1. cvičení z Matematické analýzy 2

15. února 2021

1.1 Ukažte, že objem rovnoběžnostěnu určeného vektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ je

$$|\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})| = |\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})| \ .$$

Řešení:
Připomeňme nejdříve, že obsah rovnoběžníku (v rovině) se počítá jako "délka podstavy krát výška". Jestliže je rovnoběžník určený vektory $\vec{v}$ a $\vec{w}$, které svírají (konvexní) úhel α, pak je

$$\textit{obsah rovnoběžníka} = \|\vec{w}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot |\sin \alpha| = \|\vec{v} \times \vec{w}\|.$$

Připomeňme si, co je to vektorový součin vektorů $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ a $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$:

$$\vec{v} \times \vec{w} := \Big(v_2 w_3 - v_3 w_2, \quad -(v_1 w_3 - v_3 w_1), \quad v_1 w_2 - v_2 w_1\Big) = \det \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \ .$$

Platnost vztahu $\|\vec{v} \times \vec{w}\| = \|\vec{w}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot |\sin \alpha|$ pak plyne z následujícího: Snadno se dá ověřit rovnost

$$\|\vec{v} \times \vec{w}\|^2 + (\vec{v} \cdot \vec{w})^2 = \|\vec{v}\|^2 \cdot \|\vec{w}\|^2 \ .$$

Pro $\vec{v} \neq \vec{0} \neq \vec{w}$ pak platí $\cos \alpha = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|}$, takže skutečně je $\frac{\|\vec{v} \times \vec{w}\|}{\|\vec{w}\| \cdot \|\vec{v}\|} = \sqrt{1 - \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|}\right)^2} = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = |\sin \alpha|$.

Objem rovnoběžnostěnu je pak "obsah podstavy krát výška" (což lze nahlédnout buď vhodným rozřezáním a znovusestavením nebo přiblížením pomocí tenkých vodorovných řezů). Z předchozího máme

- *obsah podstavy* $= \|\vec{v} \times \vec{w}\|$
- *výška* $= |\vec{u} \cdot \vec{n}|$, kde $\vec{n}$ je jednotkový vektor kolmý k podstavě (např. $\vec{n} = \frac{\vec{v} \times \vec{w}}{\|\vec{v} \times \vec{w}\|}$).

Takže

$$\textit{objem rovnoběžnostěnu} = \|\vec{v} \times \vec{w}\| \cdot |\vec{u} \cdot \vec{n}| = \|\vec{v} \times \vec{w}\| \cdot \left|\vec{u} \cdot \frac{\vec{v} \times \vec{w}}{\|\vec{v} \times \vec{w}\|}\right| = |\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})| = |\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})| \ .$$

1.2 Ukažte, že vzdálenost $\rho(A, \sigma)$ bodu $A = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ od roviny $\sigma : \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$ v $\mathbb{R}^3$ je

$$\rho(A, \sigma) = \frac{|\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0 + \delta|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}.$$

Řešení:
Normálový vektor roviny je $\vec{n} = (\alpha, \beta, \gamma)$. Zvolme si nějaký bod $B \in \mathbb{R}^3$ v rovině σ. Vzdálenost bodu $A = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ od roviny σ je dána jako velikost kolmého průmětu vektoru $A - B$ do směru normálového

vektoru n, tedy pomocí vztahu

$$\left|(A-B)\cdot\frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}\right|.$$

Protože bod B je v rovině σ, platí $\vec{n}\cdot(B-O)+\delta=0$, kde $O=(0,0,0)$ je počátek soustavy souřadnic. Můžeme tak psát

$$\left|(A-B)\cdot\frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}\right| = \frac{|(A-O)\cdot\vec{n}-(B-O)\cdot\vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|(A-O)\cdot\vec{n}+\delta|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|\alpha x_0+\beta y_0+\gamma z_0+\delta|}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}\ .$$

Definice: Pro funkci f z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$ definujeme vrstevnici na hladině $c\in\mathbb{R}$ jako množinu

$$\{(x_1,\dots,x_n)\in D(f)\mid f(x_1,\dots,x_n)=c\}\ .$$

Zde $D(f)$ je definiční obor funkce f.

(Zdůrazněme, že vrstevnice obvykle bývají objekty s dimenzí $n-1$. Ale není to vždy pravidlem!)

Poznámka: Nechť g je nějaká funkce z $\langle 0,+\infty)$ do $\mathbb{R}$. Graf funkce tvaru $f(x,y)=g(\sqrt{x^2+y^2})$ je rotačně symetrický podle osy z, a vznikne rotací grafu funkce g kolem osy z. Vrstevnice funkce f jsou složeny z kružnic. (Nemusí to ale být vždy jen prosté kružnice, nýbrž také např. mezikruží).

1.3 Pro následující funkce f vždy načrtněte graf a popište vrstevnice:

(a) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ (kužel)

(b) $f(x,y)=x^2+2y^2$ (eliptický paraboloid),

(c) $f(x,y)=\sqrt{4+x^2+y^2}$ (jedna z částí dvoudílného rotačního hyperboloidu),

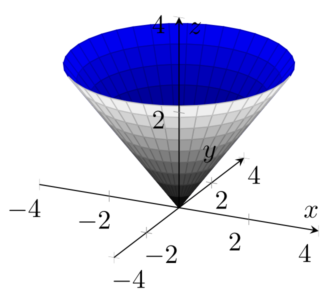
(d) $f(x,y)=\sqrt{4+x^2-y^2}$ (horní polovina jednodílného rotačního hyperboloidu),

(e) $f(x,y)=xy$ (hyperbolický paraboloid),

(f) $f(x,y)=x^2-y^2$ (hyperbolický paraboloid).

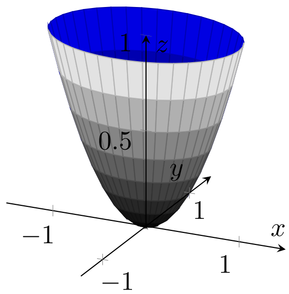
Řešení:
Označme si $r=\sqrt{x^2+y^2}$. Hodnota r představuje vzdálenost bodu (x,y,z) od 3. osy (tj. osy z).

(a) Graf funkce f vznikne rotací grafu funkce $g(r)=r$, pro $r\geq 0$. Jde tedy o kužel a vrstevnice jsou soustředné kružnice:

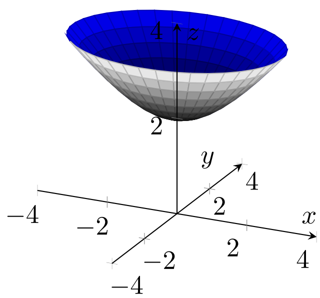


(b) Uvažujme nejdříve funkci $h(x,y)=x^2+y^2=(\sqrt{x^2+y^2})^2$. Její graf (tzv. rotační paraboloid) vznikne rotací grafu funkce $g(r)=r^2$, pro $r\geq 0$ (tj. rotací paraboly). Graf funkce $f(x,y)=x^2+2y^2$

se od něj bude lišit zúžením ve směru y. Průřezy (tj. vrstevnice) grafu f tak budou soustředné elipsy a celý graf se pak označuje jako eliptický paraboloid.

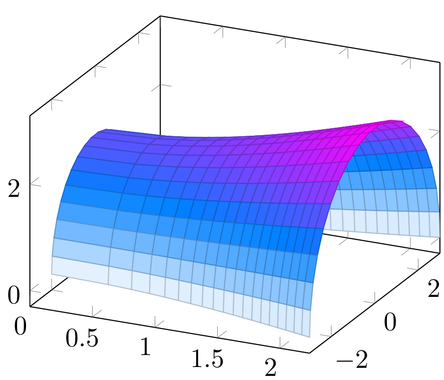


(c) Graf funkce f vznikne rotací grafu funkce $g(r) = \sqrt{4+r^2}$, pro $r \geq 0$. Abychom zjistili, o co jde, přepíšeme si $z = \sqrt{4+r^2}$, $r \geq 0$ ekvivalentně jako $z^2 - r^2 = 4$, $z \geq 0$, $r \geq 0$. Graf funkce g je tedy část hyperboly, jejíž hlavní osou je osa z. Její rotací (kolem osy z) vznikne část (jeden díl) dvoudílného rotačního hyperboloidu. Vrstevnice jsou soustředné kružnice a celý útvar zdálky připomíná kužel (který je "asymptotou" celého grafu).



(d) Definiční obor funkce je $D(f): \ y^2 - x^2 \leq 4$ (což je oblast mezi oběma větvemi dané hyperboly). Určitý typ rotační symetrie grafu f se dá najít i zde. Ze vztahu $z = \sqrt{4+x^2-y^2}$ vyplývá, že platí $(z^2+y^2) - x^2 = 4$ a $z \geq 0$. Označme si tentokrát $r' := \sqrt{z^2+y^2}$. Podobně jako výše dostaneme, že množina $(z^2+y^2) - x^2 = 4$ vznikne rotací hyperboly $(r')^2 - x^2 = 4$ kolem osy x. Tato plocha se nazývá rotační jednodílný hyperboloid.

Podmínka $z \geq 0$ nám pak z ní uřízne její horní polovinu (zde se slovo "horní" vztahuje ke směru osy z). Vrstevnice hledaného grafu funkce f budou hyperboly a jejich asymptoty.



(e)+(f) Zde se hodí všimnout si, že grafy funkcí v (e) a (f) jsou navzájem otočené o $\frac{\pi}{4}$ (a současně přenásobené hodnotou $\frac{1}{2}$). To zjistíme, když si zavedeme nové proměnné $x = \frac{\sqrt{2}}{2}(a-b)$ a $y = \frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)$

neboli použijeme ortogonální transformaci

$$\Phi : \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{4}) & -\sin(\frac{\pi}{4}) \\ \cos(\frac{\pi}{4}) & \sin(\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Pak pro $f(x,y) = xy$ je $(f \circ \Phi)(a,b) = \frac{1}{2}(a-b)(a+b) = \frac{1}{2}(a^2 - b^2)$. Stačí si tedy rozmyslet graf jen pro jeden z případů. Vrstevnice jsou opět zřejmě (soustředné) hyperboly a jejich asymptoty. A výsledný graf se nazývá hyperbolický paraboloid (nebo také sedlová plocha) a je to příklad plochy s tzv. zápornou křivostí (stejně jako předchozí jednodílný hyperboloid).