9. cvičení z Matematické analýzy 2

16. - 20. listopadu 2020

9.1 (vázané extrémy - vzdálenost)
Vypočtěte vzdálenost nejbližšího bodu hyperboly $M: \ x^2 + 5xy + y^2 = 9$ od počátku $(0,0)$.

Řešení:
Hyperbole je uzavřená množina, ale NENÍ omezená. Ke zjištění vzdálenosti od počátku $(0,0)$ si vezmeme funkci

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

protože se čtvercem vzdálenosti se lépe pracuje. Tato funkce "v nekonečnu roste do nekonečna" (tj. splňuje podmínky o nabytí globálního minima na M). Kandidáta na minimum můžeme opět najít metodou Lagr. multiplikátorů.

Máme tedy $f(x,y) = x^2 + y^2$ a vazbovou funkci $g(x,y) = x^2 + 5xy + y^2 - 9$. Pro bod $a = (x,y) \in M$ lokálního extrému f na M existuje $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$\big(2x, 2y\big) = f'(a) = \lambda \cdot g'(a) = \lambda\Big(2x + 5y, 5x + 2y\Big)$$

a

$$x^2 + 5xy + y^2 = 9.$$

Z prvního vztahu dostaneme

$$\begin{pmatrix} 2(\lambda - 1) & 5\lambda \\ 5\lambda & 2(\lambda - 1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Protože pro bod $(x,y) \in M$ je $(x,y) \neq (0,0)$, tak vektorová rovnice je řešitelná právě když determinant čtvercové matice je nula. Neboli

$$0 = (2(\lambda - 1))^2 - (5\lambda)^2 = (2\lambda - 2 - 5\lambda) \cdot (2\lambda - 2 + 5\lambda) = (-3\lambda - 2) \cdot (7\lambda - 2)$$

tedy $\lambda = -\frac{2}{3}$ nebo $\lambda = \frac{2}{7}$. Dosazením dostaneme $x = \pm y$ a z rovnice $x^2 + 5xy + y^2 = 9$ pak máme podezřelé body

$$a_0 = (x,y) = \pm\left(\tfrac{3}{\sqrt{7}}, \tfrac{3}{\sqrt{7}}\right)$$

s hodnotou $f(a_0) = \frac{18}{7}$. Podle věty o nabývání minima je tato hodnota skutečně minimální, takže vzdálenost bodu $(0,0)$ od hyperboly je $\sqrt{\frac{18}{7}}$.

Na úlohu lze také nahlížet geometricky: hledáme takový bod $(x,y) \in M$, aby jeho průvodič z počátku $(0,0)$, tj. vektor $\vec{h} = (x,y) - (0,0)$ byl kolmý na tečnou přímku k M v bodě (x,y). Tato tečná přímka má za normálový vektor $\operatorname{grad} g(x,y)$. Musíme tedy vyřešit systém podmínek $\vec{h} = \lambda \cdot \operatorname{grad} g(x,y)$ pro nějaké $\lambda \in \mathbb{R}$ a $(x,y) \in M$. A to už je totéž jako výše.

9.2 (vázané extrémy - aplikace)
Do úseče eliptického paraboloidu $z = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3}$ vymezené rovinou $z = 1$ vepište kvádr takový, že jeho stěny budou rovnoběžně s jednotlivými souřadnými rovinami a jenž bude mít maximální objem.

Řešení:
Vzhledem k symetriím stačí vyšetřit případ, kdy čtvrtina kvádru leží v množině $x, y, z \geq 0$. Tato část je jednoznačně určena svým vrcholem (x, y, z), který leží v množině:

$$M: \quad z = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} \;\; \& \;\; 0 \leq x, y \;\; \& \;\; 0 \leq z \leq 1$$

objem této části je pak dán hodnotou

$$f(x, y, z) = xy(1 - z) \ .$$

Hledáme tedy maximum f na M. Množina M je uzavřena (je to průnik uzavřených množin) a omezená (jak se snadno nahlédne). K použití věty o Langrangeových multiplikátorech potřebujeme ale množinu tvaru $\{a \in U \mid \Phi(a) = 0\}$, kde speciálně U je OTEVŘENÁ množina v $\mathbb{R}^3$. Množinu M proto rozdělíme na

$$M_1: \quad \underbrace{0 < x, y \;\&\; 0 < z < 1}_{=:U} \;\; \& \;\; \Phi(x, y, z) = 0$$

a

$$M_2: \quad (x = 0 \;\vee\; y = 0 \;\vee\; z = 0 \;\vee\; z = 1) \;\; \& \;\; \Phi(x, y, z) = 0$$

kde $\Phi(x, y, z) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} - z$ je vazbová funkce.

Pro body extrémů na M_1 můžeme teď použít Lagrangeovu podmínku (protože pro $a \in M_1$ je $\Phi'(a) \neq (0, 0, 0)$, jak bude vidět). Tedy budeme tu mít $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$\Big(y(1 - z),\ x(1 - z),\ -xy\Big) = f'(a) = \lambda \Phi'(a) = \lambda\Big(x,\ \tfrac{2}{3}y,\ -1\Big)$$

a

$$z = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} \ .$$

Protože na U jsou hodnoty x a y nenulové, můžeme udělat následující úpravy:

$$\begin{array}{rcl} y(1-z) &=& \lambda x \\ x(1-z) &=& \lambda \frac{2}{3} y \\ xy &=& \lambda \\ z &=& \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} \end{array} \quad \overset{\lambda = xy}{\Longrightarrow} \quad \begin{array}{c} y(1-z) = x^2 y \\ x(1-z) = \frac{2}{3} y^2 x \\ z = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} \end{array} \quad \overset{x \neq 0 \neq y}{\Longrightarrow} \quad \begin{array}{c} 1 - z = x^2 \\ 1 - z = \frac{2}{3} y^2 \\ z = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} \end{array} \quad \overset{\substack{x^2 = 1 - z \\ y^2/3 = (1-z)/2}}{\Longrightarrow}$$

$$\Longrightarrow \quad z = \frac{1 - z}{2} + \frac{1 - z}{2} \quad \Longrightarrow \quad z = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{c} x^2 = 1 - z = \frac{1}{2} \\ y^2 = \frac{3}{2}(1 - z) = \frac{3}{4} \end{array} \quad \overset{x, y > 0}{\Longrightarrow} \quad \begin{array}{c} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}$$

Jediný podezřelý bod na M_1 je tedy $a = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ s hodnotou $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}}{8}$.

Na množině M_2 je funkce f konstantně nulová, takže celou M_2 můžeme zařadit mezi podezřelé body.

Porovnáním funkčních hodnot (a tím, že f nabývá extrémů na M), pak ihned máme, že kvádr s maximálním objemem je určen vrcholem $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ (a jeho symetrickými protějšky na eliptickém paraboloidu).

9.3 (dvojný integrál - Fubiniho věta)

Změňte pořadí integrace integrálu

$$\int_0^1 \int_0^x f(x,y)\ dy\ dx + \int_1^2 \int_0^{2-x} f(x,y)\ dy\ dx\ .$$

Řešení:

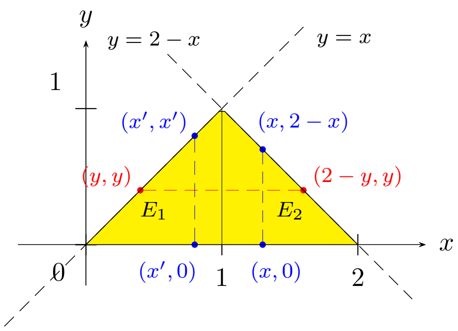
Procvičujeme jen záměnu integrace, takže předpokládáme, že funkce f předpoklady Fubiniho věty splňuje.

Základní oblasti integrace jsou

$$E_1 : \quad 0 \leq x \leq 1 \quad \& \quad 0 \leq y \leq x$$

$$E_2 : \quad 1 \leq x \leq 2 \quad \& \quad 0 \leq y \leq 2 - x.$$

Množiny E_1 a E_2 se překrývají pouze v úsečce $\{1\} \times \langle 0, 1\rangle$, která na hodnotu integrálu nemá vliv. Funkci f tak můžeme prostě integrovat na sjednocení obou oblastí $E = E_1 \cup E_2$.



Pozor! Toto sjednocení není samozřejmá věc! Pokud by se totiž oblasti překrývaly na nějaké "podstatnější" množině, bylo pak na tomto průniku potřeba integrovat funkci dvakrát (příspěvek z každé oblasti D_i). Přesněji, platí

$$\iint_{E_1} f\ dS \ + \ \iint_{E_2} f\ dS = \iint_{E_1 \setminus E_2} f\ dS \ + \ 2 \cdot \iint_{E_1 \cap E_2} f\ dS \ + \ \iint_{E_2 \setminus E_1} f\ dS \ \left(= \iint_{E_1 \cup E_2} f\ dS \ + \ \iint_{E_1 \cap E_2} f\ dS \right)$$

Takže $\pi_2(E) = \langle 0, 1\rangle$ a $(\mathbb{R} \times \{y\}) \cap E = \langle y, 2 - y\rangle \times \{y\}$. Záměna integrace pak vyjde jako:

$$\int_0^1 \int_0^x f(x,y)\ dy\ dx + \int_1^2 \int_0^{2-x} f(x,y)\ dy\ dx = \int_0^1 \int_y^{2-y} f(x,y)\ dx\ dy.$$

Obrácená Fubiniova věta (verze použitelná i pro neomezené funkce nebo množiny):
Nechť

- $E \subseteq \mathbb{R}^2$ je oblast integrace
- $f : E \to \mathbb{R}$ je *nezáporná* funkce spojitá na E°
- jeden z integrálů vzniklých postupnou integrací podle proměnných je konečný.

Pak i integrál v opačném pořadí integrace je konečný, oba se rovnají a funkce má dvojný integrál $\iint_E f\ dS$ (rovný této společné hodnotě).

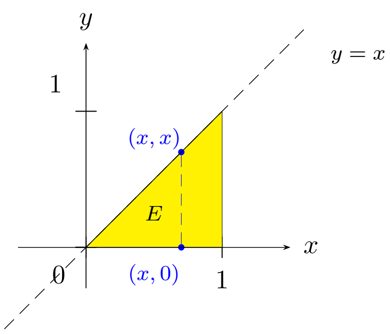
9.4 (dvojný integrál - Fubiniho věta)
Vypočítejte hodnotu integrálu:

(a)
$$\iint_E \frac{\sin x}{x}\, dxdy$$
kde E je trojúhelník s vrcholy $(0,0), (1,0), (1,1)$.

(b)
$$\iint_E e^{y^3} \sqrt{xy - y^2}\; dS,$$
kde oblast E je omezená přímkami $y = x$, $x = 10y$ a $y = 1$.

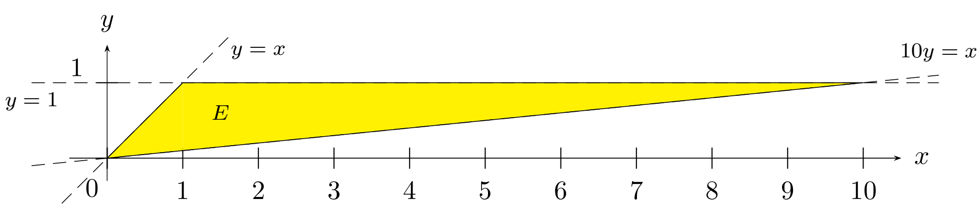
(c)
$$\iint_E e^{\frac{x}{y}}\; dS,$$
kde E je oblast v prvním kvadrantu omezena křivkami $x = y^2$, $x = 0$ a $y = 1$.

Řešení:
(a) Oblast integrace je
$$E: \quad 0 \le x \le 1 \quad \& \quad 0 \le y \le x\ .$$



Máme
$$\iint_E \frac{\sin x}{x}\, dxdy = \int_0^1 \int_0^x \frac{\sin x}{x}\; dy\; dx = \int_0^1 \sin x\; dx = 1 - \cos(1).$$

(b) Oblast E je trojúhelník s vrcholy $(0,0)$, $(1,1)$ a $(10,1)$ a pro výraz pod odmocninou tak máme $xy - y^2 = y(x-y) \ge 0$.



Na první pohled je jednodušší zkusit integrovat nejdříve podle x.

$$E: \quad 0 \le y \le 1 \quad \& \quad y \le x \le 10y$$

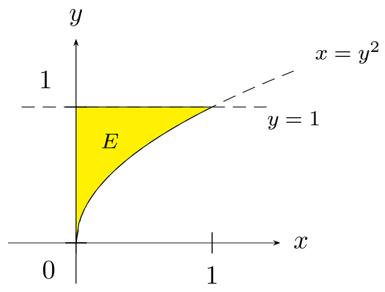
$$\iint\limits_E e^{y^3}\sqrt{xy-y^2}\; dS = \int\limits_0^1 \int\limits_y^{10y} e^{y^3}\sqrt{xy-y^2}\; dx\; dy = \int\limits_0^1 \left[e^{y^3}\frac{2}{3}\cdot\frac{(xy-y^2)^{3/2}}{y} \right]_{x=y}^{x=10y} dy =$$

$$= \int\limits_0^1 e^{y^3}\frac{2}{3}\cdot\frac{(9y^2)^{3/2}}{y}\; dy = 6\int\limits_0^1 3y^2 e^{y^3}\; dy = 6\left[e^{y^3}\right]_{y=0}^{y=1} = 6(e-1)\;.$$

(c) Oblast integrace

$$E: \quad 0 \le x \le y^2 \quad \& \quad 0 < y \le 1$$

je omezená, ale u funkce $f(x,y) = e^{\frac{x}{y}}$ zúžené na E to není jasné - problémový je bod $(0,0)$. Přesto ale můžeme použít Fubiniovu větu, protože funkce je nezáporná.



Máme tedy

$$\iint\limits_E e^{\frac{x}{y}}\; dS = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{y^2} e^{\frac{x}{y}}\; dx\; dy = \int\limits_0^1 \left[ye^{\frac{x}{y}}\right]_{x=0}^{x=y^2} dy = \int\limits_0^1 ye^y - y\; dy = \left[(y-1)e^y - \frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{2}.$$

Poznámka: Vyšetříme si ještě pro pořádek chování f na E v bodě $(0,0)$. Protože pro $(x,y) \in E$ máme $0 \le x \le y^2$ a $0 < y$, tak $0 \le \frac{x}{y} \le y$. Pro $(x,y) \in E$ tedy platí, že

$$1 \le e^{\frac{x}{y}} \le e^y \to 1 \quad \text{pro} \quad (x,y) \to (0,0)$$

a proto $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in E}} e^{\frac{x}{y}} = 1$. Funkce f je proto na E omezená a spojitá a integrál tedy existuje a je konečný.

9.5 (dvojný integrál - Fubiniho věta)
Načrtněte oblast integrace a vyčíslete integrál:

(a)

$$\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{1}{y^4+1}\, dy\, dx$$

(b)

$$\iint_E e^{\max\{x^2,y^2\}}\, dx\, dy\ ,$$

kde $E = \langle 0,1\rangle^2 \subseteq \mathbb{R}^2$.

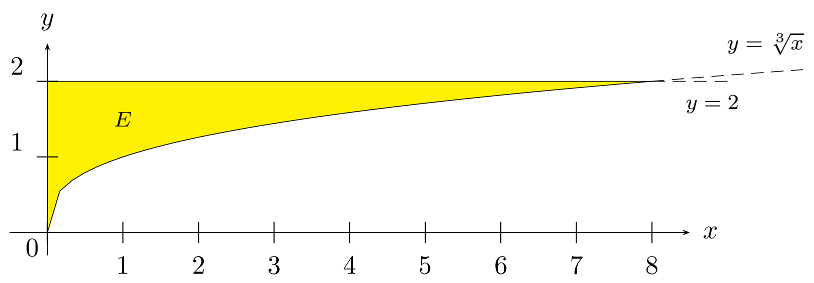
(c)

$$\iint_E e^{\frac{x}{y}}\, dS,$$

kde oblast E je omezená přímkami $y = x$, $x = 10y$ a $y = 1$.

Řešení:
(a) Opět bude výhodnější vyměnit pořadí integrace. Máme

$$E: \quad 0 \le x \le 8 \quad \& \quad \sqrt[3]{x} \le y \le 2\ .$$



Takže

$$E: \quad 0 \le y \le 2 \quad \& \quad 0 \le x \le y^3,$$

a dostáváme tak

$$\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{1}{y^4+1}\, dy\, dx = \int_0^2 \Big(\int_0^{y^3} \frac{1}{y^4+1}\, dx \Big)\, dy = \int_0^2 \frac{y^3}{y^4+1} dy =$$

$$= \Big[\frac{\ln(y^4+1)}{4} \Big]_{y=0}^{y=2} = \frac{\ln 17}{4}.$$

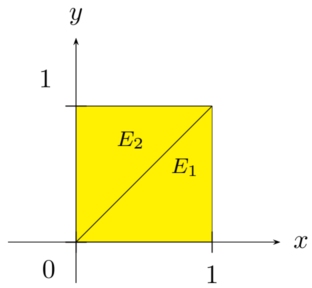
(b) Zjistíme si hodnoty funkce na množině E:

$$e^{\max\{x^2,y^2\}} = \begin{cases} e^{x^2} & \text{pro } 0 \le y \le x \le 1, \\ e^{y^2} & \text{pro } 0 \le x \le y \le 1. \end{cases}$$

Množinu E si tedy rozdělíme na příslušné dvě části (trojúhelníky)

$$E_1: \quad 0 \le y \le x \le 1$$

$$E_2: \quad 0 \le x \le y \le 1$$



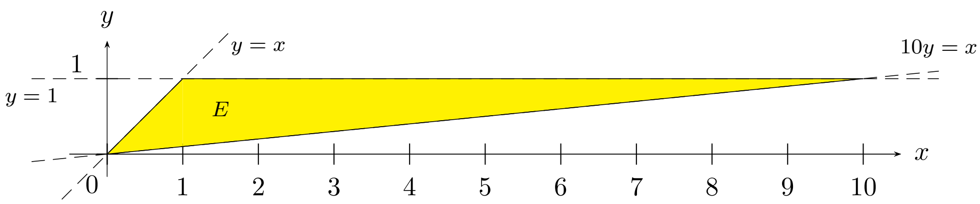
Pak máme

$$\iint_E e^{\max\{x^2,y^2\}}\ dx\ dy = \iint_{E_1} e^{x^2}\ dx\ dy + \iint_{E_2} e^{y^2}\ dx\ dy =$$

$$= \int_0^1 \int_0^x e^{x^2}\ dy\ dx + \int_0^1 \int_0^y e^{y^2}\ dx\ dy = \int_0^1 x e^{x^2}\ dx + \int_0^1 y e^{y^2}\ dy =$$

$$= \left[\frac{e^{x^2}}{2}\right]_{x=0}^{x=1} + \left[\frac{e^{y^2}}{2}\right]_{y=0}^{y=1} = e - 1\ .$$

(c) Oblast E je trojúhelník s vrcholy $(0,0)$, $(1,1)$ a $(10,1)$.



Na první pohled je jednodušší zkusit integrovat nejdříve podle x.

$$E: \quad 0 \le y \le 1 \quad \& \quad y \le x \le 10y$$

$$\iint_E e^{\frac{x}{y}}\ dS = \int_0^1 \int_y^{10y} e^{\frac{x}{y}}\ dx\ dy = \int_0^1 \left[y e^{\frac{x}{y}}\right]_{x=y}^{x=10y} dy = \int_0^1 y\left(e^{10} - e\right)\ dy = \frac{1}{2}\left(e^{10} - e\right)\ .$$

Poznámka: Vyšetříme si ještě pro pořádek chování f na E v bodě $(0,0)$. Protože pro $(x,y) \in E$ máme $y \le x \le 10y$ a $0 < y$, tak $1 \le \frac{x}{y} \le 10$ a tedy $e^1 \le e^{\frac{x}{y}} \le e^{10}$. Funkce f je proto na $E \setminus \{(0,0)\}$ omezená, kladná a spojitá a integrál na celé E tedy existuje a je konečný.

Poznámka: Pokud je funkce f nebo oblast E integrace *neomezená*, je integrál $\iint_E f\ dS$ určen (jako konečná) hodnota, pouze pokud je tzv. *absolutně konvergentní*, tj. pokud

$$\iint_E |f|\, dS := \lim_{n\to\infty} \iint_{E_n} |f|\, dS < \infty$$

pro nějakou posloupnost omezených oblastí $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \cdots \subseteq E_n \subseteq E_{n+1} \subseteq \cdots$ takovou, že f na E_n je omezená a $E = \cup_n E_n$. V tom případě pro integrál platí Fubiniho věta (v analogické podobě jako pro omezenou funkci na omezené množině).

9.6 (dvojný integrál - Fubiniho věta)

Načrtněte oblast integrace a vyčíslete integrál

$$\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \frac{xe^{2y}}{4-y}\, dy\, dx$$

Řešení:

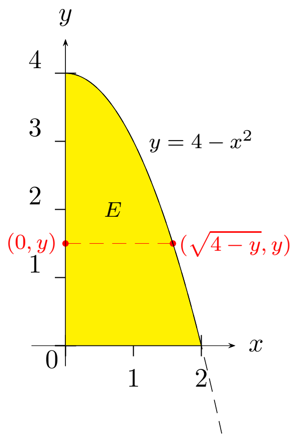
Pro výpočet integrálu bude výhodnější vyměnit pořadí integrace. Máme

$$E: \quad 0 \le x \le 2 \quad \& \quad 0 \le y \le 4 - x^2 \quad \& \quad y \ne 4.$$

Funkce $f(x,y) = \frac{xe^{2y}}{4-y}$ na množině E sice není omezená (v okolí bodu $(0,4)$), ale je nezáporná, takže Fubiniovu větu použít můžeme.

Po záměně řezů dostaneme vztahy

$$E: \quad 0 \le y < 4 \quad \& \quad 0 \le x \le \sqrt{4-y}$$



takže dostáváme

$$\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \frac{xe^{2y}}{4-y}\, dy\, dx = \int_0^4 \Big(\int_0^{\sqrt{4-y}} \frac{xe^{2y}}{4-y}\, dx \Big)\, dy = \int_0^4 \Big[\frac{x^2 e^{2y}}{2(4-y)} \Big]_{x=0}^{x=\sqrt{4-y}} dy =$$

$$= \int_0^4 \frac{e^{2y}}{2} dy = \Big[\frac{e^{2y}}{4} \Big]_{y=0}^{y=4} = \frac{e^8 - 1}{4}.$$

Proč funkce není omezená: Množina E je ohraničená parabolou $y = 4 - x^2$. Klidně si ale můžeme dovolit vzít i jinou parabolu, která už bude ležet ve vnitřku E, tedy vezmeme vhodné $\lambda > 0$ tak, aby $(x, 4 - \lambda x^2) \in D$. Pak budeme mít

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ y=4-\lambda x^2,\ x>0}} f(x,y) = \lim_{x\to 0+} \frac{xe^{2(4-\lambda x^2)}}{\lambda x^2} = +\infty.$$

Platí: Pro všechna $a, b \in \mathbb{R}$ je

$$\int_a^b \operatorname{sgn}(x) \cdot x^n \mathrm{d}x = \left[\operatorname{sgn}(x) \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_a^b$$

9.7 Určete těžiště

(a) trojúhelníku s vrcholy $(0,0)$, $(1,1)$, $(4,0)$, jehož plošná hustota je $\varrho(x,y) = x$.

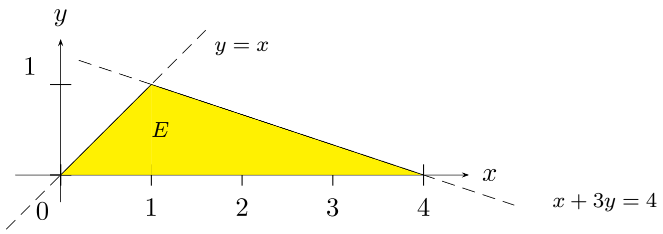
(b) útvaru omezeného křivkami $x = y^2$ a $y = x - 2$, jehož plošná hustota je $\varrho(x,y) = |y| = \operatorname{sgn}(y) \cdot y$.

(c) útvaru omezeného křivkami $xy = 1$ a $x + y = \frac{5}{2}$, jehož plošná hustota je $\varrho(x,y) = 1$.

Řešení:
Oblast E je ve všech případech konvexní, takže těžiště bude ležet v E. Je dobré si vždy u výsledků tuto vlastnost v případě konvexních množin zkontrolovat.

(a) Oblast integrace je

$$E: \quad 0 \leq y \leq 1, \qquad y \leq x \leq 4 - 3y.$$



Jednotlivé integrály tedy jsou
hmotnost:

$$m = \iint_E \varrho \; dS = \int_0^1 \Big(\int_y^{4-3y} x \; dx \Big) \; dy = \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=y}^{x=4-3y} dy =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 (3y-4)^2 - y^2 \; dy = \frac{1}{2}\left[\frac{(3y-4)^3}{9} - \frac{y^3}{3}\right]_0^1 = \frac{10}{3}$$

x-ová souřadnice těžiště:

$$T_1 = \frac{1}{m} \iint_E x\varrho(x,y) \; dS = \frac{3}{10} \int_0^1 \Big(\int_y^{4-3y} x^2 \; dx \Big) \; dy = \frac{1}{10} \int_0^1 \left[x^3\right]_{x=y}^{x=4-3y} dy =$$

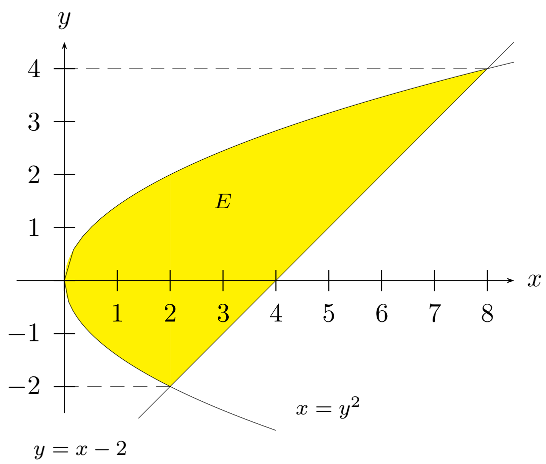
$$= \frac{1}{10} \int_0^1 (4-3y)^3 - y^3 \; dy = \left[-\frac{(4-3y)^4}{120} - \frac{y^4}{40}\right]_0^1 = \frac{21}{10}$$

y-ová souřadnice těžiště:

$$T_2 = \frac{1}{m} \iint_E y\varrho(x,y) \; dS = \frac{3}{10} \int_0^1 \Big(\int_y^{4-3y} xy \; dx \Big) \; dy = \frac{3}{20} \int_0^1 \left[x^2 y\right]_{x=y}^{x=4-3y} dy =$$

$$= \frac{3}{20}\int_0^1 y(4-3y)^2 - y^3 \; dy = \frac{12}{5}\int_0^1 y^3 - 3y^2 + 2y \; dy = \frac{12}{5}\left[\frac{y^4}{4} - y^3 + y^2\right]_0^1 = \frac{3}{5}.$$

(b) Oblast je vnitřní část paraboly $y^2 = x$ (obrácené v směru osy x), která je oříznutá šikmo přímkou $y = x - 2$.



Zintegrujeme postupně nejdříve podle x (tj. rozřežeme E vodorovně) a pak podle y. K tomu potřebujeme zjistit rozsah proměnné y (tj. průmět oblasti E na osu y), neboli průniky hyperboly s přímkou:

$$\begin{gathered} y^2 = x \quad \wedge \quad y = x - 2 \\ y^2 = y + 2 \\ 0 = y^2 - y - 2 = (y+1)(y-2) \end{gathered}$$

Množinu E tedy zapíšeme jako

$$E: \quad -1 \le y \le 2 \;\; \& \;\; y^2 \le x \le y + 2$$

Takže máme

hmotnost:

$$m = \iint_E \varrho \; dS = \int_{-1}^{2}\int_{y^2}^{y+2} \operatorname{sgn}(y)\cdot y \; \mathrm{d}x \; \mathrm{d}y = \int_{-1}^{2} \operatorname{sgn}(y)\cdot\left(y^2 + 2y - y^3\right) \; \mathrm{d}y =$$

$$= \left[\operatorname{sgn}(y)\cdot\left(\frac{y^3}{3} + y^2 - \frac{y^4}{4}\right)\right]_{-1}^{2} = \frac{8}{3} + 4 - 4 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{4} = \frac{37}{12}\,.$$

x-ová souřadnice těžiště:

$$T_1 = \frac{1}{m}\iint_E x\varrho(x,y) \; dS = \frac{12}{37}\int_{-1}^{2}\int_{y^2}^{y+2} \operatorname{sgn}(y)\cdot xy \; \mathrm{d}x \; \mathrm{d}y = \frac{6}{37}\int_{-1}^{2} \operatorname{sgn}(y)\cdot y\left[x^2\right]_{x=y^2}^{x=y+2} \; dy =$$

$$= \frac{6}{37}\int_{-1}^{2} \operatorname{sgn}(y)\cdot\left(4y + 4y^2 + y^3 - y^5\right) \; dy = \frac{6}{37}\left[\operatorname{sgn}(y)\cdot\left(2y^2 + \frac{4y^3}{3} + \frac{y^4}{4} - \frac{y^6}{6}\right)\right]_{-1}^{2} =$$

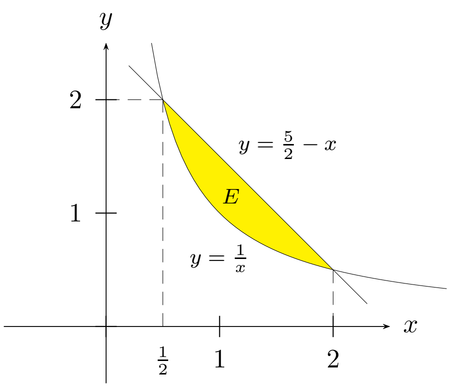
$$= \frac{6}{37}\Big(8 + \frac{32}{3} + 4 - \frac{32}{3} + 2 - \frac{4}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6}\Big) = \frac{153}{74} \doteq 2.07$$

y-ová souřadnice těžiště:

$$T_2 = \frac{1}{m}\iint\limits_E y\varrho(x,y)\ dS = \frac{12}{37}\int\limits_{-1}^{2}\int\limits_{y^2}^{y+2} \operatorname{sgn}(y)\cdot y^2\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \frac{12}{37}\int\limits_{-1}^{2} \operatorname{sgn}(y)\cdot\big(y^3 + 2y^2 - y^4\big)\ \mathrm{d}y =$$

$$= \frac{12}{37}\Big[\operatorname{sgn}(y)\cdot\Big(\frac{y^4}{4} + \frac{2y^3}{3} - \frac{y^5}{5}\Big)\Big]_{-1}^{2} = \frac{12}{37}\Big(4 + \frac{16}{3} - \frac{32}{5} + \frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\Big) = \frac{163}{370} \doteq 0.44\ .$$

(c) Oblast E je vnitřní část hyperboly $xy = 1$ která je oříznutá přímkou $x + y = \frac{5}{2}$.



Potřebujeme zjistit rozsah proměnných neboli průniky hyperboly s přímkou:

$$\Big(xy = 1 \quad\wedge\quad x + y = \frac{5}{2}\Big) \quad\Leftrightarrow\quad \Big((x,y) = \big(\tfrac{1}{2}, 2\big) \quad\vee\quad (x,y) = \big(2, \tfrac{1}{2}\big)\Big)$$

Množinu E tedy zapíšeme jako

$$E:\ \ \tfrac{1}{2} \le x \le 2\ \ \&\ \ \tfrac{1}{x} \le y \le \tfrac{5}{2} - x$$

Vzhledem k symetrii E budeme mít $T_1 = T_2$.
hmotnost:

$$m = \iint\limits_E \varrho\ dS = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\Big(\int\limits_{\frac{1}{x}}^{\frac{5}{2}-x} 1\ dy\Big)\ dx = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{5}{2} - x - \frac{1}{x}\ dx = \frac{15}{4} - \Big[\frac{x^2}{2} + \ln x\Big]_{\frac{1}{2}}^{2} = \frac{15}{8} - 2\ln 2$$

$$T_1 = T_2 = \frac{1}{m}\iint\limits_E x\varrho(x,y)\ dS = \frac{1}{m}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\Big(\int\limits_{\frac{1}{x}}^{\frac{5}{2}-x} x\ dy\Big)\ dx = \frac{1}{m}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{5}{2}x - x^2 - 1\ dx =$$

$$= \frac{1}{m}\Big[\frac{5x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + x\Big]_{\frac{1}{2}}^{2} = \frac{1}{m}\frac{9}{16} = \frac{9}{30 - 32\ln 2} \doteq 1.151\ .$$

Věta o substituci: Nechť $U \subseteq \mathbb{R}^2$ je oblast integrace a $\Phi : U \to \mathbb{R}^2$ je zobrazení (nazývané *parametrizace*). Nechť dále platí, že

- Φ je spojité na U,
- Φ je prosté a spojitě diferencovatelné na U° (tj. na vnitřku U)
- $\det \Phi' \neq 0$ všude na U° a
- množina ∂U se skládá ze spojitě diferencovatelných křivek, případně bodů (tj. její příspěvek k hodnotě jakéhokoliv integrálu je nulový)

Nechť f je integrabilní funkce na $\Phi(U)$. Pak

$$\iint\limits_{\Phi(U)} f \; dS = \iint\limits_{U} (f \circ \Phi) \cdot |\det \Phi'| \; d\widetilde{S}.$$

kde pro odlišení značíme integraci podle jiných proměnných jako $d\widetilde{S}$.

9.8 (vyjádření oblasti v polárních souřadnicích)
Vyjádřete integrál

$$\iint\limits_{E} f(x,y) \; dx \; dy$$

v polárních souřadnicích v pořadí $d\varrho \; d\varphi$ pro oblasti

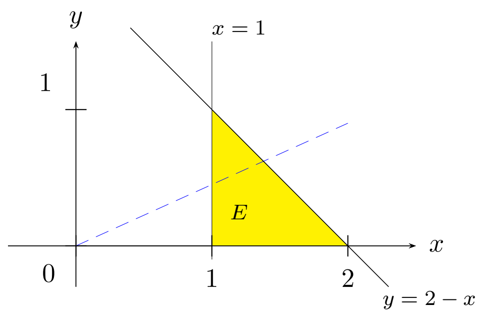
(a) E, která je plochou trojúhelníka s vrcholy $(1,0)$, $(2,0)$ a $(1,1)$.

(b) $E: \quad 0 \leq x \leq 1 \quad \& \quad x^2 \leq y \leq 1$.

Řešení:
Pro parametrizaci oblasti E v polárních souřadnicích v pořadí $d\varrho \; d\varphi$ určíme nejdříve rozsah proměnné φ. Pro pevně zvolené φ pak určíme rozsah proměnné ϱ.

(a) Oblast E je trojúhelník ohraničený přímkami $x = 1$, $y = 0$ a $x + y = 2$ a dá se popsat také jako

$$E: \quad 1 \leq x \leq 2 \quad \& \quad 0 \leq y \leq 2 - x$$



Pro parametrizaci oblasti E v polárních souřadnicích v pořadí $d\varrho \; d\varphi$ určíme nejdříve rozsah proměnné φ, což je $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$. Pro pevně zvolené φ teď určíme rozsah proměnné ϱ. Ten je ze zdola určený přímkou $x = 1$ a shora přímkou $x + y = 2$. Po dosazení $x = \varrho \cos\varphi$ a $y = \varrho \sin\varphi$ do těchto rovnic pak máme omezení proměnné ϱ shora pomocí

$$\varrho\cos\varphi + \varrho\sin\varphi = x + y = 2 \quad \Rightarrow \quad \varrho = \frac{2}{\cos\varphi + \sin\varrho}$$

a zdola pomocí

$$\varrho\cos\varphi = x = 1 \quad\Rightarrow\quad \varrho = \frac{1}{\cos\varphi}$$

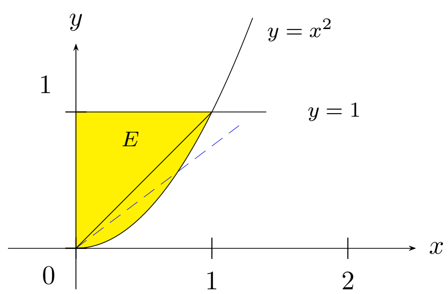
Parametrizace U oblasti E v polárních souřadnicích je tak dána jako

$$U: \qquad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4} \qquad \& \qquad \frac{1}{\cos\varphi} \le \varrho \le \frac{2}{\cos\varphi + \sin\varphi}$$

takže přepis integrálu je následující

$$\iint\limits_E f(x,y)\ dx\ dy = \int\limits_0^{\pi/4} \int\limits_{\frac{1}{\cos\varphi}}^{\frac{2}{\cos\varphi+\sin\varphi}} \varrho\cdot f(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi)\ d\varrho\ d\varphi\ .$$

(b) Postupujeme podobně jako v (a). Oblast E je potřeba rozdělit na dvě části podle předpisu hraničních křivek - jedna je $y = x^2$ a druhá $y = 1$.



Po dosazení polárních souřadnic pak máme v jedné části omezení proměnné ϱ shora pomocí

$$\varrho\sin\varphi = y = x^2 = \varrho^2\cos^2\varphi \qquad\Rightarrow\qquad \varrho = \frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$$

a v druhé

$$\varrho\sin\varphi = y = 1 \quad\Rightarrow\quad \varrho = \frac{1}{\sin\varphi}$$

Parametrizace U oblasti E v polárních souřadnicích je tak dána jako

$$U: \qquad \left(0 \le \varphi \le \tfrac{\pi}{4} \quad \& \quad 0 \le \varrho \le \tfrac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}\right) \vee$$
$$\vee \left(\tfrac{\pi}{4} \le \varphi \le \tfrac{\pi}{2} \quad \& \quad 0 \le \varrho \le \tfrac{1}{\sin\varphi}\right)$$

takže přepis integrálu je následující

$$\iint\limits_E f(x,y)\ dx\ dy = \int\limits_0^{\pi/4} \int\limits_0^{\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}} \varrho\cdot f(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi)\ d\varrho\ d\varphi + \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \int\limits_0^{\frac{1}{\sin\varphi}} \varrho\cdot f(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi)\ d\varrho\ d\varphi\ .$$