrix} \frac{2}{(x-y)^3} & -\frac{2}{(x-y)^3} \\ -\frac{2}{(x-y)^3} & \frac{2}{(x-y)^3} \end{pmatrix}_{|a_0} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} .$$

Tedy

$$T_2(a_0 + \vec{h}) = 1 + (-1, 1) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(h_1, h_2) \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} =$$

$$= 1 - h_1 + h_2 + h_1^2 - 2h_1h_2 + h_2^2$$

kde $\vec{h} = (h_1, h_2)$.

Vyšetřování extrému: Budeme vyšetřovat extrémy funkcí v následujících typech úloh:

- hledání *lokálních* extrémů funkce f na *otevřené* množině U:
  - pro extrém v $a \in U$ je zde nutná podmínka $f'(a) = \vec{0}$;
  - dále se pak vyšetřuje definitnost $f''(a)$ v těchto bodech.
- hledání *absolutních (globálních)* extrémů funkce f na *uzavřené* (a obvykle také omezené) množině M:
  - zde se pomocí nutných podmínek (obvykle to jsou Lagrangeovy multiplikátory) vyloučí ty body, kde určité extrémy nejsou;
  - ve zbylé množině podezřelých bodů (obvykle malé) srovnáme jejich funkční hodnoty, ze kterých vybereme největší a nejmenší;
  - jestliže víme, že extrémů musí být nabyto, pak jsou to právě předchozí nalezené největší a nejmenší hodnoty v podezřelých bodech;
  - Důležité: zde nepotřebujeme používat druhou derivaci! (Ostatně, absolutnost případného extrému nám stejně nemůže potvrdit.)

Více viz “Poznámky k extrémům”.

6.6 (lokální extrémy)
Najděte lokální extrémy následujících funkcí:

(i) $f(x, y) = x^3 - y^3 - 2xy + 6$,

(ii) $f(x, y) = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$.

Řešení:
(i) Funkce je polynom a tedy má derivace všech řádů. Nutnou podmínkou pro extrém v daném bodě je nulovost první derivace.

$$f'(x, y) = (3x^2 - 2y, -3y^2 - 2x)$$

Tedy $f'(x, y) = (0, 0)$ znamená

$$\begin{aligned} 3x^2 &= 2y \\ -3y^2 &= 2x \end{aligned} \quad \overset{y=3x^2/2}{\Longrightarrow} \quad -3\left(\frac{3x^2}{2}\right) = 2x \quad \Longrightarrow \quad x = 0 \ \vee \ x = -\frac{2}{3}$$

tedy řešení jsou právě $(x, y) = (0, 0)$ nebo $(x, y) = (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.

V daných (kritických) bodech dále vyšetříme druhou derivaci:

$$f''(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & -2 \\ -2 & -6y \end{pmatrix}$$

- Pro $(x, y) = (0, 0)$ je $f''(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$. Tedy pro $\vec{h} = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ je

$$f''(0, 0)[\vec{h}, \vec{h}] = -4h_1h_2$$

a tato forma nabývá libovolných hodnot (je indefinitní). V bodě $(0, 0)$ je tedy SEDLO.

• Pro $(x,y) = (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ je $f''(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}) = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$. Podle Sylvestrova kritéria ($\Delta_1 = -4 < 0$, $\Delta_2 = 16 - 4 = 12 > 0$) je forma negativně definitní a tedy v daném bodě je (lokální) MAXIMUM. Toto maximum ale není globální, protože funkce není shora omezená (lze vzít např. zúžení $f(x,0) = x^3 + 6$).

(ii) Funkce je polynom a tedy má derivace všech řádů. Nutnou podmínkou pro extrém v daném bodě je nulovost první derivace.

$$f'(x,y) = (3x^2 - 6y,\ 24y^2 - 6x)$$

Tedy $f'(x,y) = (0,0)$ znamená

$$\begin{aligned} x^2 &= 2y \\ 4y^2 &= x \end{aligned} \quad \overset{x=4y^2}{\Longrightarrow} \quad \left(4y^2\right)^2 = 2y \quad \Longrightarrow \quad y = 0 \ \vee \ y = \frac{1}{2}$$

tedy řešení jsou právě $(x,y) = (0,0)$ nebo $(x,y) = (1, \frac{1}{2})$.

V daných (kritických) bodech dále vyšetříme druhou derivaci:

$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -6 \\ -6 & 48y \end{pmatrix}$$

• Pro $(x,y) = (0,0)$ je $f''(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$. Tedy pro $\vec{h} = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ je

$$f''(0,0)[\vec{h}, \vec{h}] = -12 h_1 h_2$$

a tato forma nabývá libovolných hodnot (je indefinitní). V bodě $(0,0)$ je tedy SEDLO.

• Pro $(x,y) = (1, \frac{1}{2})$ je $f''(1, \frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 12 \end{pmatrix}$. Podle Sylvestrova kritéria ($\Delta_1 = 6 > 0$, $\Delta_2 = 72 - 36 = 36 > 0$) je forma pozitivně definitní a tedy v daném bodě je (lokální) MINIMUM. Toto minimum ale není globální, protože funkce není zdola omezená (lze vzít např. zúžení $f(x,0) = x^3 + 5$).