8. cvičení z Matematické analýzy 2

9. - 13. listopadu 2020

8.1 (vázané extrémy)

Na elipse $M: \ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ nalezněte body, které mají největší a nejmenší vzdálenost od přímky $p: \ 3x + y - 9 = 0$.

Řešení:
Příklad můžeme řešit dvěma způsoby:

(1) Funkce vyjadřující vzdálenost bodu $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ od přímky dané rovnicí $\alpha x' + \beta y' + \gamma = 0$ je dána hodnotou $\frac{|\alpha x + \beta y + \gamma|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$ (je to tvar analogický k příkladu **1.2**.)

Budeme tedy hledat globální extrémy funkce

$$f(x, y) = \frac{|3x + y + 9|}{\sqrt{10}}$$

Protože absolutní hodnota není diferencovatelná v nule, musíme úlohu rozdělit na takové případy, abychom mohli využít známé věty k vyšetřování extrémů.

Úlohu tedy rozdělíme na vyšetření funkce f na množině

$M_1 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \ \& \ 3x + y - 9 \neq 0$

která je tudíž zadaná jako

$$M_1 = \{(x, y) \in U \mid g(x, y) = 0\}$$

kde $g(x, y) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1$ je vazbová funkce a $U : 3x + y - 9 \neq 0$ je otevřená množina v $\mathbb{R}^2$ (je to totiž doplněk uzavřené množiny dané příslušnou rovností),

a dále na množině

$M_2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \ \& \ 3x + y - 9 = 0$.

Vyšetření na M_1:

Pro bod $a \in M_1$ globálního extrému f musí podle Langrangeovy věty platit, že ex. $\lambda \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\text{grad } f(a) = \lambda \cdot \text{grad } g(a) \ .$$

To je ekvivalentní vztahu

$$\text{grad } \widetilde{f}(a) = \widetilde{\lambda} \cdot \text{grad } g(a)$$

pro nějaké $\widetilde{\lambda} \in \mathbb{R}$, kde $\widetilde{f}(x, y) = 3x + y - 9$ a do nového parametru $\widetilde{\lambda}$ jsme "schovali"znaménko, co vznikne při derivaci absolutní hodnoty, a koeficient $\frac{1}{\sqrt{10}}$.

Řešíme tedy rovnice

$$(3, \ 1) = \text{grad } \widetilde{f}(a) = \widetilde{\lambda} \cdot \text{grad } g(a) = \widetilde{\lambda} \left(\frac{x}{2}, \frac{2y}{9} \right)$$

a

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \ \ \& \ \ (x, y) \in U$$

Protože musí být $\widetilde{\lambda} \neq 0$ (neboť je $3 = \widetilde{\lambda}\frac{x}{2}$), dostaneme vydělením rovnosti z vektorové rovnice ihned

$$\frac{3}{1} = \frac{\widetilde{\lambda}\frac{x}{2}}{\widetilde{\lambda}\frac{2y}{9}}$$

neboli vztah $y = \frac{3}{4}x$, který po dosazení do rovnice elipsy dává rovnici:

$$1 = \frac{x^2}{4} + \frac{(\frac{3}{4}x)^2}{9} = \frac{5}{16}x^2$$

tedy body $(x, y) = \pm\left(\frac{4}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}}\right) \in U$. V těch funkce f vzdálenosti od přímky nabývá hodnot $\frac{9-3\sqrt{5}}{\sqrt{10}}$ a $\frac{9+3\sqrt{5}}{\sqrt{10}}$.

Vyšetření na M_2:
Dosazením $y = 9 - 3x$ do rovnice elipsy máme

$$\frac{x^2}{4} + \frac{(9-3x)^2}{9} = 1 \;\Leftrightarrow\; \frac{5}{4}x^2 - 2x + 8 = 0$$

s diskriminantem $D = 4 - 5 \cdot 8 < 0$ a tedy množina M_2 je prázdná. (Úloha bývá obvykle takto zadána - tj. aby přímka neměla průnik s elipsou).

Jediné podezřelé body jsou tak body z M_1 a v nich (díky uzavřenosti a omezenosti M) funkce f nabývá své nejmenší a nejmenší hodnoty.

(2) Jestliže přímka nebude protínat elipsu (což zde skutečně nastává), můžeme použít "intuitivní" náhled, který je ale vlastně pouze jinou verzí prvního postupu (díky němuž je také korektnost druhého postupu zaručena).

Elipsa M je vrstevnicí (vazbové) funkce $g(x, y) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1$, takže normála kolmá na tečnu v bodě $a = (x, y) \in M$ je gradientem funkce g. Hledáme tedy body $a = (x, y) \in M$, ve kterých je normála k M násobkem normály přímky p. Pak tedy existuje $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$\left(\frac{x}{2}, \frac{2y}{9}\right) = \text{grad } g(a) = \lambda \cdot (3, 1) \quad \text{a} \quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Není překvapením, že z první podmínky opět dostáváme rovnici $y = \frac{3}{4}x$ a tedy i stejné řešení jako v prvním postupu.

8.2 (vázané extrémy na uzavřené množině s vnitřkem a hladkým okrajem)
Najděte nejmenší a největší hodnoty funkce $f(x, y) = 3xy$ na množině

$$M: \quad x^2 + y^2 \leq 2.$$

Načrtněte tuto množinu.

Řešení:
Množina M je kruh o poloměru 2. Příklad rozdělíme na vyšetření (volného) extrému na otevřené množině

$$M^\circ: \quad x^2 + y^2 < 2$$

a vázaného extrému na hranici

$$\partial M : \quad x^2 + y^2 = 2 \ .$$

Extrém na M°: Absolutní extrém na M° musí být lokální a tedy musí platit

$$f'(x,y) = \big(3y,\ 3x\big) = (0,0)$$

což nastává právě když $(x,y) = (0,0)$. Máme tak podezřelý bod $(x,y) = (0,0)$ s hodnotou $f(0,0) = 0$.

Extrém na ∂M:

Použijeme metodu Langrangeových multiplikátorů. Pro extrém $a = (x,y)$ na kružnici dané vazbovou funkcí

$$\Phi(x,y) = x^2 + y^2 - 2$$

existuje $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$\big(3y,\ 3x\big) = f'(a) = \lambda\Phi'(a) = \lambda \cdot \Big(2x,\ 2y\Big)$$

a

$$x^2 + y^2 = 2.$$

Ani jedna z proměnných nemůže být nulová, takže máme $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}\lambda = \frac{y}{x}$, tedy $x^2 = y^2$. Dosazením do rovnice kružnice dostaneme kandidáty na extrémy:

$$\pm\,(1,-1)\,, \qquad \pm\,(1,1)\,,$$

s odpovídajícími hodnotami

$$f\big(-1,1\big) = f\big(1,-1\big) = -3, \qquad f\big(1,1\big) = f\big(-1,-1\big) = 3.$$

Množina M je uzavřená a omezená množina a spojitá funkce tak na M nabývá svého maxima a minima.

Porovnáním hodnot podezřelých bodů dostáváme, že funkce nabývá svého maxima v bodech $\pm\,(1,1)$ a minima v bodech $\pm\,(1,-1)$.

8.3 (vázané extrémy na uzavřené množině s vnitřkem)

Kruhový talíř o rovnici $x^2 + y^2 \leq 1$ je zahřátý na teplotu $T(x,y) = x^2 + 2y^2 - x$. Najděte nejteplejší a nejstudenější bod na talíři.

Řešení:

Vyšetření extrému T na uzavřené a omezené množině $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ rozdělíme na případ (volného) extrému na otevřené množině

$$A^\circ : \quad x^2 + y^2 < 1$$

a případ vázaného extrému na

$$\partial A : \quad x^2 + y^2 = 1.$$

Extrém na A°:

Jestliže $a = (x,y) \in A^\circ$ je extrém T na A, pak je i lokálním extrémem T na A°. Takže musí platit, že

$$T'(a) = (2x - 1, 4y) = 0$$

tedy $a = (\frac{1}{2}, 0)$ a tento bod skutečně patří do A°. Máme tedy první podezřelý bod.

Extrém na ∂A:

Jestliže $a = (x, y) \in \partial A$ je extrém T na A, pak je i (vázaným) extrémem T na

$$\partial A : \quad \Phi(x, y) = 0$$

kde $\Phi(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Musí tedy existovat $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$(2x - 1, 4y) = T'(a) = \lambda\Phi'(a) = \lambda(2x, 2y)$$

a

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Takže máme

$$\begin{array}{rcl} 2x-1 & = & \lambda 2x \\ 2y & = & \lambda y \\ x^2+y^2 & = & 1 \end{array} \quad \xrightarrow{(2-\lambda)y=0} \quad \begin{array}{l} y = 0: \quad x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1 \\ \lambda = 2: \quad 2x - 1 = 2 \cdot 2x \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{1}{2} \quad \xrightarrow{y^2=1-x^2} \quad y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}$$

Dostáváme $a = \pm(1, 0)$ nebo $a = (-\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2})$. Teď víme, že jedinými možnými kandidáty na extrémy jsou body

$$\left(\tfrac{1}{2}, 0\right), \ (1, 0), \ (-1, 0), \ \left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \ \text{a} \ \left(-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Protože T nabývá na (uzavřené a omezené) množině A extrému, porovnáním funkčních hodnot

$$T\left(\tfrac{1}{2}, 0\right) = -\tfrac{1}{4}, \quad T(1, 0) = 0, \quad T(-1, 0) = 2, \quad T\left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \tfrac{9}{4} = T\left(-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

zjistíme, že T nabývá minima v $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ a maxima v $\left(-\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

8.4 (extrémy pro po částech diferencovatelný okraj)
Nalezněte největší a nejmenší hodnotu funkce $f(x, y) = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$ na množině

$$M : \quad x^2 \le y \le 4 .$$

Řešení:
Množina M je část ležící nad parabolou a pod přímkou a je zřejmě omezená i uzavřená (je průnikem uzavřených množin).

Příklad opět rozdělíme na vyšetření (volného) extrému na otevřené množině

$$M^\circ : \quad x^2 < y < 4$$

a vázaného extrému na hranici

$$\partial M : \quad \begin{array}{l} (y = x^2 \ \ \& \ \ -2 \le x \le 2) \ \ \vee \\ (y = 4 \ \ \& \ \ -2 \le x \le 2) \end{array}$$

kterou ale nejde vyjádřit pomocí jediné diferencovatelné vazby. Vazbami jsou dvě křivky (část paraboly a úsečka). POZOR: tyto dvě vazby ale NEPLATÍ současně! Každá vyjadřuje JINOU část okraje!

Extrém na M°:

$$f' = \big(6x^2 + 8x - 2y, 2y - 2x\big) = (0,0)$$

nastává (vzhledem k $x, y > 0$) právě když je splněna soustava

$$y = 3x^2 + 4x$$

$$y = x\ .$$

Jediná řešení této soustavy $(0,0)$ a $(-1,-1)$ ale nepatří do M°, takže žádné podezřelé body zatím nedostáváme.

Extrém na ∂M:

Na obou křivkách můžeme použít Lagrangeovu větu, ale nejvhodnější bude zavést nějakou parametrizaci a vyšetřit lokální extrémy zúžených funkcí:

• část paraboly parametrizujeme přirozeně pomocí

$$\varphi_1 : (-2,2) \to \mathbb{R}^2, \quad \varphi_1(t) = (t, t^2)\ .$$

Pokud $a = \varphi_1(t_0)$ je bodem extrému f na části paraboly, pak je t_0 extrémem funkce $f \circ \varphi_1$ a tedy musí být $(f \circ \varphi_1)'(t_0) = 0$. Tuto úvahu ovšem můžeme udělat právě jen proto, že t_0 je VNITŘNÍM bodem intervalu $(-2,2)$. Z tohoto důvodu MUSÍME při vyšetřování části paraboly vynechat její koncové body, kde navazuje na úsečku (tyto koncové body automaticky zařadíme do podezřelých bodů).

Budeme tedy vyšetřovat funkci

$$g_1(t) := f(\varphi_1(t)) = f(t, t^2) = 4t^2 + t^4 \quad \text{pro} \quad t \in (-2,2)\ .$$

Máme $g_1'(t) = 8t + 4t^3 = 0$ právě když $t = 0$. Podezřelým bodem tak je $(0,0) \in \partial M$ s hodnotou $f(0,0) = 0$.

• podobně úsečku parametrizujeme přirozeně pomocí OTEVŘENÉHO intervalu

$$\varphi_2 : (-2,2) \to \mathbb{R}^2, \quad \varphi_2(t) = (t, 4)\ .$$

Budeme tedy vyšetřovat funkci

$$g_2(t) := f(\varphi_2(t)) = f(t,4) = 2t^3 + 4t^2 - 8t + 16 \quad \text{pro} \quad t \in (-2,2)\ .$$

Rovnice $g_2'(t) = 6t^2 + 8t - 8 = 2(3t-2)(t+2) = 0$ má řešení pro $t = \frac{2}{3} \in (-2,2)$. Podezřelým bodem tak je $(\frac{2}{3}, 4) \in \partial M$ s hodnotou $f\left(\frac{2}{3}, 4\right) = \frac{16\cdot 22}{27}$.

• zbývají už jen dva průsečíky křivek $(-2,4)$ a $(2,4)$ s hodnotami $f(-2,4) = f(2,4) = 32$, které taky zahrneme mezi podezřelé body.

Porovnáním hodnot podezřelých bodů (tj. $32 > \frac{16\cdot 22}{27} > 0$) dostáváme, že funkce evidentně nabývá svého maxima v bodech $(-2,4)$ a $(2,4)$ a minima v bodě $(0,0)$.

8.5 (extrémy pro po částech diferencovatelný okraj)

Nalezněte největší a nejmenší hodnotu funkce $f(x,y) = x^2 y(4 - x - y)$ na množině

$$M: \quad x \geq 0 \ \ \&\ \ y \geq 0 \ \ \&\ \ x + y \leq 6\ .$$

Řešení:
Množina M je trojúhelník s vrcholy $(0,0)$, $(6,0)$ a $(0,6)$ a je zřejmě omezená i uzavřená (je průnikem uzavřených polorovin).

Příklad opět rozdělíme na vyšetření (volného) extrému na otevřené množině

$$M^\circ: \quad x > 0 \ \ \& \ \ y > 0 \ \ \& \quad x + y < 6$$

a vázaného extrému na hranici

$$\partial M: \quad \begin{array}{l} (y = 0 \ \ \& \ \ 0 \leq x \leq 6) \ \ \vee \\ (x = 0 \ \ \& \ \ 0 \leq y \leq 6) \ \ \vee \\ (x + y = 6 \ \ \& \ \ 0 \leq x \leq 6) \end{array}$$

kterou ale nejde vyjádřit pomocí jediné diferencovatelné vazby. Vazbami jsou tři otevřené úsečky (hraný trojúhelníky) a tři body (vrcholy trojúhelníků). Tyto vazby ale opět NEJSOU splněné SOUČASNĚ (což je vidět i tím, že používáme logickou spojku "NEBO", nikoliv "A").

Extrém na M°:

$$f' = \left(8xy - 3x^2y - 2xy^2, 4x^2 - x^3 - 2x^2y\right) = (0,0)$$

nastává (vzhledem k tomu, že $x, y > 0$) právě když je splněna soustava

$$8 = 3x + 2y$$

$$4 = x + 2y\ .$$

Tedy podezřelým bodem je řešení $a = (2,1) \in M^\circ$ s hodnotou $f(2,1) = 4$.

Extrém na ∂M:

Na obou odvěsnách trojúhelníku je funkce f identicky nulová, takže všechny tyto body prostě zařadíme do podezřelých bodů. Zbývá vyšetřit otevřenou úsečku, která představuje třetí stranu. Tentokrát ji prostě zparametrizujeme pomocí

$$\varphi(t) = (t, 6 - t) \ \text{ pro } \ t \in (0,6)$$

a vyšetříme tak (lokální) extrémy funkce

$$g(t) := (f \circ \varphi)(t) = -2t^2(6 - t) = 2t^3 - 12t^2$$

pro $t \in (0,6)$. Máme

$$g'(t) := 6t^2 - 24t = 6t(t - 4) = 0$$

právě když $t = 4 \in (0,6)$ (zdůrazněme, že tento interval nutně musí být OTEVŘENÝ - jinak nemůžeme použít nutnou podmínku, tj. nulovost derivace). Tedy podezřelý bod je $a = (4,2)$ s hodnotou $f(4,2) = -64$.

Porovnáním hodnot podezřelých bodů (zejména nezapomínejme na vrcholy trojúhelníku jako samostatné vazby, které nelze zařadit do ostatních vazeb, protože ty musí být definovány v rámci otevřených množin - opět proto, abychom mohli derivovat) dostáváme, že funkce tedy evidentně nabývá svého maxima v bodě $(2,1)$ a minima v bodě $(4,2)$.

8.6 (vázané extrémy - aplikace)
Najděte tři pozitivní čísla jejichž součin je maximální, a jejichž součet je roven 100.

Řešení:
Zadání příkladu lze interpretovat také tak, že hledáme maximální objem kvádru, který se vejde do pravidelného trojbokého jehlanu, jehož jeden vrchol je společný s vrcholem kvádrů. Intuitivně lze očekávat, že maximální takový objem bude odpovídat krychli.

Budeme tedy hledat body maxima funkce

$$f(x,y,z) = xyz$$

na množině

$$M = \{(x,y,z) \in U \mid \Phi(x,y,z) = 0\},$$

kde

$$U: \ x,y,z > 0$$

je otevřená množina a

$$\Phi(x,y,z) = x + y + z - 100$$

je vazbová funkce.

Protože U je OTEVŘENÁ (což je podstatné!) a $\Phi'(a) \neq (0,0,0)$ pro každé $a \in M$, tak můžeme použít Langrangeovu podmínku pro extrém na M. Pro bod extrému $a = (x,y,z) \in M$ pak musí existovat $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$(yz, xz, xy) = f'(a) = \lambda\Phi'(a) = \lambda(1,1,1)$$

a

$$x + y + z = 100\ .$$

Odsud máme např. že $yz = \lambda = xz$ a protože $z > 0$, tak dostaneme $x = y$. Podobně odvodíme, že $x = y = z$ a tedy $x + x + x = 100$. Takže jediný podezřelý bod z extrému je $a = \left(\frac{100}{3}, \frac{100}{3}, \frac{100}{3}\right)$ s hodnotou $f\left(\frac{100}{3}, \frac{100}{3}, \frac{100}{3}\right) = \left(\frac{100}{3}\right)^3$.

Abychom mohli využít věty o nabytí extrémů, potřebujeme ale uzavřenou množinu, což M není (je to trojúhelník, ale bez hran). Tak si M prostě uzavřeme, čímž dostaneme

$$\overline{M} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x,y,z \geq 0 \quad \& \quad \Phi(x,y,z) = 0\},$$

což je trojúhelník i s hranami. Na těchto přidaných hranách je ale funkce f nulová (a tudíž snadno uchopitelná), takže všechny hrany můžeme zařadit mezi podezřelé body z extrémů na $\overline{M}$. Tím jsme prošli všechny body $\overline{M}$.

Množina $\overline{M}$ je teď už uzavřená a omezená, takže spojitá funkce f zde nabývá svých extrémů. Porovnáním funkčních hodnot v podezřelých bodech teď snadno dostáváme, že na hranách nabývá f svého minima a v bodě $\left(\frac{100}{3}, \frac{100}{3}, \frac{100}{3}\right)$ svého (jediného) maxima (jak jsem očekávali).

8.7 (vázané extrémy - vzdálenost)
Najděte vzdálenost paraboly $M: \ y = x^2$ od přímky $p: \ y = x - 2$.

Řešení:
Můžeme použít některý z postupů v řešení příkladu **7.4**, ale musíme si uvědomit, že parabola NENÍ omezená množina (i když je uzavřená a má tečny ve všech svých bodech). Naštěstí ale funkce vzdálenosti

bodů paraboly M od přímky p i zde "v nekonečnu roste do nekonečna." Minimum vzdálenosti tedy musí být nabyto v nějakém bodě M a v něm musí být tečna rovnoběžná s přímkou p.

Tento argument nebudeme dále podrobněji rozebírat a spokojíme se zde s geometrickým náhledem. Tj. hledáme bod na parabole M, kde tečná přímka je rovnoběžná s přímkou p:

Směrnici $\alpha \in \mathbb{R}$ tečny v bodě $a \in M$, který je grafem funkce $g(x) = x^2$, můžeme získat také právě pomocí derivace této funkce jedné proměnné, tj. $\alpha = \frac{d}{dx}(x^2) = 2x$. Směrnice přímky p je zřejmě 1. Takže z $2x = 1$ plyne $x = \frac{1}{2}$ a tedy $y = x^2 = \frac{1}{4}$.

Vzdálenost ρ bodu $(x, y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) \in M$ od přímky $p:\ x' - y' - 2 = 0$ je tedy podle obecného vzorce (viz **7.4**)

$$\varrho = \frac{|x - y - 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - 2|}{\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{8}.$$

8.8 (extrémy pro dvě vazby)

Určete největší a nejmenší hodnoty funkce $f(x, y, z) = xyz$ na množině M dané podmínkami

(a) $x + y + z = 5$ a $xy + yz + zx = 8.$

(b) $x + y + z = 0$ a $x^2 + y^2 + z^2 = 1.$

Řešení:

(i) Tentokrát máme vazby dvě a budeme tedy potřebovat ověřit jejich nezávislost (v bodech množiny M), tj. lineární nezávislost gradientů vazeb v příslušných bodech.

Položme

$$\Phi_1(x, y, z) = x + y + z - 5$$

a

$$\Phi_2(x, y, z) = xy + yz + zx - 8.$$

Pak je $M = \{a \in \mathbb{R}^3 \mid \Phi_1(a) = 0 \ \ \& \ \ \Phi_2(a) = 0\}$.

uzavřenost M:

Množiny $\{a \in \mathbb{R}^3 \mid \Phi_i(a) = 0\}$ je vzorem jednobodové (a tedy uzavřené) množiny $\{0\}$ při spojitých zobrazeních Φ_i a jsou tudíž uzavřené. Množina M je jejich průnikem a proto je také uzavřená.

omezenost M:

Buď si vyjádříme jednu proměnnou z první rovnice (např. $z = 5 - x - y$), dosadíme do druhé a tu přepíšeme doplněním na čtverec:

$$xy + (x + y)(5 - x - y) = 8$$

$$x^2 + y^2 + xy - 5x - 5y = -8$$

$$\left(x + \frac{y}{2} - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(y - \frac{5}{3}\right)^2 = \frac{1}{3}$$

nebo použijeme jednodušší a elegantnější postup, který využije konkrétního tvaru rovnic:

$$5^2 = (x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = x^2 + y^2 + z^2 + 2 \cdot 8$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 5^2 - 2 \cdot 8 (= 9)$$

V každém případě vidíme, že proměnné jsou omezené a tedy i množina M je omezená.

nezávislost vazeb:

Potřebujeme ukázat, že pro $a = (x, y, z)$ platí:

$$\Phi_1(a) = 0 \quad \& \quad \Phi_2(a) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \Phi_1'(a) \quad \text{a} \quad \Phi_2'(a) \quad \text{jsou lineárně nezávislé.}$$

Máme

$\Phi_1'(a) = (1, 1, 1)$

$\Phi_2'(a) = (y + z, z + x, x + y)$.

Tyto vektory jsou lineárně závislé právě když $y + z = z + x = x + y$ neboli když $x = y = z$. Pokud by přitom mělo platit $\Phi_1(a) = 0$ a $\Phi_2(a) = 0$, pak dostáváme, že $3x = 5$ a $3x^2 = 8$, což nelze splnit. Pro body z M tak máme opravdu nezávislost vazeb.

Teď konečně můžeme (korektně!) použít větu o Lagrangeových multiplikátorech:

Pro bod $a = (x, y, z) \in M$ absolutního (a tedy i lokálního) extrému f na M teď existuji $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, že

$$(yz, zx, xy) = f'(a) = \lambda \cdot \Phi_1'(a) + \mu \cdot \Phi_2'(a) = \lambda(1, 1, 1) + \mu(y + z, z + x, x + y)$$

a

$$x + y + z = 5 \qquad \text{a} \qquad xy + yz + zx = 8.$$

Když teď od sebe např. odečteme první dvě rovnice

$$yz = \lambda + \mu(y + z)$$

$$zx = \lambda + \mu(z + x)$$

dostaneme $z(y - x) = \mu(y - x)$, což dává podmínku buď $x = y$ nebo $z = \mu$. Symetricky dostaneme další podmínku $y = z$ nebo $x = \mu$. Odsud snadno plyne, že vždy je buď $x = y$ nebo $y = z$ nebo $x = \mu = z$, tedy že dvě souřadnice jsou vždy stejné. Stačí tedy vyřešit jednu z verzí a další už dostaneme permutacemi souřadnic.

Např. z podmínky $x = y$ dostáváme dosazením do vazeb řešení $(x, y, z) = (2, 2, 1)$ nebo $(x, y, z) = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right)$. Hodnoty parametru λ ani μ už zjišťovat nemusíme, podezřelé body teď mohou být už jen tyto:

$$a = (2, 2, 1), (1, 2, 2), (2, 1, 2) \quad \text{kde} \quad f(a) = 4$$

a

$$a = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right), \left(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{4}{3}\right), \left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) \qquad \text{kde} \quad f(a) = \frac{112}{27}.$$

Protože funkce f je spojitá a množina M je omezená a uzavřená, nabývá f v prvních bodech minimum a v druhých maximum (protože $\frac{112}{27} > 4$).

(ii) Budeme postupovat podobně jako v (i). Položme

$$\Phi_1(x, y, z) = x + y + z$$

$$\Phi_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1.$$

$$M : \qquad \Phi_1(a) = 0 \;\; \& \;\; \Phi_2(a) = 0\ .$$

uzavřenost M: stejné zdůvodnění jako v (i).

omezenost M: Jedna z vazeb představuje sféru, takže i M je omezená.

nezávislost vazeb:

Potřebujeme ukázat, že pro $a = (x, y, z)$ platí:

$$\Phi_1(a) = 0 \quad \& \quad \Phi_2(a) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \Phi_1'(a) \ \text{ a } \ \Phi_2'(a) \ \text{ jsou lineárně nezávislé.}$$

Máme

$\Phi_1'(a) = (1, 1, 1)$

$\Phi_2'(a) = (2x, 2y, 2z)$.

Tyto vektory jsou lineárně závislé právě když $x = y = z$. Pokud by přitom mělo platit $\Phi_1(a) = 0$ a $\Phi_2(a) = 0$, pak dostáváme, že $3x = 0$ a $3x^2 = 1$, což nelze splnit. Pro body z M tak máme opravdu nezávislost vazeb.

Teď konečně můžeme korektně použít větu o Lagrangeových multiplikátorech:
Pro bod $a = (x, y, z) \in M$ absolutního (a tedy i lokálního) extrému f na M teď existuji $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, že

$$(yz, zx, xy) = f'(a) = \lambda \cdot \Phi_1'(a) + \mu \cdot \Phi_2'(a) = \lambda(1, 1, 1) + \mu(2x, 2y, 2z)$$

a

$$x + y + z = 0 \qquad \text{a} \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Když opět od sebe odečteme první dvě rovnice

$$yz = \lambda + 2\mu x$$

$$zx = \lambda + 2\mu y$$

dostaneme $z(y - x) = 2\mu(x - y)$, což dává podmínku buď $x = y$ nebo $z = 2\mu$. Symetricky dostaneme další podmínku $y = z$ nebo $x = 2\mu$. Odsud snadno plyne, že vždy je buď $x = y$ nebo $y = z$ nebo $x = 2\mu = z$, tedy že dvě souřadnice jsou vždy stejné. Stačí tedy vyřešit jednu z verzí a další už dostaneme permutacemi souřadnic.

Např. z podmínky $x = y$ dostáváme dosazením do vazeb řešení $(x, y, z) = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2)$. Hodnoty parametru λ ani μ už zjišťovat nemusíme, podezřelé body teď mohou být už jen tyto:

$$a = -\frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2), \quad -\frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1), \quad -\frac{1}{\sqrt{6}}(-2, 1, 1) \quad \text{kde} \quad f(a) = \frac{\sqrt{6}}{18}$$

a

$$a = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2), \quad \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1), \quad \frac{1}{\sqrt{6}}(-2, 1, 1) \quad \text{kde} \quad f(a) = -\frac{\sqrt{6}}{18}.$$

Protože funkce f je spojitá a množina M je omezená a uzavřená, nabývá f v prvních bodech maximum a v druhých minimum.

Fubiniho věta: Nechť

- $E \subseteq \mathbb{R}^2$ je oblast integrace (tj. množina, na které má vůbec smysl se o integrál nějaké funkce zajímat, např. určená grafy nějakých spojitých funkcí),
- $f : E \to \mathbb{R}$ je funkce spojitá na vnitřku E° oblasti E a
- dvojný integrál z absolutní hodnoty funkce f je konečný, tj. $\iint_E |f| \, dS < \infty$ (např. pokud funkce je omezená a oblast E je také omezená).

Pak existuje dvojný integrál $\iint_E f \, dS$ a platí

$$\iint_E f \, dS = \int_{\pi_2(E)} \left(\int_{\substack{\textit{(vodorovný) řez množinou } E \\ \textit{pomocí přímky } \mathbb{R} \times \{y\}}} f(x, y) \, dx \right) dy$$

$$\iint\limits_E f\, dS = \int\limits_{\pi_1(E)} \Bigg(\int\limits_{\substack{\textit{(svislý) řez množinou } E\\ \textit{pomocí přímky } \{x\}\times\mathbb{R}}} f(x,y)\, dy \Bigg)\, dx,$$

kde $\pi_1, \pi_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jsou projekce na jednotlivé osy, tedy $\pi_1(x,y) = x$ a $\pi_2(x,y) = y$.

Poznámka: Předpoklad konečnosti integrálu z absolutní hodnoty funkce je podstatný! Např. pro funkci

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

na $E = \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle \setminus \{(0,0)\}$ je

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}\, dy \right) dx = \int_0^1 \left[\frac{y}{x^2+y^2} \right]_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\, dx = \Big[\arctan(x)\Big]_{x=0}^{x=1} = \frac{\pi}{4}$$

zatímco

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}\, dx \right) dy = \int_0^1 \left[\frac{-x}{x^2+y^2} \right]_{x=0}^{x=1} dy = \int_0^1 \frac{-1}{y^2+1}\, dy = \Big[-\arctan(y)\Big]_{y=0}^{y=1} = -\frac{\pi}{4}$$

což mimo jiné ukazuje na to, že

$$\int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} \right| dx\, dy = \infty.$$

8.9 (dvojný integrál - Fubiniho věta)

Změňte pořadí integrace v integrálu

(a) $\int\limits_0^1 \int\limits_{\sqrt{y}}^1 f(x,y)\; dx\; dy,$

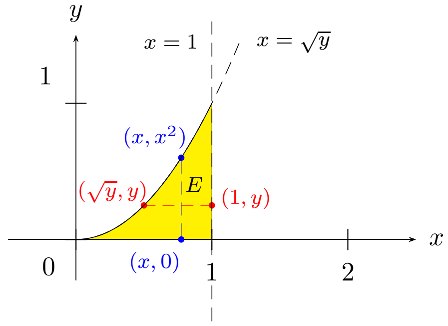
(b) $\int\limits_0^\pi \int\limits_0^{\sin x} f(x,y)\; dy\; dx.$

Řešení:

V těchto příkladech procvičujeme jen záměnu integrace, takže předpokládáme, že funkce f předpoklady Fubiniho věty splňuje.

(a) Základní oblast integrace je

$$E: \quad 0 \le y \le 1 \quad \& \quad \sqrt{y} \le x \le 1.$$



Po rozřezání oblasti E ve směru osy y máme

$$E: \quad 0 \leq x \leq 1 \quad \& \quad 0 \leq y \leq x^2.$$

Záměna integrace pak vyjde jako:

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 f(x,y)\ dx\ dy = \int_0^1 \int_0^{x^2} f(x,y)\ dy\ dx.$$

(b) Základní oblast integrace je

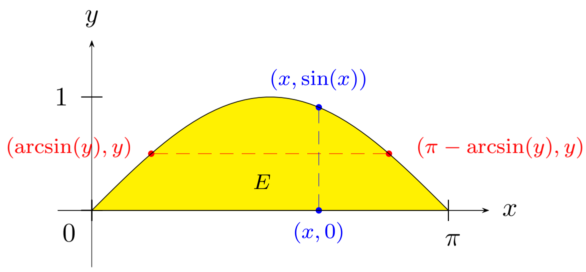
$$E: \quad 0 \leq x \leq \pi \quad \& \quad 0 \leq y \leq \sin x.$$

Máme

$$\pi_1(E) = \langle 0, \pi \rangle$$

a

$$(\{x\} \times \mathbb{R}) \cap E = \{x\} \times \langle 0, \sin x \rangle.$$



Po výměně pořadí integrace máme

$$\pi_2(E) = \langle 0, 1 \rangle$$

a pro řezy ve směru osy x vidíme, že pro $y \in \langle 0, 1 \rangle$ protíná přímka $\mathbb{R} \times \{y\}$ křivku $y = \sin(x)$ pro hodnoty $x_1 = \arcsin(y)$ (tj. $x_1 \in (0, \frac{\pi}{2})$) a pro $x_2 = \pi - x_1 = \pi - \arcsin(y)$.

Záměna integrace pak vyjde jako:

$$\int_0^\pi \int_0^{\sin x} f(x,y)\ dy\ dx = \int_0^1 \int_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} f(x,y)\ dx\ dy.$$