11. cvičení z Matematické analýzy 2

26. dubna 2021

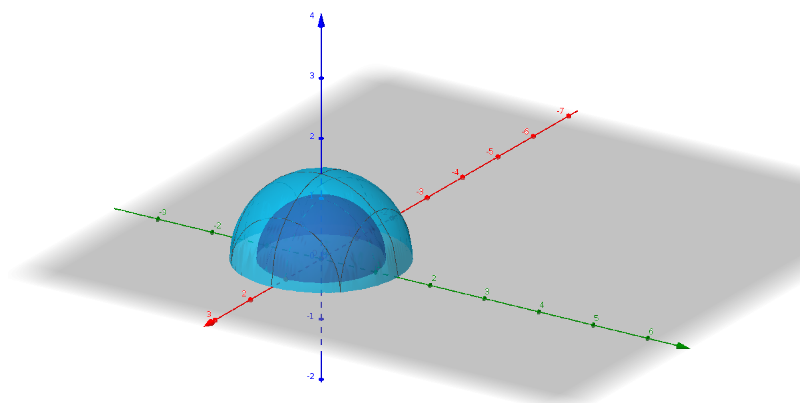
11.1 (sférické souřadnice)
Spočítejte

$$\iiint\limits_E xe^{(x^2+y^2+z^2)^2}\, dV$$

kde

$$E: \quad 1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 2 \;\;\&\;\; z \geq 0\,.$$

Řešení:



Pro oblast E použijeme sférické souřadnice

$$\Psi: \quad \begin{array}{rcl} x & = & (r\sin\vartheta)\cos\varphi \\ y & = & (r\sin\vartheta)\sin\varphi \\ z & = & r\cos\vartheta \end{array}$$

a parametrizace $E = \Psi(U)$ pak bude

$$U: \quad 1 \leq r \leq 2 \quad \& \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad \& \quad 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}\,.$$

Pro jakobián máme

$$\det \Psi' = r^2 \sin\vartheta$$

a můžeme tedy psát

$$\iiint\limits_{E=\Psi(U)} xe^{(x^2+y^2+z^2)^2}\, dV = \iiint\limits_U r\sin\vartheta\cos\varphi \cdot e^{r^4} \cdot r^2 \sin\vartheta \; dr\; d\varphi\; d\vartheta =$$

$$= \left(\int_1^2 r^3 e^{r^4}\ dr \right) \cdot \underbrace{\left(\int_0^{2\pi} \cos\varphi\ d\varphi \right)}_{0} \cdot \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\vartheta\ d\vartheta \right) = 0\ .$$

Připomenutí: Integrál z funkce f podél křivky $\mathcal{C}$ spočítáme podle vztahu

$$\int_{\mathcal{C}} f\ ds = \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot ||\varphi'(t)||\ dt,$$

kde φ je vhodná parametrizace křivky $\mathcal{C}$, tj. zobrazení $\varphi : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^n$, které je

- spojité a po částech spojitě diferencovatelné na intervalu $\langle a, b\rangle$ (tj. křivka může být v některých bodech "zlomená", ale stále to má být souvislá čára),
- až na konečně mnoho vyjímek $t_1, \dots, t_n \in \langle a, b\rangle$ platí, že:
  φ je prosté na $\langle a, b\rangle$ a $\|\varphi'(t)\| \neq 0$ pro $t \in \langle a, b\rangle$ (tj. křivka může protínat konečněkrát sama sebe a vektor rychlosti chceme mít nenulový až konečně mnoho vyjímek),
- $\varphi(\langle a, b\rangle) = \mathcal{C}$.

Integrál z funkce nezávisí na volbě orientace křivky. Změnu orientace lze vždy provést např. jako

$$\psi(t) := \varphi(a + b - t) \ \text{ pro } \ t \in \langle a, b\rangle\ .$$

11.2 (křivkový integrál z funkce)

Spočítejte $\int_{\mathcal{C}} |y|\, ds$, kde $\mathcal{C}$ je cykloida s parametrizací

$$\varphi : \quad x = t - \sin t \quad \wedge \quad y = 1 - \cos t$$

kde $0 \leq t \leq 2\pi$. Cykloida je křivka určená dráhou bodu, který je na kružnici (zde s poloměrem $a = 1$), která se valí bez tření po přímce.

Řešení:
Pro parametrizaci máme

$$\varphi'(t) = \Big(1 - \cos t,\ \sin t\Big)$$

a

$$||\varphi'(t)|| = \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} = \sqrt{2 - 2\cos t}.$$

Takže můžeme psát

$$\int_{\mathcal{C}} |y|\, ds = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} |1 - \cos t| \sqrt{1 - \cos t}\ dt = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \left(\sqrt{1 - \cos t}\right)^3 =$$

$$= \left\{ \cos^2 \tfrac{t}{2} = \tfrac{1 - \cos t}{2} \right\} = 4 \int_0^{2\pi} |\cos \tfrac{t}{2}|^3\ dt = 8 \int_0^{\pi} \underbrace{\cos^3 \tfrac{t}{2}}_{(1 - \sin^2 \frac{t}{2}) \cos \frac{t}{2}}\ dt = \left\{ \begin{smallmatrix} u = \sin \frac{t}{2} \\ du = \frac{1}{2} \cos \frac{t}{2} dt \end{smallmatrix} \right\} =$$

$$= 16 \int_0^1 1 - u^2\ du = \frac{32}{3}\ .$$

11.3 (křivkový integrál z funkce)
Spočítejte $\int\limits_{\mathcal{C}} \sqrt{x^2+y^2}\, ds$, kde $\mathcal{C}$ se skládá postupně z křivek

- $\mathcal{C}_1$: horní polovina kružnice o poloměru $\frac{1}{2}$ se středem v $(\frac{1}{2}, 0)$ jdoucí v kladném smyslu z bodu $(1,0)$ do bodu $(0,0)$;
- $\mathcal{C}_2$: úsečka jdoucí z bodu $(0,0)$ do bodu $(-1,2)$.

Řešení:
• parametrizace $\mathcal{C}_1$: Křivka splňuje rovnici $(x-\frac{1}{2})^2+y^2=(\frac{1}{2})^2$, proto použijeme posunuté polární souřadnice.

$$\varphi_1: \quad x=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\cos t, \quad y=\tfrac{1}{2}\sin t \quad \text{pro} \quad 0\le t\le \pi.$$

$$\varphi_1'(t): \quad x'(t)=-\tfrac{1}{2}\sin t, \quad y'(t)=\tfrac{1}{2}\cos t \quad \text{a} \quad ||\varphi_1'(t)||=\sqrt{(-\tfrac{1}{2}\sin t)^2+\tfrac{1}{4}\cos^2 t}=\tfrac{1}{2}.$$

Parametrizace má orientaci souhlasnou se zvolenou orientací. Takže

$$\int\limits_{\mathcal{C}_1} \sqrt{x^2+y^2}\; ds = \int\limits_0^{\pi} \sqrt{x^2+y^2}_{|\varphi_1(t)} \cdot ||\varphi_1'(t)||\; dt = \int\limits_0^{\pi} \tfrac{1}{2}\sqrt{(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\cos t)^2+(\tfrac{1}{2}\sin)^2 t}\; dt =$$

$$= \tfrac{\sqrt{2}}{4}\int\limits_0^{\pi} \sqrt{1+\cos t}\; dt = \left[\begin{smallmatrix} 2u=t \\ 2du=dt \end{smallmatrix}\right] = \tfrac{\sqrt{2}}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos(2u)}\; du =$$

$$= \Big\{\cos(2u)=\cos^2 u-\sin^2 u\Big\} = \tfrac{\sqrt{2}}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos u\; du = \tfrac{\sqrt{2}}{2}\;.$$

• parametrizace $\mathcal{C}_2$: $\varphi_2(t)=(0,0)+t(-1,2)=(-t,2t), \quad t\in\langle 0,1\rangle$

$$\varphi_2'(t)=(-1,2) \quad \text{a} \quad ||\varphi_2'(t)||=\sqrt{(-1)^2+2^2}=\sqrt{5}.$$

Parametrizace má orientaci souhlasnou se zvolenou orientací. Takže

$$\int\limits_{\mathcal{C}_2} \sqrt{x^2+y^2}\; ds = \int\limits_0^1 \sqrt{x^2+y^2}_{|\varphi_2(t)} \cdot ||\varphi_2'(t)||\; dt = \int\limits_0^1 5t\; dt = \frac{5}{2}\;.$$

Celkem tedy máme

$$\int\limits_{\mathcal{C}} (x+y)\, ds = \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\mathcal{C}_i} (x+y)\, ds = \frac{5+\sqrt{2}}{2}$$

Připomenutí: Integrál z vektorového pole $\vec{F}$ podél dané orientované křivky $\mathcal{C}$ počítáme jako práci síly podél této křivky s normovaným tečným polem $\vec{T}$ (jež určuje orientaci křivky $\mathcal{C}$).
Jestliže parametrizace $\varphi:\langle a,b\rangle \to \mathcal{C}$ odpovídá zvolené parametrizaci, pak máme

$$\int\limits_{\mathcal{C}} \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int\limits_{\mathcal{C}} (\vec{F}\cdot\vec{T})ds = \int\limits_a^b \vec{F}(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\; dt\;.$$

Pokud parametrizace φ je v opačném směru než námi zvolená orientace $\mathcal{C}$, pak máme

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F}\cdot d\vec{s} = -\int_a^b \vec{F}(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\ dt\ .$$

11.4 (křivkový integrál z vektorového pole)
Určete

$$\int_{\mathcal{C}} 2xy\ dx - x^2\ dy$$

kde $\mathcal{C}$ se skládá postupně z křivek

- $\mathcal{C}_1$: úsečka jdoucí z bodu $(2,-1)$ do bodu $(0,0)$;
- $\mathcal{C}_2$: část paraboly o rovnici $x = 2y^2$ jdoucí z bodu $(0,0)$ do bodu $(2,1)$.

Řešení:
Máme pole $\vec{F} = (2xy,\ -x^2)$.

- parametrizace $\mathcal{C}_1$: $\varphi_1(t) = (2,-1) + t(-2,1) = (\underbrace{2-2t}_{x}, \underbrace{t-1}_{y}), \quad t\in\langle 0,1\rangle$

$$\varphi_1'(t) = (-2,1)\ .$$

Parametrizace má orientaci souhlasnou se zvolenou orientací. Takže

$$\int_{\mathcal{C}_1} \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_0^1 (2xy,\ -x^2)_{|_{\varphi_1(t)}}\cdot\varphi_1'(t)\ dt = \int_0^1 \Big(-4(t-1)^2,\ -4(t-1)^2\Big)\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\ dt =$$

$$= 4\int_0^1 (t-1)^2\ dt = 4\left[\frac{(t-1)^3}{3}\right]_0^1 = \frac{4}{3}$$

- parametrizace $\mathcal{C}_2$: Křivku můžeme parametrizovat např. pomocí souřadnice y:

$$\varphi_2:\quad x = 2t^2,\quad y = t\ \text{ pro }\ 0\le t\le 1.$$

$$\varphi_2'(t):\quad x'(t) = 4t,\quad y'(t) = 1\ .$$

Parametrizace má orientaci souhlasnou se zvolenou orientací. Takže

$$\int_{\mathcal{C}_2} \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_0^1 (2xy,\ -x^2)_{|_{\varphi_2(t)}}\cdot\varphi_2'(t)\ dt = \int_0^1 \Big(4t^3,\ -4t^4\Big)\cdot\begin{pmatrix}4t\\1\end{pmatrix}\ dt = 12\int_0^1 t^4\ dt = \frac{12}{5}$$

Celkem tedy máme

$$\int_{\mathcal{C}} (x+y)\,ds = \sum_{i=1}^{2}\int_{\mathcal{C}_i} (x+y)\,ds = \frac{4}{3} + \frac{12}{5} = \frac{56}{15}$$

11.5 (křivkový integrál z vektorového pole)

Určete

$$\int_{\mathcal{C}} (2a - y)\ dx + x\ dy$$

pro oblouk cykloidy $\mathcal{C}$ dané parametrizací

$$\varphi: \quad x = a(t - \sin t) \ \ \& \ \ y = a(1 - \cos t) \ \ \& \ \ 0 \le t \le 2\pi$$

s parametrem $a > 0$ a orientaci danou touto parametrizací. (Cykloida je křivka určená dráhou bodu, který je na kružnici s poloměrem a, která se valí bez tření po přímce.).

Řešení:
Máme

$$\varphi'(t) = \Big(a(1 - \cos t),\ a \sin t\Big)$$

a pole

$$\vec{F} = \Big(2a - y,\ x\Big).$$

Takže můžeme psát

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\ dt = \int_0^{2\pi} \Big(a(1 + \cos t),\ a(t - \sin t)\Big) \cdot \begin{pmatrix} a(1 - \cos t) \\ a \sin t \end{pmatrix}\ dt =$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} 1 - \cos^2 t + t \sin t - \sin^2 t\ dt = a^2 \int_0^{2\pi} t \sin t\ dt = a^2 \Big[-t \cos t \Big]_{t=0}^{t=2\pi} + a^2 \int_0^{2\pi} \cos t\ dt = -2\pi a^2.$$

11.6 (křivkový integrál z vektorového pole)
Určete

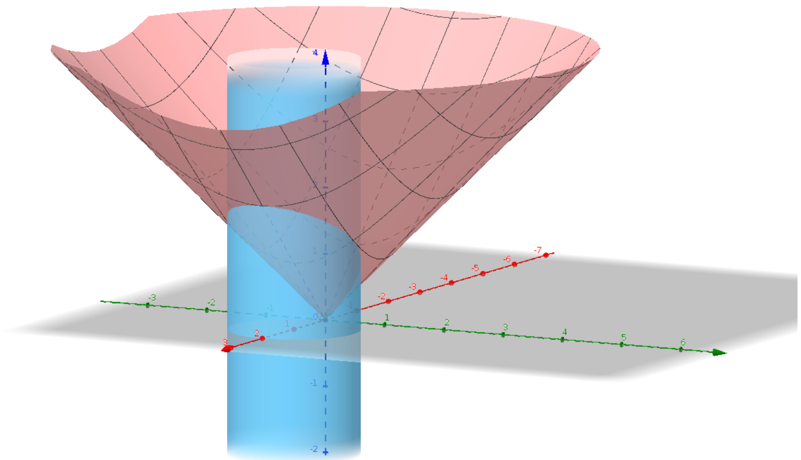
$$\int_{\mathcal{C}} y\ dx + z\ dy + x\ dz$$

kde

$$\mathcal{C}: \quad x^2 + y^2 = z^2 \quad \& \quad x^2 + y^2 = 2x \quad \& \quad z \ge 0$$

je křivka s orientací v kladném smyslu při pohledu shora.

Řešení:
Máme pole $\vec{F} = (y,\ z,\ x)$. Rovnice $x^2 + y^2 = 2x$ je to samé jako $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ (což je válec). Křivka představuje tedy průnik kuželu s válcem jehož poloměr je 1 a osa kužele leží v plášti válce.



Parametrizaci uděláme pomocí obvyklých válcových souřadnic:

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$
$$z = h$$

Po dosazení do podmínek dostaneme

$$r^2 = h^2 \quad \& \quad r^2 = 2r\cos\varphi \quad \& \quad h \geq 0$$

které splníme (pro všechny možnosti) při volbě $r = 2\cos\varphi$, $h = r = 2\cos\varphi$ a $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ (pro lepší pochopení si křivku načrtněte). Tím dostaneme parametrizaci:

$$\mathcal{C}: \quad x(\varphi) = 2\cos^2\varphi\ , \quad y(\varphi) = 2\cos\varphi\sin\varphi\ , \quad z(\varphi) = 2\cos\varphi \quad \text{pro} \quad \varphi \in \langle -\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\rangle$$

která má požadovanou orientaci.

Opět můžeme využít formu, ve které byl integrál zadán:

$$\int\limits_{\mathcal{C}} y\ dx + z\ dy + x\ dz = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Big(y(\varphi)\cdot\frac{dx}{d\varphi} + z(\varphi)\cdot\frac{dy}{d\varphi} + x(\varphi)\cdot\frac{dz}{d\varphi}\Big)\ d\varphi =$$

$$= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Big(-2\cdot \underbrace{4\sin^2\varphi\cdot\cos^2\varphi}_{=\sin^2(2\varphi)=\frac{1-\cos(4\varphi)}{2}} + 4\cos\varphi\cdot(\underbrace{\cos^2\varphi - \sin^2\varphi}_{=1-2\sin^2\varphi}) - 4\underbrace{\cos^2\varphi\cdot\sin\varphi}_{\text{lichá funkce}}\Big)\ d\varphi =$$

$$= -2\Big[\tfrac{\varphi}{2} - \tfrac{1}{8}\sin(4\varphi)\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + 4\Big[\sin\varphi - \tfrac{2}{3}\sin^3\varphi\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + 0 = \frac{8}{3} - \pi\ .$$

Jiná parametrizace pomocí posunutých válcových souřadnic:

$$x = 1 + r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$
$$z = h$$

Po dosazení do podmínek dostaneme

$$|h| = \sqrt{2r}\sqrt{1+\cos\varphi} \quad \& \quad r^2 = 1 \quad \& \quad h \geq 0$$

které splníme (pro všechny možnosti) při volbě $r = 1$, $h = \sqrt{2}\sqrt{1+\cos\varphi} = 2|\cos\frac{\varphi}{2}|$ a $-\pi \le \varphi \le \pi$. Tím dostaneme parametrizaci:

$$\mathcal{C}: \quad x(\varphi) = 1+\cos\varphi\ , \quad y(\varphi) = \sin\varphi\ , \quad z(\varphi) = 2\cos\tfrac{\varphi}{2} \quad \text{pro} \quad \varphi \in \langle -\pi, \pi\rangle$$

která má požadovanou orientaci.

Nyní máme:

$$\int\limits_{\mathcal{C}} \vec{F}\, d\vec{s} = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \Big(y(\varphi),\ z(\varphi),\ x(\varphi) \Big) \cdot \begin{pmatrix} x'(\varphi) \\ y'(\varphi) \\ z'(\varphi) \end{pmatrix}\, d\varphi =$$

$$= \int\limits_{-\pi}^{\pi} \Big(\sin\varphi,\ 2\cos\tfrac{\varphi}{2},\ 1+\cos\varphi \Big) \cdot \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ -\sin\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix}\, d\varphi =$$

$$= \int\limits_{-\pi}^{\pi} -\sin^2\varphi + \underbrace{2\cos\frac{\varphi}{2}\cdot\cos\varphi}_{\cos(\frac{\varphi}{2}+\varphi)+\cos(\frac{\varphi}{2}-\varphi)} - \sin\frac{\varphi}{2} - \underbrace{\cos\varphi\cdot\sin\frac{\varphi}{2}}_{\frac{1}{2}\sin(\varphi+\frac{\varphi}{2})-\frac{1}{2}\sin(\varphi-\frac{\varphi}{2})}\, d\varphi =$$

$$= -\pi + \Big[\tfrac{2}{3}\sin(\tfrac{3}{2}\varphi) + 2\sin(\tfrac{\varphi}{2}) + 2\cos(\tfrac{\varphi}{2}) + \tfrac{1}{3}\cos(\tfrac{3}{2}\varphi) - \cos(\tfrac{\varphi}{2}) \Big]_{-\pi}^{\pi} = \frac{8}{3} - \pi\ .$$

Poznámka: Použili jsme vzorce

$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$$
$$\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y$$

a tedy

$$\cos x\cos y = \frac{1}{2}\Big(\cos(x+y) + \cos(x-y)\Big)$$

a

$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$$
$$\sin(x-y) = \sin x\cos y - \cos x\sin y$$

a tedy

$$\cos x\sin y = \frac{1}{2}\Big(\sin(x+y) - \sin(x-y)\Big)\ .$$

11.7 (křivkový integrál z vektorového pole)

Určete

$$\int\limits_{\mathcal{C}} (y^2+1)\ dx + 2z\ dy + x^2\ dz$$

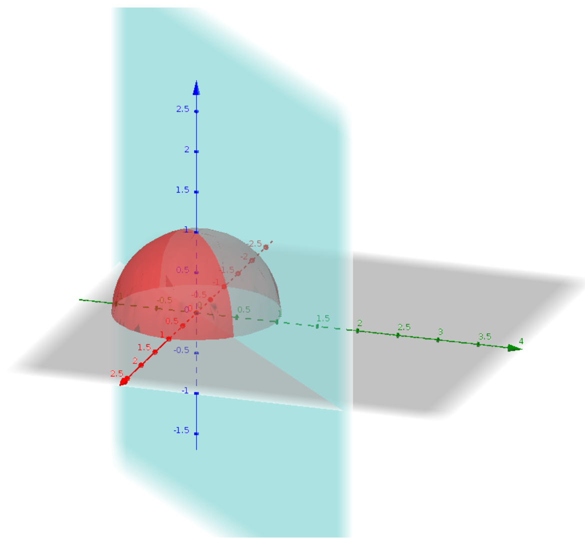
kde

$$\mathcal{C}: \quad x^2+y^2+z^2 = 1 \quad \& \quad x = y \quad \& \quad z \ge 0$$

je křivka s orientací od bodu $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ do bodu $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$.

Řešení:

Máme pole $\vec{F} = (y^2+1,\ 2z,\ x^2)$. Křivka představuje průnik horní části sféry a roviny kolmé k základně. Je to tedy polovina kružnice.



Ukážeme si na ní, jak můžeme využívat známých transformací souřadnic pro nalezení parametrizaci křivek.

Vzhledem k rovnicím určujícím naší křivku $\mathcal{C}$ můžeme dobře využít sférické souřadnice

$$\begin{aligned} x &= r \sin\vartheta \cos\varphi \\ y &= r \sin\vartheta \sin\varphi \\ z &= r\cos\vartheta \end{aligned}$$

Po dosazení do vztahu pro $\mathcal{C}$ dostaneme

$$r^2 = 1 \quad \& \quad r\sin\vartheta(\cos\varphi - \sin\varphi) = 0 \quad \& \quad r\cos\vartheta \geq 0$$

Vzhledem ke geometrickému náhledu a těmto rovnicím si vezmeme tuto volbu pro jednotlivé parametry:

$$r = 1 \quad \& \quad \varphi = \frac{\pi}{4} \quad \& \quad -\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$$

Může se zdát zvláštní brát si úhel ϑ i pro záporné hodnoty, ale vzhledem k tomu, že se měří od kladné části osy z a úhel φ máme teď pevně zvolený, to je v pořádku. Dostáváme tak parametrizaci:

$$\mathcal{C}: \quad x(\vartheta) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\vartheta\ , \quad y(\vartheta) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\vartheta\ , \quad z(\vartheta) = \cos\vartheta \quad \text{pro} \quad \vartheta \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$$

kterou bychom mohli koneckonců snadno dostat i z geometrického náhledu nebo při dosazení $x = y$ do rovnice $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (tj. zparametrizováním elipsy $2y^2 + z^2 = 1$). Tato parametrizace odpovídá i zvolené orientaci $\mathcal{C}$.

Pro výpočet opět můžeme využít formu, ve které byl integrál zadán:

$$\int_{\mathcal{C}} (y^2+1)\ dx + 2z\ dy + x^2\ dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Big((y^2(\vartheta)+1)\cdot \frac{dx}{d\vartheta} + 2z(\vartheta)\cdot\frac{dy}{d\vartheta} + x^2(\vartheta)\cdot\frac{dz}{d\vartheta}\Big)\ d\vartheta =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Big((\tfrac{1}{2}\sin^2\vartheta + 1)\cdot \tfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\vartheta + 2\cos\vartheta\cdot\tfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\vartheta - \tfrac{1}{2}\sin^2\vartheta\cdot\sin\vartheta\Big)\ d\vartheta =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\tfrac{1}{2}\sin^2\vartheta + 1)\cos\vartheta\ d\vartheta + \sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\cos^2\vartheta}_{\frac{1+\cos(2\vartheta)}{2}}\ d\vartheta - \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sin^3\vartheta}_{\text{lichá funkce}}\ d\vartheta =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\tfrac{1}{6}\sin^3\vartheta + \sin\vartheta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \sqrt{2}\cdot\frac{\pi}{2} + 0 = \frac{7\sqrt{2}}{6} + \frac{\pi\sqrt{2}}{2}\ .$$

Definice konzervativního pole: Spojité vektorové pole $\vec{F}$ na otevřené množině $U \subseteq \mathbb{R}^n$ nazýváme *konzervativní*, pokud práce síly z bodu A do bodu B (v případě že dané body lze propojit alespoň jednou křivkou ležící v U) nezávisí na způsobu, jakým oba body propojíme (na bodech A a B ale záviset může). V tom případě pro tuto práci volíme značení $\int\limits_A^B \vec{F}\ d\vec{s}$.

Věta (o potenciálu): Následující podmínky jsou ekvivalentní pro spojité vektorové pole $\vec{F}$ na otevřené množině $U \subseteq \mathbb{R}^n$:

- pole $\vec{F}$ je konzervativní na U,
- práce pole $\vec{F}$ podél jakékoliv uzavřené křivky $\mathcal{C} \subseteq U$ je nulová,
- existuje funkce (tzv. *potenciál*) $f : U \to \mathbb{R}$, že $\operatorname{grad}(f) = \vec{F}$.

Pak platí, že

$$\int_A^B \vec{F}\ d\vec{s} = \int_A^B \operatorname{grad}(f)\ d\vec{s} = f(B) - f(A)\ .$$

Definujme si tzv. rotaci pole jako

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z},\ \ -\frac{\partial F_3}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial z},\ \ \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)$$

kde $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ je formálně definovaný vektor složený z operátorů parciálních derivací.

Věta: Pro spojitě diferencovatelné vektorové pole $\vec{F}$ na otevřené množině $U \subseteq \mathbb{R}^3$ (tj. v dimenzi 3) platí:

- $\vec{F}$ je konzervativní $\Rightarrow \operatorname{rot}(\vec{F}) = \vec{0}$
  (podmínka $\operatorname{rot}(\vec{F}) = \vec{0}$ vlastně znamená záměnnost druhých parciálních derivací potenciálu f)
- Jestliže množina U je *jednoduše souvislá* a $\operatorname{rot}(\vec{F}) = \vec{0}$ (všude na U), pak $\vec{F}$ je konzervativní.

Definice jednoduše souvislé množiny: Množina $U \subseteq \mathbb{R}^n$ se nazývá jednoduše souvislá, jestliže se jakákoliv uzavřená křivka v U dá v rámci U spojitě stáhnout do bodu.

Příkladem jednoduše souvislé množiny je $\mathbb{R}^n$ nebo $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.
Příkladem otevřené množiny, která není jednoduše souvislá je $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $\mathbb{R}^3 \setminus$ "přímka" nebo torus (tj. "pneumatika").

Poznámka: Nulová rotace je obecně opravdu jen nutnou podmínkou pro existenci potenciálu, jak ukazuje příklad vektorového pole

$$\vec{F} = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\right)$$

na množině $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \neq 0\}$, která není jednoduše souvislá.

Máme

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) = \left(0, 0, -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} + \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\right) = \vec{0}$$

ale práce síly $\vec{F}$ podél kružnice $\Gamma : \varphi(\alpha) = (\cos\alpha, \sin\alpha, 0)$, $\alpha \in \langle 0, 2\pi\rangle$ je nenulová:

$$\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} (-\sin\alpha, \cos\alpha, 0)\cdot \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix} d\alpha = \int_0^{2\pi} 1\ d\alpha = 2\pi.$$

Pole tedy nemá potenciál na celém U. Na druhé straně, na určitých podmnožinách U lze potenciál pole $\vec{F}$ nalézt, např.

$$f_1(x,y,z) = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) \qquad \text{na} \qquad U_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \neq 0\}$$

nebo

$$f_2(x,y,z) = \operatorname{arccotg}\left(\frac{x}{y}\right) \qquad \text{na} \qquad U_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y \neq 0\}.$$

11.8 (konzervativní pole, potenciál)

Určete hodnotu parametru α tak, aby následující pole byla konzervativní. Najděte jejich potenciál a hodnotu práce síly z bodu A do B.

(i) $\vec{F}(x,y,z) = (x^2 + y, \quad y^2 + \alpha x, \quad ze^z)$, $A = (0,1,0)$, $B = (-1,1,0)$.

(ii) $\vec{F}(x,y,z) = \left(\frac{\alpha}{z}, \quad -\frac{3}{z}, \quad \frac{3y-x}{z^2}\right)$, $A = (1,0,1)$, $B = (-1,1,2)$.

Řešení:

(i) Po dosazení máme

$$\mathrm{rot}(\vec{F}) = (0-0, \quad 0-0, \quad \alpha - 1)\,,$$

tedy rotace je nulová na celém $\mathbb{R}^3$ právě když $\alpha = 1$ a pole $\vec{F}$ pak má potenciál. Počítání rotace pole nám tedy sice rozhodne o existenci potenciálu, ale neurčí jeho tvar. Ten musíme zjistit dalším výpočtem, jehož postup v sobě také zahrnuje (případné) zjištění neexistence potenciálu (viz dále). Pokud nás tedy zajímá pouze (ne)existence potenciálu, je jednodušší a rychlejší spočítat rotaci a pokud chceme přímo potenciál najít, použijeme následující postup a v tom případě je počítání rotace zbytečné.

Potenciál je funkce $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ taková, že

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x^2 + y \tag{1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = y^2 + \alpha x \tag{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = ze^z\,. \tag{3}$$

Z první rovnice dostaneme

$$f(x,y,z) = \int (x^2 + y)\; dx = \frac{x^3}{3} + xy + C(y,z),$$

kde $C : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je neznámá funkce závislá nyní pouze na y a z. Nalezený tvar funkce f teď dosadíme do druhé rovnice

$$y^2 + \alpha x = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^3}{3} + xy + C(y,z)\right) = x + \frac{\partial C}{\partial y}$$

tedy

$$\frac{\partial C}{\partial y}(y,z) = y^2 + (\alpha - 1)x.$$

Levá strana rovnice nezávisí na proměnné x, tedy i pravá strana na ní nesmí záviset, takže musí být $\alpha = 1$. Pak máme

$$\frac{\partial C}{\partial y}(y,z) = y^2.$$

Dostáváme $C(y,z) = \int y^2\; dy = \frac{y^3}{3} + D(z)$, kde $D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je opět neznámá funkce závislá pouze na z. Zatím tedy máme

$$f(x,y,z) = \frac{x^3}{3} + xy + \frac{y^3}{3} + D(z)$$

a dosazením do poslední rovnice máme

$$ze^z = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x^3}{3} + xy + \frac{y^3}{3} + D(z)\right) = \frac{\partial D}{\partial z}.$$

Takže $D(z) = \int ze^z\; dz = (z-1)e^z + K$, kde $K \in \mathbb{R}$ je konstanta. Celkově tak máme potenciál

$$f(x,y,z) = \frac{x^3}{3} + xy + \frac{y^3}{3} + (z-1)e^z + K.$$

Práce pole pak je

$$\int_A^B \vec{F}\, d\vec{s} = f(B) - f(A) = f(-1,1,0) - f(0,1,0) = -2 - \Big(-\frac{2}{3}\Big) = -\frac{4}{3}\ .$$

- -

(ii) Zde je podstatné podívat se na definiční obor:

$$D(\vec{F}): \quad z \neq 0$$

Znamená to, že po vyjmutí roviny z $\mathbb{R}^3$ vzniknou dva poloprostory, které navzájem nejdou propojit křivkou.

Pokud se nám podaří najít potenciál, nepotřebujeme počítat rotaci.

Pro potenciál f musí platit

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\alpha}{z} \tag{4}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{3}{z} \tag{5}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{3y - x}{z^2}\ . \tag{6}$$

Začneme třeba první rovnici:

$$f(x,y,z) = \int \frac{\alpha}{z}\ dx = \frac{\alpha x}{z} + C(y,z),$$

kde $C : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je neznámá funkce závislá nyní pouze na y a z. Nalezený tvar funkce f teď dosadíme do druhé rovnice

$$-\frac{3}{z} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\alpha x}{z} + C(y,z)\Big) = \frac{\partial C}{\partial y}$$

tedy

$$\frac{\partial C}{\partial y} = -\frac{3}{z}.$$

Dostáváme $C(y,z) = \int -\frac{3}{z}\ dy = -\frac{3y}{z} + D(z)$, kde $D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je opět neznámá funkce závislá pouze na z. Dostáváme tedy zatím

$$f(x,y,z) = \frac{\alpha x - 3y}{z} + D(z)$$

a dosazením do poslední rovnice máme

$$\frac{3y - x}{z^2} = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\alpha x - 3y}{z} + D(z)\right) = -\frac{\alpha x - 3y}{z^2} + \frac{\partial D}{\partial z}.$$

Takže

$$\frac{\partial D}{\partial z}(z) = \frac{(\alpha - 1)x}{z^2}$$

Levá strana rovnice nezávisí na proměnné x a y, tedy i pravá strana na nich nesmí záviset, takže musí být $\alpha = 1$. Pak máme

$$\frac{\partial D}{\partial z}(z) = 0$$

a tedy $D(z) = K$, kde $K \in \mathbb{R}$ je konstanta (ovšem konstanta je to obecně vždy jen na otevřené *souvislé* množině - tedy na obou našich poloprostorech P_+ a P_- níže můžou být konstanty vzájemně různé). Celkově tak máme potenciál

$$f(x, y, z) = \frac{x - 3y}{z} + K.$$

Teď určíme práci pole: Nejdříve zkontrolujeme, jestli body $A = (-1, 1, 2)$ a $B = (1, 0, 1)$ vůbec lze propojit křivkou, tj. jestli leží ve stejném poloprostoru. Ty jsou určeny pomocí hodnoty z, tedy jako

$$P_+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0\}$$
$$P_- = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z < 0\}$$

Zřejmě máme $A, B \in P_+$ a proto má smysl ptát se na práci pole z A do B:

$$\int_A^B \vec{F}\, d\vec{s} = f(B) - f(A) = f(-1, 1, 2) - f(1, 0, 1) = 2 - 1 = 1\ .$$