10. cvičení z Matematické analýzy 2

19. dubna 2021

10.1 (trojný integrál - Fubiniho věta)
Načrtněte oblast integrace:

$$\int_0^1 \int_x^{2x} \int_0^{x+y} dz\, dy\, dx$$

Řešení:
Oblast integrace je

$$E: \quad 0 \le x \le 1 \quad \& \quad x \le y \le 2x \quad \& \quad 0 \le z \le x + y\ .$$

Projekce $\pi_{1,2}(E)$ do roviny xy je dána jako

$$\pi_{1,2}(E): \quad 0 \le x \le 1 \quad \& \quad x \le y \le 2x$$

což je trojúhelník s vrcholy $(0,0)$, $(1,1)$ a $(1,2)$. Oblast E je pak vše, co je nad trojúhelníkem až po rovinu $z = x + y$. Z polohy této roviny pak plyne, že E je pětistěn s vrcholy $(0,0,0)$, $(1,1,0)$, $(1,2,0)$, $(1,1,2)$ a $(1,2,3)$. Integrál vyjadřuje jeho objem.

Věta o substituci (trojný integrál): Nechť $U \subseteq \mathbb{R}^3$ je oblast integrace a $\Phi : U \to \mathbb{R}^3$ je zobrazení (nazývané *parametrizace*). Nechť dále platí, že

- Φ je spojité na U,
- Φ je prosté a spojitě diferencovatelné na U° (tj. na vnitřku U)
- $\det \Phi' \neq 0$ všude na U° a
- množina ∂U se skládá ze spojitě diferencovatelných ploch, křivek, případně bodů (tj. její příspěvek k hodnotě jakéhokoliv trojného integrálu je nulový)

Nechť f je integrabilní funkce na $\Phi(U)$. Pak

$$\iiint_{\Phi(U)} f\ dV = \iiint_U (f \circ \Phi) \cdot |\det \Phi'|\ d\widetilde{V}.$$

kde pro odlišení značíme integraci podle jiných proměnných jako $d\widetilde{V}$.

Cylindrické souřadnice mají předpis:

$$\Phi: \begin{array}{rcl} x &=& r\cos\varphi \\ y &=& r\sin\varphi \\ z &=& h \end{array}$$

kde $(r, \varphi, h) \in \langle 0, +\infty) \times \langle 0, 2\pi\rangle \times \mathbb{R}$. Dále je

$$\Phi' = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \det \Phi' = r\ .$$

Moment setrvačnosti: Moment setrvačnosti J tělesa $E \subseteq \mathbb{R}^3$ s hustotou $\varrho(x,y,z)$ vzhledem k ose otáčení p je definován jako

$$J = \iiint_E v^2(x,y,z) \cdot \varrho(x,y,z)\ dV$$

kde funkce $v(x,y,z)$ je vzdálenost bodu (x,y,z) od osy p. Tělesa s velkým momentem setrvačnosti jsou např. setrvačníky, které je těžké roztočit a pak i zastavit.

10.2 (cylindrické souřadnice)

Zapište integrály pomocí cylindrických souřadnic a pak je spočítejte:

(a)

$$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2}(x^2+y^2)\ dz\ dy\ dx.$$

(b)

$$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{x^2+y^2}^{2-x^2-y^2}(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\ dz\ dy\ dx\ .$$

Řešení:

(a) Oblast integrace je

$$E:\quad |x|\le 2\quad \&\quad |y|\le\sqrt{4-x^2}\quad \&\quad \sqrt{x^2+y^2}\le z\le 2$$

neboli

$$E:\quad x^2\le 4\quad \&\quad x^2+y^2\le 4\quad \&\quad \sqrt{x^2+y^2}\le z\le 2$$

a tedy

$$E:\quad \sqrt{x^2+y^2}\le z\le 2,$$

což je kužel s výškou 2 a poloměrem podstavy také 2, který stojí na svém vrcholu v počátku. Jako parametrizaci E si vezmeme

$$U:\quad 0\le r\le h\le 2\quad \&\quad 0\le\varphi\le 2\pi\ .$$

Můžeme tedy psát

$$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2}(x^2+y^2)\ dz\ dy\ dx=\iiint\limits_{E=\Phi(U)}(x^2+y^2)\ dV=$$

$$=\iiint\limits_{U} r^2\cdot r\ dV=\int_0^2\int_0^h\int_0^{2\pi} r^3\ d\varphi\ dr\ dh=2\pi\int_0^2\int_0^h r^3\ \ dr\ dh=$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^2 h^4\ \ dh=\frac{\pi}{10}\cdot 2^5=\frac{16}{5}\pi.$$

Všimněme si, že spočítaný integrál vyjadřuje moment setrvačnosti kužele E s hustotou $\varrho(x,y,z)=1$ vzhledem k jeho ose symetrie (což je osa z).

(b) Oblast E je popsána jako

$$E:\ -1\le x\le 1\quad \&\quad -\sqrt{1-x^2}\le y\le\sqrt{1-x^2}\quad \&\quad x^2+y^2\le z\le 2-x^2-y^2$$

neboli

$$E:\quad |x|\le 1\quad \&\quad |y|\le\sqrt{1-x^2}\quad \&\quad x^2+y^2\le z\le 2-x^2-y^2$$

a ekvivalentně

$$E: \quad x^2+y^2 \le 1 \quad \& \quad x^2+y^2 \le z \le 2-x^2-y^2$$

což je prostě oblast ležící nad kruhem o poloměru 1 v rovině xy a je sevřena mezi grafy dvou funkcí (celkově vypadá jako "čočka"). Ještě si pro pořádek ověříme, že průmět oblasti do roviny xy je skutečně kruh o průměru 1 (jinak by totiž zadání nemělo smysl). Zřejmě ale je

$$x^2+y^2 \le 2-x^2-y^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2+y^2 \le 1$$

takže je to v pořádku.

V cylindrických souřadnicích Φ je parametrizací $E = \Phi(U)$ množina

$$U: \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \quad \& \quad 0 \le r \le 1 \quad \& \quad r^2 \le h \le 2-r^2 \ .$$

Pak můžeme psát

$$\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{2-x^2-y^2} (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} \ dz \ dy \ dx = \iiint\limits_{E=\Phi(U)} (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} \ dV =$$

$$= \iiint\limits_{U} r^3 \cdot r \ d\varphi \ dh \ dr = \int_0^1 \int_{r^2}^{2-r^2} \int_0^{2\pi} r^4 \ d\varphi \ dh \ dr = 2\pi \int_0^1 \int_{r^2}^{2-r^2} r^4 \ dh \ dr =$$

$$= 4\pi \int_0^1 r^4(1-r^2) \ \ dr = 4\pi \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) = \frac{8}{35}\pi \ .$$

Všimněme si, že spočítaný integrál vyjadřuje moment setrvačnosti "čočky" E s hustotou $\varrho(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2}$ vzhledem k ose z.

10.3 (cylindrické souřadnice)

(a) Určete hmotnost tělesa E omezeného plochami $x^2+z^2=1$, $x+\frac{y}{2}+z=2$ a prostorem $x,y,z \ge 0$. Hustota tělesa je $\varrho(x,y,z) = |y|$.

(b) Určete objem tělesa E omezeného zdola plochou $x^2+y^2=z$ a shora plochou $x^2+y^2+z^2=2$.

Řešení:
(a) Těleso E je část válce seříznuta šikmo rovinou $x+\frac{y}{2}+z=2$ a ležící v části prostoru $x,y,z \ge 0$. Tedy:

$$E: \quad x^2+z^2 \le 1, \quad x \ge 0, \quad z \ge 0, \quad 0 \le y \le 4-2x-2z.$$

Použijeme proto cylindrické souřadnice ve tvaru

$$\Phi: \begin{array}{ccc} x & = & r\cos\varphi \\ y & = & h \\ z & = & r\sin\varphi \end{array}$$

s absolutní hodnotou jakobiánu opět rovnou r.

Po dosazení této parametrizace do podmínek pro E a především pomocí geometrické představy E získáme oblast U parametrizace množiny E jako:

$$U: \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \quad \& \quad 0 \le r \le 1 \quad \& \quad 0 \le h \le 4 - 2r(\cos\varphi + \sin\varphi)\ .$$

Pak můžeme psát

$$\text{hmotnost}(E) = \iiint_E \varrho(x,y,z)\ dV = \iiint_E |y|\ dV = \iiint_U hr\ d\varphi\ dh\ dr =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \int_0^{4-2r(\cos\varphi+\sin\varphi)} hr\ dh\ dr\ d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r \cdot \frac{(4-2r(\cos\varphi+\sin\varphi))^2}{2}\ dr\ d\varphi =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 8r - 8r^2(\cos\varphi+\sin\varphi) + 2r^3(1+2\cos\varphi\sin\varphi)\ dr\ d\varphi =$$

$$= \underbrace{\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 8\ d\varphi\right)}_{=4\pi} \cdot \underbrace{\left(\int_0^1 r\ dr\right)}_{=\frac{1}{2}} - \underbrace{\left(\int_0^1 8r^2\ dr\right)}_{\frac{8}{3}} \cdot \underbrace{\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi + \sin\varphi\ d\varphi\right)}_{=2} + \underbrace{\left(\int_0^1 2r^3\ dr\right)}_{\frac{2}{4}} \cdot \underbrace{\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 + \sin(2\varphi)\ d\varphi\right)}_{=\frac{\pi}{2}+1} =$$

$$= \tfrac{27\pi - 58}{12}$$

(b) Těleso E je určeno zdola paraboloidem a shora sférou, tedy jako

$$E: \quad x^2 + y^2 \le z \le \sqrt{2 - x^2 - y^2}.$$

K její parametrizaci použijeme (obvyklé) válcové souřadnice. Průmět E do roviny xy bude kružnice jejíž poloměr r_0 bude dán průnikem obou ploch, tj. v nerovnostech pro E nastane rovnost $r_0^2 = \sqrt{2 - r_0^2}$. Tedy $0 = r_0^4 + r_0^2 - 2 = (r_0^2 + 2)(r_0^2 - 1)$ a proto $r_0 = 1$. Odpovídající množina U parametrizující E tak bude (opět např. z náčrtu nebo po dosazení $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = h$ do nerovností pro E):

$$U: \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \quad \& \quad 0 \le r \le 1 \quad \& \quad r^2 \le h \le \sqrt{2 - r^2}\ .$$

Pak můžeme psát

$$\text{objem}(E) = \iiint_{E=\Phi(U)} 1\ \mathrm{d}V = \iiint_U r\ \mathrm{d}h\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{r^2}^{\sqrt{2-r^2}} r\ \mathrm{d}h\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r(\sqrt{2-r^2} - r^2)\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\varphi$$

$$= \underbrace{\left(\int_0^{2\pi} 1\ \mathrm{d}\varphi\right)}_{=2\pi} \cdot \underbrace{\left(\int_0^1 r\sqrt{2-r^2} - r^3\ \mathrm{d}r\right)}_{=\frac{2\sqrt{2}-1}{3} - \frac{1}{4}} = \pi \cdot \frac{8\sqrt{2} - 7}{6}\ ,$$

kde jsme spočítali integrál

$$\int_0^1 r\sqrt{2-r^2}\ \mathrm{d}r = \left\{ \begin{smallmatrix} t = 2 - r^2 \\ dt = -2r dr \end{smallmatrix} \right\} = -\frac{1}{2} \int_2^1 \sqrt{t}\ \mathrm{d}t = -\frac{1}{3}\left[t^{\frac{3}{2}}\right]_2^1 = \frac{2\sqrt{2} - 1}{3}\ .$$

Sférické souřadnice mají předpis:

$$\Psi: \begin{array}{rcl} x &=& (r\sin\vartheta)\cos\varphi \\ y &=& (r\sin\vartheta)\sin\varphi \\ z &=& r\cos\vartheta \end{array}$$

kde $(r,\varphi,\vartheta) \in \langle 0,+\infty) \times \langle 0, 2\pi\rangle \times \langle 0,\pi\rangle$.

Poznámka: Sférické souřadnice jsou složením dvou (upravených) cylindrických souřadnic a sice:

$$\Psi = \Phi_2 \circ \Phi_1$$

$$\Phi_2: \begin{array}{rcl} x &=& \tilde{r}\cos\tilde{\varphi} \\ y &=& \tilde{r}\sin\tilde{\varphi} \\ z &=& \tilde{z} \end{array}, \quad \Phi_1: \begin{array}{rcl} \tilde{r} &=& r\sin\vartheta \\ \tilde{\varphi} &=& \varphi \\ \tilde{z} &=& r\cos\vartheta \end{array}$$

takže pro determinant máme

$$\det\Psi' = \det(\Phi_2)'_{|\Phi_1} \cdot \det(\Phi_1)' = \tilde{r}_{|\Phi_1} \cdot r = (r\sin\vartheta)\cdot r = r^2\sin\vartheta.$$

10.4 (sférické souřadnice)

Zapište integrál pomocí sférických souřadnic a pak ho spočítejte:

(a)

$$\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{0}\int_{0}^{\sqrt{9-x^2-z^2}} y\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dydzdx,$$

(b)

$$\int_{0}^{3}\int_{0}^{\sqrt{9-y^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{18-x^2-y^2}} (x^2+y^2+z^2)\,dzdxdy.$$

Řešení:

(a) Oblast integrace je

$$E: \quad |x| \le 3 \quad \& \quad -\sqrt{9-x^2} \le z \le 0 \quad \& \quad 0 \le y \le \sqrt{9-x^2-z^2}$$

neboli

$$E: \quad \underbrace{x^2 \le 9 \quad \& \quad x^2+z^2 \le 9 \quad \& \quad z \le 0}_{\text{průmět } E \text{ do roviny } xz} \quad \& \quad 0 \le y \quad \& \quad x^2+y^2+z^2 \le 9$$

a tedy

$$E: \quad z \le 0 \quad \& \quad 0 \le y \quad \& \quad x^2+y^2+z^2 \le 9,$$

což je čtvrtina koule o poloměru 3 a středem v počátku. Jako parametrizaci E si vezmeme sférické souřadnice

$$\Psi: \begin{array}{rcl} x &=& (r\sin\vartheta)\cos\varphi \\ y &=& (r\sin\vartheta)\sin\varphi \\ z &=& r\cos\vartheta \end{array}$$

a oblast

$$U: \quad 0 \le r \le 3 \quad \& \quad 0 \le \varphi \le \pi \quad \& \quad \frac{\pi}{2} \le \vartheta \le \pi\ .$$

Můžeme tedy psát

$$\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{0}\int_{0}^{\sqrt{9-x^2-z^2}} y\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dydzdx = \iiint_{E=\Phi(U)} y\sqrt{x^2+y^2+z^2}\ dV =$$

$$= \iiint_U r^2 \sin\vartheta \sin\varphi \cdot r^2 |\sin\vartheta| \; dV = \int_0^3 \int_0^\pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} r^4 \sin^2\vartheta \sin\varphi \; dr\; d\varphi\; d\vartheta \;=$$

$$= \underbrace{\left(\int_0^3 r^4 \,\mathrm{d}r\right)}_{=\frac{3^5}{5}} \cdot \underbrace{\left(\int_0^\pi \sin\varphi \,\mathrm{d}\varphi\right)}_{2} \cdot \underbrace{\left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^2\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta\right)}_{=\frac{\pi}{4}} = \frac{3^5}{10}\pi \;.$$

(b) Oblast integrace je

$$E: \quad 0 \le y \le 3 \quad \& \quad 0 \le x \le \sqrt{9-y^2} \quad \& \quad \sqrt{x^2+y^2} \le z \le \sqrt{18-x^2-y^2}$$

neboli

$$E: \quad \underbrace{0 \le y \le 3 \quad \& \quad x^2+y^2 \le 9 \quad \& \quad 0 \le x}_{\text{průmět } E \text{ do roviny } xy \text{ (čtvrtkruh)}} \quad \& \quad \underbrace{\sqrt{x^2+y^2} \le z}_{\text{kužel}} \quad \& \quad \underbrace{x^2+y^2+z^2 \le 18}_{\text{koule}}$$

Podíváme se, kde plášť kuželu protne se sférou, tj. kdy nastává $z = \sqrt{x^2+y^2}$ a $x^2+y^2+z^2 = 18$. Po dosazení dostaneme

$$18 = x^2+y^2+\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 = 2(x^2+y^2) \quad \Leftrightarrow \quad x^2+y^2 = 9$$

Jako parametrizaci E si vezmeme sférické souřadnice

$$\Psi: \begin{array}{rcl} x &=& (r\sin\vartheta)\cos\varphi \\ y &=& (r\sin\vartheta)\sin\varphi \\ z &=& r\cos\vartheta \end{array}$$

a oblast

$$U: \quad 0 \le r \le \sqrt{18} \quad \& \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \quad \& \quad 0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{4} \;.$$

Tuto oblast můžeme získat i po dosazení parametrizace do podmínek E, tj.

$$E: \quad 0 \le r\sin\vartheta\sin\varphi \quad \& \quad r^2\sin^2\vartheta \le 9 \quad \& \quad 0 \le r\sin\vartheta\cos\varphi \quad \& \quad r|\sin\vartheta| \le r\cos\vartheta \quad \& \quad r^2 \le 18$$

odkud máme např. $r^2 \le \min\{\frac{9}{\sin^2\vartheta}, 18\} = 18$ protoze

$$18 \le \frac{9}{\sin^2\vartheta} \quad \Leftrightarrow \quad \sin^2\vartheta \le \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad |\sin\vartheta| \le \frac{\sqrt{2}}{2}$$

což je právě pro $\vartheta \in \langle 0, \; \frac{\pi}{4}\rangle$ splněno. Tento postup je ale náročnější než získat totéž z náčrtu.

Můžeme tedy psát

$$\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-y^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{18-x^2-y^2}} (x^2+y^2+z^2)\, dz dx dy = \iiint_{E=\Phi(U)} (x^2+y^2+z^2)\; dV =$$

$$= \iiint_U r^2 \cdot r^2 |\sin\vartheta| \; dV = \int_0^{\sqrt{18}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} r^4 \sin\vartheta \; d\vartheta\; d\varphi\; dr \;=$$

$$= \underbrace{\left(\int_0^{\sqrt{18}} r^4 \,\mathrm{d}r\right)}_{=\frac{18^2\sqrt{18}}{5}} \cdot \underbrace{\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \,\mathrm{d}\varphi\right)}_{=\frac{\pi}{2}} \cdot \underbrace{\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta\right)}_{=1-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2\cdot 3^5}{5}\pi(\sqrt{2}-1) \;.$$

10.5 (obecnější sférické souřadnice)
Vypočtěte těžiště tělesa

$$E: \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1 \quad \& \quad x, y, z \ge 0,$$

s hustotou $\sigma = 1$, kde $a, b, c > 0$ jsou parametry.

Řešení:
Oblast integrace E je osmina obecného elipsoidu. Použijeme proto upravené sférické souřadnice Φ (které parametrizují tento elipsoid):

$$\Phi: \quad \begin{array}{rcl} x/a & = & (r\sin\vartheta)\cos\varphi \\ y/b & = & (r\sin\vartheta)\sin\varphi \\ z/c & = & r\cos\vartheta \end{array},$$

které vzniknou složením "klasických" sférických souřadnic Ψ a lineární transformace $\mathcal{L}$, která deformuje jednotlivé osy:

$$\Phi = \mathcal{L} \circ \Psi, \qquad \mathcal{L}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) := (a\tilde{x}, b\tilde{y}, c\tilde{z}).$$

Máme tedy

$$\Phi' = \mathcal{L}' \circ \Psi' \quad \text{a} \quad \det \Phi' = (\det \mathcal{L}') \cdot (\det \Psi') = abc \cdot r^2 \sin\vartheta,$$

protože

$$\mathcal{L}' = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

Parametrizace U oblasti $E = \Phi(U)$ je

$$U: \quad 0 \le r \le 1 \quad \& \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \quad \& \quad 0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}.$$

Výpočet hmotnosti m oblasti E si usnadníme znalostí objemu koule o poloměru 1 (označme ji jako K) a toho, že objem E je jedna osmina objemu celého původního elipsoidu, který označme např. jako F. Protože $F = \mathcal{L}(K)$, máme:

$$m = \iiint\limits_E 1 \; dV = \frac{1}{8} \iiint\limits_{F=\mathcal{L}(K)} 1 \; dV = \frac{1}{8} \iiint\limits_K |\det \mathcal{L}'| \; dV =$$

$$= \frac{abc}{8} \iiint\limits_K 1 \; dV = \frac{abc}{8} \cdot \frac{4}{3}\pi = \frac{\pi abc}{6}.$$

Pro zjištění těžiště $\vec{T} = (T_1, T_2, T_3)$ se nyní stačí omezit jen na jednu složku (např. T_3), protože ostatní lze analogicky získat příslušným natočením elipsoidu do daného směru a zopakováním výpočtu. Máme tedy

$$T_3 = \frac{1}{m} \iiint\limits_{E=\Phi(U)} z \; dV = \frac{1}{m} \iiint\limits_U (cr\cos\vartheta) \cdot (abc\; r^2 \sin\vartheta) \; dV =$$

$$= \frac{3c}{\pi} \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3 \sin 2\vartheta \; d\varphi \; d\vartheta \; dr = \frac{3c}{\pi} \left(\int_0^1 r^3 \; dr \right) \cdot \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\vartheta \; d\vartheta \right) \cdot \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \; d\varphi \right) = \frac{3}{8}c.$$

Podobně tedy budeme mít $T_1 = \frac{3}{8}a$ a $T_2 = \frac{3}{8}b$.