# 12. cvičení z Matematické analýzy 2

3. května 2021

**Připomenutí:** Integrál z funkce $f : M \to \mathbb{R}$ je určený jako

$$\iint\limits_M f\ dS = \iint\limits_U f(\Phi(u,v)) \cdot \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\|\ dS\ ,$$

kde $\Phi : U \to M$ je vhodná parametrizace.

**12.1** (plošný integrál z funkce)
Spočítejte

(i)

$$\iint\limits_M z\ dS,$$

kde $M$ je částí válce $x^2 + y^2 = 2$ vymezená rovinou $z = 0$ a plochou $z = x^2 + (y-1)^2$.

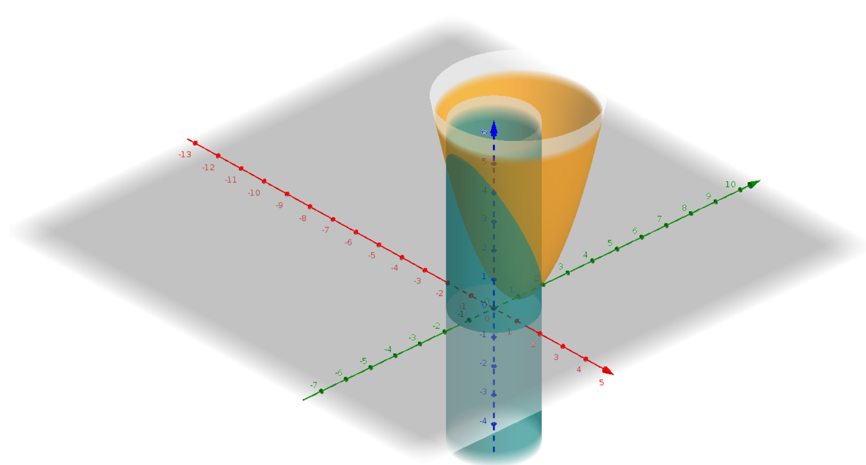
(ii)

$$\iint\limits_M x^2 z + y^2 z\ dS,$$

kde $M$ je povrch polokoule $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \geq 0$.

**Řešení:**
(i) Plocha je určena jako

$$M: \quad x^2 + y^2 = 1 \quad \& \quad 0 \leq z \leq x^2 + (y-1)^2.$$



Její parametrizaci vytvoříme pomocí cylindrických souřadnic

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \\ z &= h \end{aligned}$$

kde po dosazení z první podmínky dostaneme $r^2 = 2$ a po dosazeni $r = \sqrt{2}$ z druhé podmínky pak

$$0 \leq h \leq (\sqrt{2}\cos\varphi)^2 + (\sqrt{2}\sin\varphi - 1)^2 = 3 - 2\sqrt{2}\sin\varphi$$

Tím dostaneme předpis

$$\Phi(\varphi, h) = (\sqrt{2}\cos\varphi, \sqrt{2}\sin\varphi, h)$$

s definičním oborem

$$U: \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad \& \quad 0 \leq h \leq 3 - 2\sqrt{2}\sin\varphi.$$

Dále je

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial\Phi}{\partial\varphi} &= (-\sqrt{2}\sin\varphi, \quad \sqrt{2}\cos\varphi, \quad 0) \\ \tfrac{\partial\Phi}{\partial h} &= (\qquad 0, \qquad 0, \quad 1) \\ \tfrac{\partial\Phi}{\partial\varphi} \times \tfrac{\partial\Phi}{\partial h} &= (\ \sqrt{2}\cos\varphi, \quad \sqrt{2}\sin\varphi, \quad 0) \end{aligned}$$

$$\left\| \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} \times \frac{\partial\Phi}{\partial h} \right\| = \sqrt{2}.$$

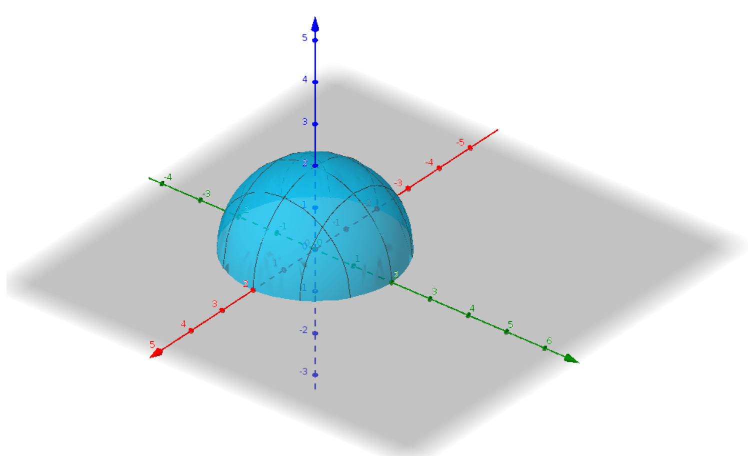
Takže pro funkci $f(x, y, z) = z$ máme

$$\iint_M f\ dS = \iint_U z\ dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{3-2\sqrt{2}\sin\varphi} h \cdot \sqrt{2}\ dh\ d\varphi = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \frac{(3 - 2\sqrt{2}\sin\varphi)^2}{2}\ d\varphi =$$

$$= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \left( \frac{9}{2} - 6\sqrt{2}\sin\varphi + 4\sin^2\varphi \right)\ d\varphi = \sqrt{2}(9\pi + 0 + 4\pi) = 13\sqrt{2}\pi.$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

(ii) Plocha $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 4 \ \&\ z \geq 0\}$ je polovina sféry.



Zparametrizujeme ji pomocí sférických souřadnic jako

$$\Phi(\varphi, \vartheta) = (2\sin\vartheta\cos\varphi, \quad 2\sin\vartheta\sin\varphi, \quad 2\cos\vartheta)$$

s definičním oborem

$$U: \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad \& \quad 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Dále máme

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = (-2\sin\vartheta\sin\varphi, \quad 2\sin\vartheta\cos\varphi, \qquad 0 \quad )$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} = ( \quad 2\cos\vartheta\cos\varphi, \quad 2\cos\vartheta\sin\varphi, \quad -2\sin\vartheta).$$

Výpočet normy vektorového součinu si zjednodušíme tím, že si všimneme, že dané vektory jsou na sebe kolmé, tj. $\frac{\partial\Phi}{\partial u} \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial v} = 0$. Pak je

$$\left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\| = \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right\| \cdot \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\| = 4|\sin\vartheta|.$$

Máme tedy

$$\iint\limits_M x^2 z + y^2 z \; dS = \iint\limits_U \left(8\sin^2\vartheta\cos\vartheta\right) \cdot 4|\sin\vartheta| \; dS = \left( \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 32\sin^3\vartheta\cos\vartheta \; d\vartheta \right) \cdot \left( \int\limits_0^{2\pi} 1 \; d\varphi \right) =$$

$$= 2\pi\Big[8\sin^4\vartheta\Big]_{\vartheta=0}^{\vartheta=\frac{\pi}{2}} = 16\pi.$$

**Připomenutí:** Tok vektorového pole $\vec{F}: M \to \mathbb{R}^3$ orientovanou plochou $M \subseteq \mathbb{R}^3$ se spočítá jako

$$\iint\limits_M \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint\limits_U \vec{F}(\Phi(u,v)) \cdot \left( \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right) dS \; ,$$

kde $\Phi: U \to M$ je opět vhodná parametrizace, $U \subseteq \mathbb{R}^2$, a orientace daná vektorovým polem $\frac{\partial\Phi}{\partial u} \times \frac{\partial\Phi}{\partial v}$ souhlasí se zadanou parametrizací plochy $M$. (Pokud by orientace nesouhlasila, stačí jen změnit pořadí ve vektorovém součinu, tj. změnit znaménko integrálu.)

**12.2** (plošný integrál z vektorového pole - tok)
Spočítejte

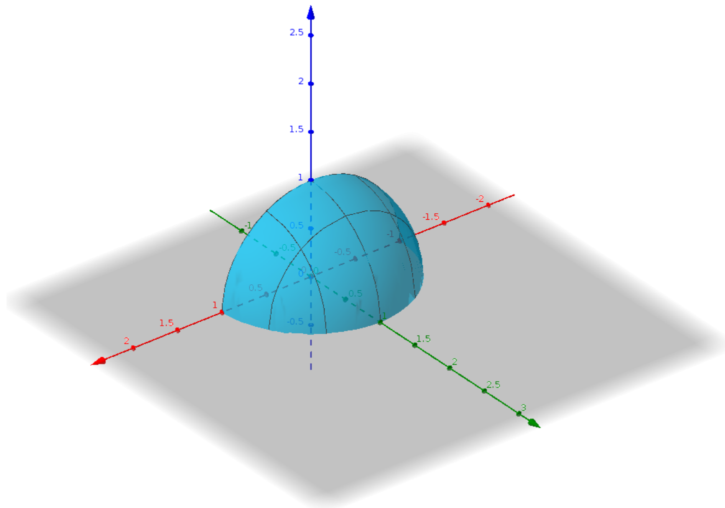
$$\iint\limits_M \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

kde

(i) $\vec{F}(x,y,z) = (0, \; x, \; -y)$ a $M$ je částí sféry $x^2+y^2+z^2 = 1$, $0 \leq y$, $0 \leq z$ s horní orientací.

(ii) $\vec{F}(x,y,z) = (x, \; y^2, \; yz)$ a $M$ je na plášti kuželu $x^2+y^2 = (z-1)^2$ pro $0 \leq z \leq 1$ s orientací danou vektorovým polem směřujícím vzhůru.

**Řešení:**
(i)



Plochu $M$ zparametrizujeme pomocí sférických souřadnic jako

$$\Phi(\varphi,\vartheta) = (\sin\vartheta\cos\varphi,\quad \sin\vartheta\sin\varphi,\quad \cos\vartheta)$$

s definičním oborem

$$U: \quad 0 \le \varphi \le \pi \quad \& \quad 0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}.$$

Máme

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial\Phi}{\partial\varphi} &= \big( -\sin\vartheta\sin\varphi, \quad \sin\vartheta\cos\varphi, \quad 0 \big) \\ \tfrac{\partial\Phi}{\partial\vartheta} &= \big( \cos\vartheta\cos\varphi, \quad \cos\vartheta\sin\varphi, \quad -\sin\vartheta \big) \end{aligned}$$

a odsud je

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} \times \frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta} = \big( -\sin^2\vartheta\cos\varphi,\ -\sin^2\vartheta\sin\varphi,\ -\sin\vartheta\cos\vartheta \big).$$

Třetí složka tohoto vektoru je záporná (na vnitřku definičního oboru), takže toto pole je orientované opačně k zadání. Takže máme

$$\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = -\iint_U \vec{F}\big(\Phi(\varphi,\vartheta)\big)\cdot\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\times\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta}\right) dS \ =$$

$$= -\iint_U (0, \sin\vartheta\cos\varphi, -\sin\vartheta\sin\varphi)\cdot\begin{pmatrix} -\sin^2\vartheta\cos\varphi \\ -\sin^2\vartheta\sin\varphi \\ -\sin\vartheta\cos\vartheta \end{pmatrix} dS \ =$$

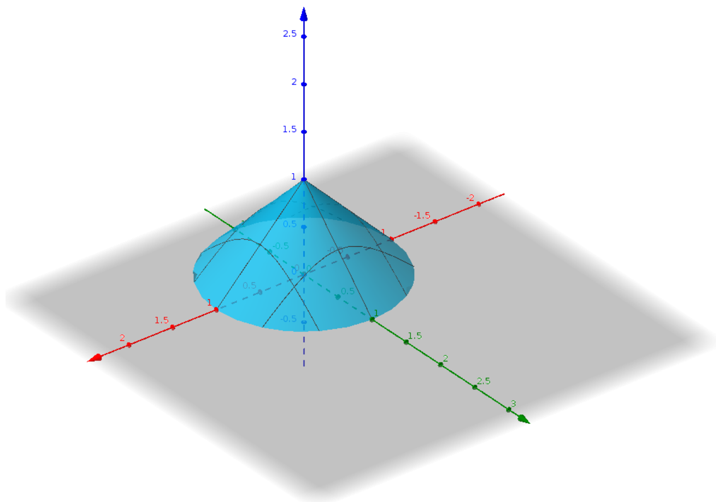
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\pi} \sin^3\vartheta\cdot(\sin\varphi\cos\varphi) - (\sin^2\vartheta\cos\vartheta)\cdot\sin\varphi \ d\vartheta \ d\varphi =$$

$$= \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2\vartheta)\sin\vartheta \ d\vartheta\right)\cdot\left(\underbrace{\int_0^{\pi}\frac{\sin(2\varphi)}{2}\ d\varphi}_{=0}\right) - \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\vartheta\cos\vartheta \ d\vartheta\right)\cdot\left(\int_0^{\pi}\sin\varphi \ d\varphi\right) =$$

$$= 0 - \left[\frac{\sin^3\vartheta}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot\big[-\cos\varphi\big]_0^{\pi} = -\frac{2}{3}\ .$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

(ii) Plochu $M$ je část kužele a je zadaná také jako graf funkce $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ pro $x^2 + y^2 \leq 1$.



Můžeme ji proto takto přirozeně zparametrizovat:

$$\Phi(x,y) = \Big(x,\ y,\ 1 - \sqrt{x^2+y^2}\Big)$$

s definičním oborem

$$U: \quad x^2 + y^2 \leq 1.$$

Všimněme si, že v bodě $(0,0)$ nemá tato funkce derivaci (je to vrchol kužele). Ale protože jde jen o jeden bod, nemá to vliv na integrál.

Dále máme

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial \Phi}{\partial x} &= \left(1, \quad 0, \quad -\tfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \\ \tfrac{\partial \Phi}{\partial y} &= \left(0, \quad 1, \quad -\tfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \end{aligned}$$

a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \Big(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad 1\Big).$$

Třetí složka tohoto vektoru je kladná, takže toto pole je orientované v souhlase se zadáním. Takže máme

$$\iint\limits_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint\limits_U \vec{F}\big(\Phi(x,y)\big) \cdot \Big(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y}\Big)\, dS \ = \iint\limits_U \big(x, y^2, y(1 - \sqrt{x^2+y^2})\big) \cdot \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 1 \end{pmatrix} dS \ =$$

$$= \iint\limits_U \frac{x^2 + y^3 - y(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} + y \ dS = \iint\limits_U \frac{x^2(1-y)}{\sqrt{x^2+y^2}} + y \ dS =$$

$$= \begin{bmatrix} {\scriptstyle x = r\cos\varphi} \\ {\scriptstyle y = r\sin\varphi} \\ {\scriptstyle 0 \leq r \leq 1} \\ {\scriptstyle 0 \leq \varphi \leq 2\pi} \end{bmatrix} = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^1 \Big(r\cos^2\varphi(1 - r\sin\varphi) + r\sin\varphi\Big) r \ dr d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2\cos^2\varphi - r^3\cos^2\varphi\sin\varphi + r^2\sin\varphi \; dr d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\varphi + \sin\varphi}{3} - \frac{\cos^2\varphi\sin\varphi}{4} \; d\varphi =$$

$$= \frac{\pi}{3} + \left[\frac{\cos^3\varphi}{12}\right]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{3} \; .$$

**Poznámka:** Ke zjištění hodnoty integrálu můžeme použít i Gaussovu větu (viz třeba příklad **14.12**), protože tok pole podstavou $x^2 + y^2 \le 1$, $z = 0$ je v tomto případě nulový (neboť pole je rovnoběžné s podstavou).

Nechť $E \subseteq \mathbb{R}^2$ je oblast integrace, která je omezená, a nechť její hranice $\partial E$ je tvořena uzavřenou křivkou $\mathcal{C}$, co sama sebe nikde neprotíná (tzv. jednoduchá uzavřená křivka). Nechť orientace křivky $\mathcal{C}$ je taková, že při jejím procházení máme v daném místě oblast $E$ vždy po levé straně.

Podle **Greenovy věty** pro pole $\vec{F} = (F_1, F_2)$ máme

$$\int\limits_{\mathcal{C}=\partial E} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint\limits_E \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) \; dS,$$

kde výraz na pravé straně si můžeme pamatovat jako $\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ F_1 & F_2 \end{vmatrix}$. Je to analogie rotace pole (jakéhosi "víru"v daném bodě) ve třech dimenzích. Interpretací Greenovy věty je to, že "víry"pole uvnitř oblasti se v sousedních bodech vyruší a zbyde jen "vír"na okraji oblasti.

**Poznámka:** Hranici $E$ může být tvořena i z více uzavřených křivek, u kterých opět požadujeme, aby hranice ležela po jejich levé straně při procházení po směru dané křivky.

**12.3** (Greenova věta)

Použijte Greenovu větu k nalezení práce síly $\vec{F}(x, y) = (2xy^3,\; 4x^2y^2)$ vykonané na částici podél křivky $\mathcal{C}$, která je hranicí oblasti $M$ ohraničené křivkami $y = 0$, $x = 1$ a $y = x^3$ v prvním kvadrantu. Křivka $\mathcal{C}$ je orientována v kladném smyslu (tj. proti směru hodinových ručiček).

**Řešení:**

Máme tedy oblast

$$M: \quad 0 \le x \le 1 \quad \& \quad 0 \le y \le x^3.$$

Její hranicí je po částech diferencovatelná křivka, která má orientaci odpovídající použití Greenovy věty.

Dále je

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 8xy^2 - 6xy^2 = 2xy^2$$

a proto

$$\int\limits_{\mathcal{C}=\partial M} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint\limits_M \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) \; dS = \iint\limits_M 2xy^2 \; dS = \int_0^1\int_0^{x^3} 2xy^2 \; dy \; dx = \int_0^1 \frac{2}{3}x^{10} \; dx = \frac{2}{33}.$$

**12.4** (Greenova věta)

Pomocí Greenovy věty spočítejte plochu v $\mathbb{R}^2$ omezenou cykloidou $\varphi(t) = (t - \sin t,\; 1 - \cos t)$ pro $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ a osou $x$.

**Řešení:**

Plochu $E$ si vymezíme křivkami $\mathcal{C}_1$ (cykloida) a $\mathcal{C}_2$ (úsečka na ose $x$) tak, aby tyto křivky tvořily její okraj, který bude orientovaný v souladu s Greenovou větou. Cykloida

$$\mathcal{C}_1: \quad \varphi(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t), \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle$$

má podle zadané parametrizace opačnou orientaci než potřebujeme. Pro úsečku je nejjednodušší si zvolit parametrizaci

$$\mathcal{C}_2: \quad \psi(t) = (t, 0), \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle$$

která je ve směru, který chceme.

Greenovu větu, pro (zatím nespecifikované) vektorové pole $\vec{F}(x,y) = \Big(F_1(x,y), F_2(x,y)\Big)$, pak použijeme takto:

$$\iint\limits_E \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \, dS = \int\limits_{\partial E} (F) \cdot d\,(s) = - \int\limits_{\mathcal{C}_1} (F) \cdot d\,(s) + \int\limits_{\mathcal{C}_2} (F) \cdot d\,(s)$$

kde znaménka u křivek odpovídají tomu, jestli daná křivka má nebo nemá orientaci v souladu s Greenovou větou.

Teď už jen zbývá si zvolit vhodné vektorové pole a to tak, aby $\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 1$. Pak totiž bude

$$\text{obsah}(E) = \iint\limits_E \underbrace{1}_{\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}} \, dS = \cdots = - \int\limits_{\mathcal{C}_1} (F) \cdot d\,(s) + \int\limits_{\mathcal{C}_2} (F) \cdot d\,(s) \ .$$

Takových voleb je mnoho, ale pro nás bude nejlepší nějaká jednoduchá, např. $\frac{\partial F_2}{\partial x} = 1$ a $\frac{\partial F_1}{\partial y} = 0$, tj. $\vec{F} = (0, x)$. Pro takovouto volbu bude i integrál $\int\limits_{\mathcal{C}_2} (F) \cdot d\,(s)$ nulový, protože $\vec{F}$ je kolmé k ose $x$, takže při pohybu ve vodorovném směru nekoná práci. Ale stejně si nulovost ještě ověříme i explicitně.

Takže máme

pro cykloidu: $\varphi(t) = (\underbrace{t - \sin t}_{=x(t)}, \ \underbrace{1 - \cos t}_{=y(t)}), \qquad \varphi'(t) = (1 - \cos t, \quad \sin t)$

pro úsečku: $\psi(t) = (\underbrace{t}_{=x(t)}, \ \underbrace{0}_{=y(t)}), \qquad \psi'(t) = (1, \quad 0)$

a po dosazení dostaneme

$$\text{obsah}(E) = - \int\limits_{\mathcal{C}_1} (F) \cdot d\,(s) + \int\limits_{\mathcal{C}_2} (F) \cdot d\,(s) = - \int\limits_0^{2\pi} (F)\,(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \ dt + \int\limits_0^{2\pi} (F)\,(\psi(t)) \cdot \psi'(t) =$$

$$= - \int\limits_0^{2\pi} (0, \quad t - \sin t) \cdot \begin{pmatrix} 1 - \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \ dt + \underbrace{\int\limits_0^{2\pi} (0, \quad t) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=0} \ dt =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} t \cdot (-\sin t) + \sin^2 t \ dt = \underbrace{\left[t \cos t\right]_0^{2\pi}}_{=2\pi} - \underbrace{\int\limits_0^{2\pi} \cos t \ dt}_{=0} + \underbrace{\int\limits_0^{2\pi} \sin^2 t \ dt}_{=\pi} = 2\pi - 0 + \pi = 3\pi \ .$$

**12.5** (Greenova věta)

Pomocí Greenovy věty spočítejte

$$\int_{\mathcal{C}} (3y - e^{\sin x})\, dx + (7x + \sqrt{y^4 + 1})\, dy$$

kde $\mathcal{C}$ je kladně orientovaná kružnice $x^2 + y^2 = 9$.

**Řešení:**

Naše oblast $M$ je kruh o poloměru 3

$$M : \quad x^2 + y^2 \leq 3^2$$

a pole je

$$\vec{F}(x, y) = \left(3y - e^{\sin x},\ 7x + \sqrt{y^4 + 1}\right) .$$

Orientace křivky $\mathcal{C}$ je v souhlase s Greenovou větou. Můžeme proto psát (s využitím znalosti obsahu kruhu)

$$\int_{\mathcal{C}=\partial M} (F) \cdot d\,(s) = \iint_M \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\, dS = \iint_M (7-3)\ dS = \iint_M 4\ dS = 4 \cdot \pi \cdot 3^2 = 36\pi\ .$$

Je vidět, že původní křivkový integrál bychom těžko počítali, ale s využitím Greenovy věty je výpočet snadný.

**Stokesova věta** je zobecnění Greenovy věty z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^3$ (orientovaná plocha, jejímž okrajem je křivka $\mathcal{C}$, už může být různě zakřivená v prostoru):

$$\int_{\mathcal{C}=\partial M} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint_M \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{S}\ ,$$

kde

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) := \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z},\ -\left(\frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z}\right),\ \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) .$$

Orientace plochy a jejího okraje musí být v souladu a to pomocí pravidla pravé ruky (ruku položíme na plochu poblíž okraje tak, aby vektor její orientace mířil do dlaně a palec ukazoval směrem dovnitř plochy - pak zbylé prsty ukazují směr orientace okraje), nebo jednodušeji - když obcházíme plochu podél okraje, musíme ji aktuálně mít vždy po levé straně.

**12.6** (Stokesova věta)

Spočítejte práci síly

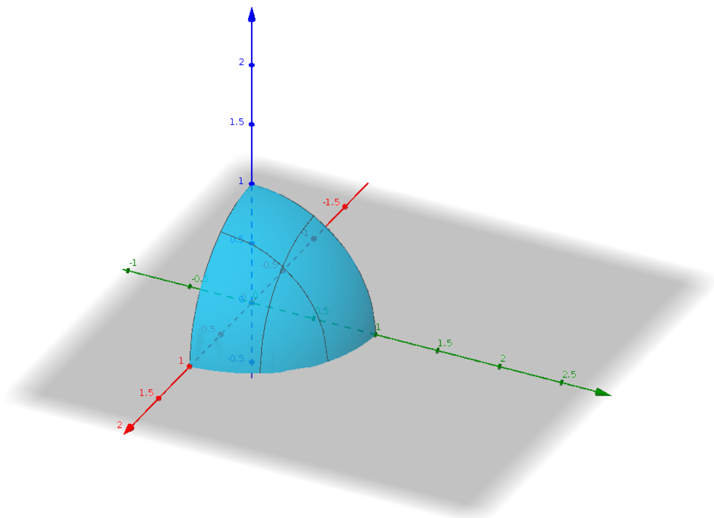
$$\vec{F}(x, y, z) = \Big((x+1)^x + z^2\Big)\vec{i} + \Big((y+1)^y + x^2\Big)\vec{j} + \Big((z+1)^z + y^2\Big)\vec{k}$$

vykonané na částici, která se pohybuje podél okraje části sféry $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ležící v prvním oktantu. Křivka $\mathcal{C}$ daná okrajem této plochy je orientovaná v záporném smyslu při pohledu seshora (přesněji: ve směru daném posloupnosti bodů $(2, 0, 0) \to (0, 0, 2) \to (0, 2, 0)$).

**Řešení:**

Jak je vidět z tvaru vektorového pole, integrál odpovídající práci $\vec{F}$ síly podél uvedeného okraje $\mathcal{C}$ bychom přímým způsobem počítali asi těžko. Pomůžeme si proto Stokesovou větou, která integrál převede na tok pole $\operatorname{rot}((F))$ plochou

$$M: \quad x^2+y^2+z^2=4, \quad x,y,z \geq 0\ .$$



Tu musíme orientovat tak, aby její orientace byla v souladu se zvolenou orientací křivky $\mathcal{C}$. To lze uvidět např. z náčrtku a správná orientace plochy $M$ je pak směrem *do počátku souřadnic* (tedy kdyby $M$ byla celá sféra, byla by to ta orientace dovnitř).

Stokesova věta pak říká, že pro plochu $M$ a okraj $\mathcal{C}(=\partial M)$, co mají orientace v souladu, je

$$\int_{\mathcal{C}} (F)\cdot d\,(s) = \iint_M \operatorname{rot}((F))\cdot d\,(S)$$

kde pro pole $\vec{F}=(F_1,F_2,F_3)$ je

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) := \nabla\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y}-\frac{\partial F_2}{\partial z},\ \frac{\partial F_1}{\partial z}-\frac{\partial F_3}{\partial x},\ \frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)$$

což v našem případě je

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (x+1)^x+z^2 & (y+1)^y+x^2 & (z+1)^z+y^2 \end{vmatrix} = (2y-0,\ 2z-0,\ 2x-0)\ .$$

Dále budeme potřebovat ještě plochu $M$ zparametrizovat. K tomu bude nejvhodnější použít sférických souřadnic (pro $r=2$). Parametrizace pak bude

$$\Phi: \quad \begin{array}{rcl} x &=& 2\sin\vartheta\cos\varphi \\ y &=& 2\sin\vartheta\sin\varphi \\ z &=& 2\cos\vartheta \end{array}$$

pro

$$U: \quad 0\leq\varphi\leq\tfrac{\pi}{2} \quad \& \quad 0\leq\vartheta\leq\tfrac{\pi}{2}\ .$$

Pro výpočet plošného integrálu budeme potřebovat ještě vektorový součin

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\times\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial x}{\partial\varphi} & \frac{\partial y}{\partial\varphi} & \frac{\partial z}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial x}{\partial\vartheta} & \frac{\partial y}{\partial\vartheta} & \frac{\partial z}{\partial\vartheta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2\sin\vartheta\sin\varphi & 2\sin\vartheta\cos\varphi & 0 \\ 2\cos\vartheta\cos\varphi & 2\cos\vartheta\sin\varphi & -2\sin\vartheta \end{vmatrix} =$$

$$= (-4\sin^2\vartheta\cos\varphi,\quad -4\sin^2\vartheta\sin\varphi,\quad -4\sin\vartheta\cos\vartheta)$$

který má zjevně tu správnou orientaci odpovídající orientaci plochy (tj. směrem *do počátku* souřadnic), protože znaménko $z$-tové složky je záporné pro body z vnitřku množiny $U$. Kdyby součin neměl požadovanou orientaci, vzali bychom ho s opačným znaménkem. Proto teď můžeme psát

$$\int\limits_{\mathcal{C}} (F)\cdot d\,(s) = \iint\limits_{M=\Phi(U)} \operatorname{rot}((F))\cdot d\,(S) = \iint\limits_{U} \Big(\operatorname{rot}((F))\circ\Phi\Big)\cdot\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\times\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta}\right) d\varphi\; d\vartheta =$$

$$= \iint\limits_{U} (4\sin\vartheta\sin\varphi,\quad 4\cos\vartheta,\quad 4\sin\vartheta\cos\varphi)\cdot\begin{pmatrix} -4\sin^2\vartheta\cos\varphi \\ -4\sin^2\vartheta\sin\varphi \\ -4\sin\vartheta\cos\vartheta \end{pmatrix} d\varphi\; d\vartheta =$$

$$= -16\iint\limits_{U} \sin^3\vartheta(\sin\varphi\cos\varphi) + (\sin^2\vartheta\cos\vartheta)\sin\varphi + (\sin^2\vartheta\cos\vartheta)\cos\varphi\; d\varphi\; d\vartheta =$$

$$= \left(-16\int\limits_0^{\pi/2} \underbrace{\sin^3\vartheta}_{(1-\cos^2\vartheta)\sin\vartheta}\; d\vartheta\right)\cdot\left(\int\limits_0^{\pi/2}\sin\varphi\cos\varphi\; d\varphi\right) + \left(-16\int\limits_0^{\pi/2}\sin^2\vartheta\cos\vartheta\; d\vartheta\right)\cdot\left(\int\limits_0^{\pi/2}(\sin\varphi+\cos\varphi)\; d\varphi\right) =$$

$$= \Big[-16(-\cos\vartheta + \tfrac{1}{3}\cos^3\vartheta)\Big]_0^{\pi/2}\cdot\Big[\tfrac{1}{2}\sin^2\varphi\Big]_0^{\pi/2} + \Big[-\tfrac{16}{3}\sin^3\vartheta\Big]_0^{\pi/2}\cdot\Big[-\cos\varphi+\sin\varphi\Big]_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{32}{3}\cdot\frac{1}{2} + \left(-\frac{16}{3}\right)\cdot 2 = -\frac{16}{3}\ .$$

**Gaussova věta**

$$\iint\limits_{\partial E} (F)\cdot d\,(S) = \iiint\limits_{E} \operatorname{div}((F))\; dV$$

dává do souvislosti tok pole $(F)$ přes okraj $M = \partial E$ oblasti $E$ v $\mathbb{R}^3$ s integrálem přes tuto oblast $E$. Okraj $\partial E$ má zde vždy vnější orientaci. Funkce

$$\operatorname{div}((F)) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z},$$

která se integruje v $M$ se nazývá divergence pole $(F)$ a interpretuje se jako "zdroj"pole v daném bodě (při kladné hodnotě) případně "odtok"pole v daném bodě (při záporné hodnotě). Smyslem Gaussovy věty tedy je, že celková "změna pole"v objemu odpovídá příslušnému toku pole přes okraj.

**12.7** (Gaussova věta)

Pomocí Gaussovy věty spočítejte tok pole $\vec{F} = (3x,\ xy,\ 2xz)$ povrchem krychle $E = \langle 0,1\rangle^3 \subseteq \mathbb{R}^3$ s vnější orientací.

**Řešení:**
Máme

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = 3 + x + 2x = 3 + 3x$$

a tedy

$$\iint\limits_{\partial E} (F)\cdot d\,(S) = \iiint\limits_{E} \operatorname{div}(\vec{F})\; dV = \int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^1 (3+3x)\; dx\; dy\; dz = \left(\int\limits_0^1 3+3x\; dx\right)\cdot\left(\int\limits_0^1\int\limits_0^1 1\; dy\; dz\right) = \frac{9}{2}.$$