7. cvičení z Matematické analýzy 2

2. - 6. listopadu 2020

7.1 Najděte derivaci složené funkce $f \circ \Phi$, kde $f = f(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je spojitě diferencovatelná funkce a Φ

$$\Phi : x = \frac{s}{t}, \quad y = s + t \ .$$

Výpočet udělejte nejdříve obecně a pak pro $f(x, y) = xy + y^2$.

Řešení:
Definiční obor zobrazení Φ je $D(\Phi) = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid t \neq 0\}$. Položíme $F = f \circ \Phi$ a tedy

$$F(s, t) = f\big(x(s, t),\ y(s, t)\big) = f\big(\tfrac{s}{t},\ s + t\big)$$

kde složky zobrazení Φ (tj. funkce) jsou označeny stejnými symboly jako proměnné funkce f jak často bývá zvykem. (Zpřehledňuje to zápis, pokud rozumíme tomu, co je jeho smysl).

Podle řetězového pravidla dostáváme

$$\frac{\partial F}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} = \frac{1}{t} \cdot \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{s}{t},\ s + t\right) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{s}{t},\ s + t\right)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} = \left(-\frac{s}{t^2}\right) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{s}{t},\ s + t\right) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{s}{t},\ s + t\right)$$

Pro větší přehlednost neuvádíme všude konkrétní body, ve kterých se derivace počítá (tj. píšeme např. jen $\frac{\partial f}{\partial x}$ namísto $\frac{\partial f}{\partial x}(x(s, t), y(s, t))$ apod.)

Pro konkrétní volbu $f(x, y) = xy + y^2$ je

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{s}{t},\ s + t\right) = s + t$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x + 2y \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{s}{t},\ s + t\right) = \frac{s}{t} + 2(s + t)$$

tedy

$$\frac{\partial F}{\partial s} = \frac{1}{t} \cdot (s + t) + \frac{s}{t} + 2(s + t) = \frac{2s}{t} + 1 + 2(s + t)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \left(-\frac{s}{t^2}\right) \cdot (s + t) + \frac{s}{t} + 2(s + t) = -\frac{s^2}{t^2} + 2(s + t) \ .$$

V konkrétním příkladě jsme samozřejmě mohli zderivovat přímo složenou funkci:

$$F(s, t) = f\big(\tfrac{s}{t},\ s + t\big) = \tfrac{s}{t}(s + t) + (s + t)^2 = \tfrac{s^2}{t} + s + (s + t)^2$$

7.2 Najděte Taylorův polynom druhého řádu pro funkci $f(x, y, z) = xe^y \cos z$ v okolí bodu $a_0 = (0, 0, 0)$.

Řešení:
Máme
$$f'(a_0) = (e^y \cos z, xe^y \cos z, -xe^y \sin z)_{|a_0} = (1,0,0)$$
a
$$f''(a_0) = \begin{pmatrix} 0 & e^y \cos z & -e^y \sin z \\ e^y \cos z & xe^y \cos z & -xe^y \sin z \\ -e^y \sin z & -xe^y \sin z & -xe^y \cos \end{pmatrix}_{|a_0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Tedy
$$T_2(a_0 + \vec{h}) = 0 + (1,0,0) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(h_1, h_2, h_3) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} =$$
$$= h_1 + h_1 h_2$$
kde $\vec{h} = (h_1, h_2, h_3)$.

7.3 (lokální extrémy)
Najděte lokální extrémy následujících funkcí:

(i) $f(x,y) = 6xy - x^3 - 2y^3 + 2$,

(ii) $f(x,y) = 6xy - x^3 - y^3$.

Řešení:
(i) Nutnou podmínkou pro lokální extrém v daném bodě je nulovost první derivace:
$$f'(x,y) = (6y - 3x^2, 6x - 6y^2)$$
Tedy $f'(x,y) = (0,0)$ znamená
$$\begin{aligned} 2y &= x^2 \\ x &= y^2 \end{aligned} \quad \stackrel{x=y^2}{\Longrightarrow} \quad 2y = (y^2)^2 \quad \Longrightarrow \quad y = 0 \ \vee \ y = \sqrt[3]{2}$$
tedy řešení jsou právě $(x,y) = (0,0)$ nebo $(x,y) = (\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2})$.
V daných (kritických) bodech dále vyšetříme druhou derivaci.
$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} -6x & 6 \\ 6 & -12y \end{pmatrix}$$
• Pro $(x,y) = (0,0)$ je $f''(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$. Tedy pro $\vec{h} = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ je
$$f''(0,0)[\vec{h}, \vec{h}] = 12 \cdot h_1 h_2$$
a tato forma nabývá libovolných hodnot (je indefinitní). V bodě $(0,0)$ je tedy SEDLO.
• Pro $(x,y) = (\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2})$ je
$$f''\left(-\tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3}\right) = \begin{pmatrix} -6\sqrt[3]{4} & 6 \\ 6 & -12\sqrt[3]{2} \end{pmatrix}.$$

Podle Sylvestrova kritéria ($\Delta_1 = -6\sqrt[3]{4} < 0$, $\Delta_2 = 72\sqrt[3]{8} - 36 = 72 \cdot 2 - 36 > 0$) je forma daná druhou derivaci negativně definitní a tedy v daném bodě je lokální MAXIMUM.

Toto maximum ale není globální, protože funkce není shora omezená - např. stačí vzít zúžení $f(x,0) = -x^3 + 2$.

(ii) Nutnou podmínkou pro lokální extrém v daném bodě je nulovost první derivace:

$$f'(x,y) = (6y - 3x^2, 6x - 3y^2)$$

Tedy $f'(x,y) = (0,0)$ znamená

$$\begin{aligned} 2y &= x^2 \\ 2x &= y^2 \end{aligned} \quad \overset{x=y^2/2}{\Longrightarrow} \quad 2y = \left(\frac{y^2}{2}\right)^2 \quad \Longrightarrow \quad y = 0 \ \vee \ y = 2$$

tedy řešení jsou právě $(x,y) = (0,0)$ nebo $(x,y) = (2,2)$.

V daných (kritických) bodech dále vyšetříme druhou derivaci.

$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} -6x & 6 \\ 6 & -6y \end{pmatrix}$$

• Pro $(x,y) = (0,0)$ je $f''(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$. Tedy pro $\vec{h} = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ je

$$f''(0,0)[\vec{h}, \vec{h}] = 12 \cdot h_1 h_2$$

a tato forma nabývá libovolných hodnot (je indefinitní). V bodě $(0,0)$ je tedy SEDLO.

• Pro $(x,y) = (2,2)$ je

$$f''(2,2) = \begin{pmatrix} -12 & 6 \\ 6 & -12 \end{pmatrix}.$$

Podle Sylvestrova kritéria ($\Delta_1 = -12 < 0$, $\Delta_2 = 144 - 36 = 108 > 0$) je forma daná druhou derivaci negativně definitní a tedy v daném bodě je lokální MAXIMUM.

Toto maximum ale není globální, protože funkce není shora omezená - např. stačí vzít zúžení $f(x,0) = -x^3$.

7.4 (lokální extrémy)

Najděte lokální extrémy následujících funkcí:

(i) $f(x,y,z) = x^3 + y^2 + \frac{z^2}{2} - 3xy - 2y + 2z$,

(ii) $f(x,y,z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$ pro $x,y,z > 0$.

Řešení:
(i) Funkce je polynom a tedy má derivace všech řádů. Nutnou podmínkou pro lokální extrém v daném bodě je nulovost první derivace.

$$f'(x,y,z) = \left(3x^2 - 3y,\ 2y - 3x - 2,\ z + 2\right)$$

Tedy $f'(x,y,z) = (0,0,0)$ právě když

$$\begin{array}{rcl} y & = & x^2 \\ 2y & = & 3x+2 \\ z & = & -2 \end{array} \quad \overset{y=x^2}{\Longrightarrow} \quad 2x^2 = 3x+2 \quad \Longrightarrow \quad x = 2 \ \vee \ x = -\frac{1}{2}$$

tedy řešení jsou právě $(x,y,z) = (2,4,-2)$ nebo $(x,y,z) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -2\right)$. V daných (kritických) bodech dále vyšetříme druhou derivaci:

$$f''(x,y,z) = \begin{pmatrix} 6x & -3 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

- Pro $(x,y,z) = (2,4,-2)$ je

$$f''(2,4,-2) = \begin{pmatrix} 12 & -3 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Podle Sylvestrova kritéria ($\Delta_1 = 12 > 0$, $\Delta_2 = 24 - 9 = 15 > 0$, $\Delta_2 = \Delta_3 = 15 > 0$) je tato forma pozitivně definitní a tedy v daném bodě je (lokální) minimum.

- Pro $(x,y,z) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -2\right)$ je

$$f''\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -2\right) = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Podle Sylvestrova kritéria ($\Delta_1 = -3 < 0$, $\Delta_2 = -6 - 9 = -15 < 0$, $\Delta_2 = \Delta_3 = -15 < 0$) je tato forma indefinitní a tedy v daném bodě je sedlo.

Můžeme ještě zjistit, jestli lokální extrémy jsou i globální. Protože zřejmě $f(x,0,0) = x^3$ a tato funkce nabývá všech hodnot, původní funkce f žádné globální extrémy nemá.

(ii) Nutnou podmínkou pro lokální extrém v daném bodě je nulovost první derivace:

$$f'(x,y,z) = \left(1 - \frac{y^2}{4x^2},\ \ \frac{y}{2x} - \frac{z^2}{y^2},\ \ \frac{2z}{y} - \frac{2}{z^2}\right)$$

Tedy $f'(x,y,z) = 0$ právě když

$$\begin{array}{rcl} y^2 & = & 4x^2 \\ y^3 & = & 2xz^2 \\ y & = & z^3 \end{array} \quad \overset{y=z^3}{\Longrightarrow} \quad \begin{array}{rcl} (z^3)^2 & = & 4x^2 \\ (z^3)^3 & = & 2xz^2 \end{array} \quad \overset{x=z^7/2}{\Longrightarrow} \quad z^6 = 4\left(\frac{z^7}{2}\right)^2 \quad \overset{z>0}{\Longrightarrow} \quad z = 1$$

Řešení pro $x,y,z > 0$ je pouze $(x,y,z) = \left(\frac{1}{2}, 1, 1\right)$.

Dále vyšetříme druhou derivaci.

$$f''(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{y^2}{2x^3} & -\frac{y}{2x^2} & 0 \\ -\frac{y}{2x^2} & \frac{1}{2x} + \frac{2z^2}{y^3} & -\frac{2z}{y^2} \\ 0 & -\frac{2z}{y^2} & \frac{2}{y} + \frac{4}{z^3} \end{pmatrix}$$

- Pro $(x,y,z) = \left(\frac{1}{2}, 1, 1\right)$ je

$$f''\left(\frac{1}{2}, 1, 1\right) = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

Podle Sylvestrova kritéria ($\Delta_1 = 4 > 0$, $\Delta_2 = 12 - 4 = 8 > 0$, $\Delta_3 = 72 - 16 - 24 = 32 > 0$) je forma daná druhou derivaci pozitivně definitní a tedy v daném bodě je lokální MINIMUM.

Při hledání absolutních extrémů budeme využívat tyto věty:

Věta: Spojitá funkce na uzavřené a omezené (tzv. *kompaktní*) množině nabývá svého maxima i minima.

Věta: Nechť $U \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $f, g_i : U \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, k$ jsou spojitě diferencovatelné funkce. Položme

$$M = \bigcap_{i=1}^{k} \{a \in U \mid g_i(a) = 0\}.$$

Nechť $a_0 \in M$ je bodem lokálního extrému funkce f zúžené na M. Jestliže vektory

$$\text{grad } g_1(a_0), \dots, \text{grad } g_k(a_0) \ \text{ jsou lineárně nezávislé}$$

pak existují $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ (tzv. *Langrangeovy multiplikátory*), že

$$f'(a_0) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i g_i'(a_0) \ .$$

(Jestliže výše zmíněná lineární nezávislost platí v každém bodě $a \in M$, pak se množina M nazývá *varieta* (angl. *manifold*) a je možné ji přiřadit dimenzi - pomocí věty o implicitní funkci - a sice $\dim M = n - k$. Dimenze tak odpovídá dimenzi n původního prostoru $\mathbb{R}^n$ sníženou o počet k nezávislých vazeb daných zobrazením Φ.)

7.5 (vázané extrémy)

Najděte nejmenší a největší hodnoty

(i) funkce $f(x, y) = x - y + 3$ za podmínky $3x^2 + 5xy + 3y^2 = 1$,

(ii) funkce $f(x, y, z) = x - 2y + 2z$ s vazebnou podmínkou $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Načrtněte útvary určené těmito vazbami.

Řešení:

(a) Hledáme absolutní extrémy funkce $f(x, y) = x - y + 3$ na množině

$$M = \{(x, y) \in U \mid \Phi(x, y) = 0\}$$

kde $U = \mathbb{R}^2$ (je tedy otevřená) a $\Phi(x, y) = 3x^2 + 5xy + 3y^2 - 1$.

- Ověříme, že grad $\Phi(a) \neq (0, 0)$ pro každé $a \in M$:

  Protože

  $$\text{grad } \Phi(x, y) = \Phi'(x, y) = \Big(6x + 5y,\ 5x + 6y\Big)$$

  tak $\Phi'(x, y) = (0, 0)$ právě když $(x, y) = (0, 0)$. Bod $(0, 0)$ ale není v M, takže v každém bodě $a \in M$ je $\Phi'(a) \neq (0, 0)$.

- Z Langrangeovy věty proto máme, že v bodě $a = (x, y) \in M$ lokálního extrému f na M existuje $\lambda \in \mathbb{R}$, že

  $$(1, -1) = f'(a) = \lambda \cdot \Phi'(a) = \lambda\Big(6x + 5y, 5x + 6y\Big)$$

  a

  $$3x^2 + 5xy + 3y^2 = 1.$$

  Jelikož z rovnic plyne, že $\lambda \neq 0$, dostáváme rovnici $6x + 5y = \frac{1}{\lambda} = -(5x + 6y)$. Odsud plyne $x = -y$ a po dosazení do vazby získáme kandidáty na extrémy:

  $$(1, -1), \qquad (-1, 1)$$

  s hodnotami

  $$f(1, -1) = 5, \qquad f(-1, 1) = 1.$$

• Potřebujeme ještě zjistit, zda množina M je vůbec omezená (uzavřenost M plyne snadno z toho, že $M = \Phi^{-1}(\{0\})$, neboli že je to vzor uzavřené množiny $\{0\}$ při spojitém zobrazení Φ).

Doplněním na čtverec

$$1 = 3x^2 + 5xy + 3y^2 = 3\left(x + \frac{5}{6}y\right)^2 + \frac{11}{12}y^2$$

zjistíme, že jde o omezenou množinu (konkrétně o (natočenou) elipsu). To lze zjistit i z toho, že kvadratická forma

$$Q(x,y) = 3x^2 + 5xy + 3y^2 = (x,y)\begin{pmatrix} 3 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

je pozitivně definitní (např. pomocí Sylvestrova kritéria).

• Spojitá funkce f tak na uzavřené a omezené množině M skutečně nabývá svého maxima v bodě $(1,-1)$ a minima v bodě $(-1,1)$.

Poznámka: Úloha (a) je ekvivalentní tomu, když máme najít na implicitně zadané křivce $M:\ 3x^2 + 5xy + 3y^2 = 1$ body, kde tečna přímka je rovnoběžná s přímkou $x - y + 3 = 0$.

(b) Postupujeme podobně jako v (a). Vazba představuje sféru s poloměrem 1. Položíme

$$\Phi(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1\ .$$

• Protože

$$\Phi'(x,y,z) = (2x, 2y, 2z)$$

tak $\Phi'(x,y,z) = \vec{0}$ právě když $(x,y,z) = (0,0,0)$, což ale zase nemůže splnit vazbu. Takže v každém bodě množiny

$$M = \{(x,y,z) \in U \mid \Phi(x,y,z) = 0\}$$

(kde $U = \mathbb{R}^3$) je $\Phi'(x,y,z) \neq \vec{0}$.

• Pro bod $a = (x,y,z) \in M$ lokálního extrému f na M z Lagrangeovy vety teď existuje $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$(1,-2,2) = f'(a) = \lambda \cdot \Phi'(a) = \lambda(2x, 2y, 2z)$$

a

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Proto musí být $\lambda \neq 0$ a vyjádřením proměnných

$$x = \frac{1}{2\lambda} \quad y = -\frac{1}{\lambda} \quad z = \frac{1}{\lambda}$$

a dosazením do vazby získáme řešení $a = \pm\frac{1}{3}(1,-2,2)$ a $\lambda = \pm\frac{3}{2}$.

• Protože f nabývá extrému na M (neboť M je evidentně omezená a uzavřená), jsou uvedené body skutečně (absolutní) extrémy a funkční hodnoty jsou $f(a) = \pm 3$.

Poznámka: Úloha (b) je ekvivalentní tomu, když máme najít na implicitně zadané ploše $M:\ x^2 + y^2 + z^2 = 1$ body, kde tečná rovina je rovnoběžná s rovinou $x - 2y + 2z = 0$.

7.6 (vázané extrémy)

Do elipsy $x^2 + 3y^2 = 12$ vepište rovnoramenný trojúhelník takový, že má základnu rovnoběžnou s osou x a má maximální obsah.

Řešení:
Vzhledem k symetrii elipsy, stačí vyšetřit případ, kdy jeden z vrcholů (x, y) základny bude ležet na polovině elipsy

$$M : x^2 + 3y^2 = 12 \quad \& \quad x > 0$$

a vrchol naproti základně bude v bodě $(0, 2)$.

Na M nyní hledáme maximum funkce

$$f(x, y) = x(2 - y)$$

(což je obsah daného trojúhelníka).

Použijeme metodu Langrangeových multiplikátorů. Množina M je zadána implicitně jako

$$M = \{(x, y) \in U \mid \Phi(x, y) = 0\}$$

kde $U : x > 0$ a vazbová funkce je

$$\Phi(x, y) = x^2 + 3y^2 - 12 \ .$$

Dále, vektor grad $\Phi(x, y) = \Big(2x, \ 6y\Big)$ je nenulový pro každé $(x, y) \in M$ (jinak by to byl spor s tím, že má platit $x^2 + 3y^2 = 12$).

Věta o Lagrangeových multiplikátorech nám tedy říká, že pro extrém $a = (x, y)$ existuje $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$\big(2 - y, \ -x\big) = f'(a) = \lambda\Phi'(a) = \lambda \cdot \Big(2x, \ 6y\Big)$$

a

$$x^2 + 3y^2 = 12.$$

Z rovnic a omezení množinou U plyne, že ani jedna z hodnot x, y nemůže být nulová, takže máme

$$\begin{array}{rcl} 2-y & = & 2\lambda x \\ -x & = & 6\lambda y \\ x^2+3y^2 & = & 12 \end{array} \quad \overset{\lambda=-x/(6y)}{\Longrightarrow} \quad \begin{array}{c} 2-y = -\frac{x^2}{3y} \\ x^2+3y^2 = 12 \end{array} \quad \overset{x^2=12-3y^2}{\Longrightarrow} \quad 3y(2-y) = 3y^2 - 12 \quad \overset{(x,y)\in M}{\Longrightarrow} \quad y = -1$$

tedy jediné řešení je $(x, y) = (3, -1)$ s hodnotou $f(3, -1) = 9$.

Abychom věděli, že spojitá funkce f bude nabývat svého maxima, potřebujeme množinu M uzavřít (omezená pak už bude). To znamená přidat k M body $(0, 2)$ a $(0, -2)$, které se tímto stanou dalšími podezřelými body z extrému. Jejich odpovídající hodnoty jsou

$$f\big(0, 2\big) = f\big(0, -2\big) = 0 \ .$$

Množina $\overline{M} = M \cup \{(0, 2), \ (0, -2)\}$ je nyní uzavřená a omezená množina a spojitá funkce tak na $\overline{M}$ nabývá svého maxima a minima.

Porovnáním hodnot podezřelých bodů vidíme, že pro vrchol $(3, -1)$ je skutečně nabyt maximální obsah.

7.7 (vázané extrémy na uzavřené množině s vnitřkem a hladkým okrajem)

Najděte nejmenší a největší hodnoty funkce

$$f(x, y) = x^2 - (y - 1)^2$$

na množině

$$M : \quad x^2 + y^2 \leq 1.$$

Načrtněte tuto množinu.

Řešení:
Množina M je kruh o poloměru 1 se středem v počátku. Příklad rozdělíme na vyšetření (volného) extrému na otevřené množině

$$M^\circ : \quad x^2 + y^2 < 1$$

a vázaného extrému na hranici

$$\partial M : \quad x^2 + y^2 = 1 \ .$$

Extrém na M°: Absolutní extrém na M° musí být lokální a tedy musí platit

$$f'(x,y) = \big(2x,\ -2(y-1)\big) = (0,0)$$

což nastává právě když $(x,y) = (0,1)$. Tento bod ale neleží v M°, takže žádné podezřelé body zatím nedostáváme.

Extrém na ∂M:

Použijeme metodu Langrangeových multiplikátorů. Pro extrém $a = (x,y)$ na kružnici dané vazbovou funkcí

$$\Phi(x,y) = x^2 + y^2 - 1$$

existuje $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$\big(2x,\ -2(y-1)\big) = f'(a) = \lambda \Phi'(a) = \lambda \cdot \Big(2x,\ 2y\Big)$$

a

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Tedy má platit

$$x = x\lambda$$

$$1 - y = y\lambda \ .$$

Odsud máme, že buď je $x = 0$ nebo $\lambda = 1$. Z první možnosti a rovnice kružnice máme body $(0, \pm 1)$. Z druhé, tj. $\lambda = 1$ dostáváme $y = \frac{1}{2}$ a tudíž body $\Big(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\Big)$. Jejich funkční hodnoty jsou:

$$f\big(0,1\big) = 0, \qquad f\big(0,-1\big) = -4$$

$$f\big(\pm\tfrac{\sqrt{3}}{2}, \tfrac{1}{2}\big) = \tfrac{1}{2} \ .$$

Množina M je uzavřená a omezená množina a spojitá funkce tak v těchto bodech nabývá svého maxima a minima.

Porovnáním hodnot podezřelých bodů dostáváme, že funkce nabývá svého maxima v bodech $\big(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\big)$ a minima v bodě $(0,-1)$.