13. cvičení z Matematické analýzy 2

10. května 2021

Stokesova věta je zobecnění Greenovy věty z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^3$ (orientovaná plocha, jejímž okrajem je křivka $\mathcal{C}$, už může být různě zakřivená v prostoru):

$$\int\limits_{\mathcal{C}=\partial M} \vec{F}\cdot d\vec{s} = \iint\limits_{M} \operatorname{rot}(\vec{F})\cdot d\vec{S}\ ,$$

kde

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) := \nabla\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y}-\frac{\partial F_2}{\partial z},\ -\left(\frac{\partial F_3}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial z}\right),\ \frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\ .$$

Orientace plochy a jejího okraje musí být v souladu a to pomocí pravidla pravé ruky (ruku položíme na plochu poblíž okraje tak, aby vektor její orientace mířil do dlaně a palec ukazoval směrem dovnitř plochy - pak zbylé prsty ukazují směr orientace okraje), nebo jednodušeji - když obcházíme plochu podél okraje, musíme ji aktuálně mít vždy po levé straně.

13.1 (Stokesova věta)

Pomocí Stokesovy věty spočítejte

$$\int\limits_{C} \vec{F}\cdot d\vec{s},$$

kde $\vec{F}(x,y,z)=(x,y,xy)$ a

(i) křivka $\mathcal{C}$ je hranicí plochy $M:\quad z=x^2+y^2,\ \ 0\le x\le 1,\ \ 0\le y\le 1.$

(ii) křivka $\mathcal{C}$ je průnikem ploch $z=x^2+y^2$ a $x^2+y^2=x$.

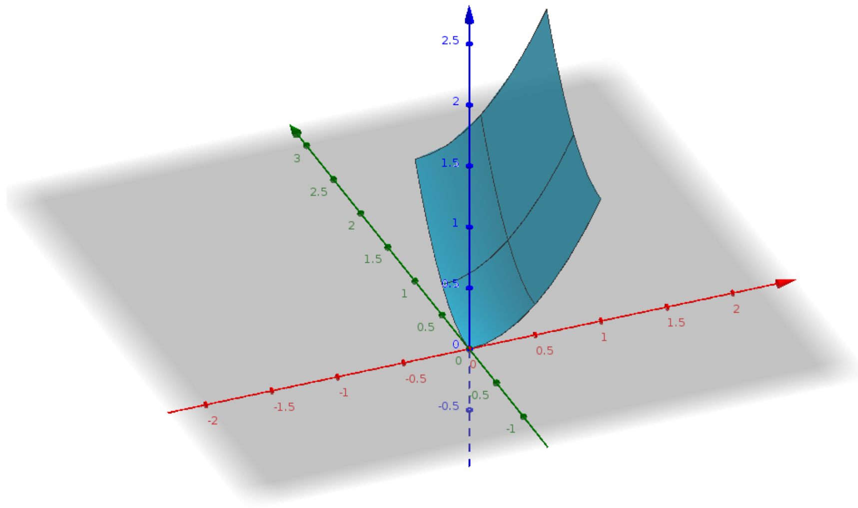
Křivka $\mathcal{C}$ je orientována kladně při pohledu seshora (neboli: jestliže křivku, která tvoří okraj zprojektujeme do roviny xy, bude mít tento její obraz kladnou orientaci).

Řešení:

Abychom mohli použít Stokesovu větu, musíme si zvolit správnou orientaci příslušné plochy M tak, aby byla v souladu s orientací křivky $\mathcal{C}$, která tvoří její okraj. Rotace pole $\vec{F}$ je:

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & xy \end{vmatrix} = \big(x,\ -y,\ 0\big)\ .$$

(i)



Plocha M je grafem funkce $f(x,y) = x^2+y^2$, takže ji budeme orientovat směrem nahoru a přirozeněji zparametrizujeme pomocí

$$\Phi(x,y) = \Big(x, y, f(x,y)\Big) = (x, y, x^2+y^2)$$

s definičním oborem

$$U: \quad 0 \le x \le 1 \ \ \& \ \ 0 \le y \le 1 \ .$$

Máme

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = (1, 0, 2x)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = (0, 1, 2y)$$

a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y} = (-2x, -2y, 1)$$

Třetí složka vektoru $\frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y}$ je kladná, tedy tento normálový vektor odpovídá zadané orientaci plochy "nahoru."

Máme tak

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint_M \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{S} = \iint_U \operatorname{rot}(\vec{F})(\Phi(x,y)) \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) dS = \iint_U (x, -y, 0) \cdot \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \\ 1 \end{pmatrix} \ dS =$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \left(2y^2 - 2x^2\right) \ dx \ dy = \int_0^1 \int_0^1 2y^2 \ dx \ dy - \int_0^1 \int_0^1 2x^2 \ dy \ dx = 0 \ .$$

(ii) Křivka $\mathcal{C}$ je průnikem paraboloidu $z = x^2 + y^2$ a válce $x^2 + y^2 = x$ ($\Leftrightarrow (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = (\frac{1}{2})^2$). Plochu, jejímž bude křivka $\mathcal{C}$ okrajem si proto zvolíme jako

$$M: \quad x^2 + y^2 = z, \ (x - \tfrac{1}{2})^2 + y^2 \le (\tfrac{1}{2})^2$$

s orientací nahoru.

Plochu M opět přirozeně zparametrizujeme pomocí

$$\Phi(x,y) = \Big(x, y, f(x,y)\Big) = (x, y, x^2+y^2)$$

s definičním oborem

$$U: \quad (x - \tfrac{1}{2})^2 + y^2 \leq (\tfrac{1}{2})^2 \ .$$

Jako v části (i) máme, že vektor

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y} = (-2x, -2y, 1)$$

odpovídá zadané orientaci plochy "nahoru." Máme tak

$$\int\limits_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint\limits_M \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{S} = \iint\limits_U \operatorname{rot}(\vec{F})(\Phi(x,y)) \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) dS = \iint\limits_U (x, -y, 0) \cdot \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \\ 1 \end{pmatrix} \ dS =$$

$$= 2 \iint\limits_U \left(y^2 - x^2 \right) \ dx \ dy = \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{2} + r \cos\varphi \\ y = r \sin\varphi \\ 0 \leq r \leq \frac{1}{2} \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ \mathit{jakobian} = r \end{array} \right\} =$$

$$= 2 \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \int\limits_0^{2\pi} (r^2 \sin^2\varphi - \underbrace{(\tfrac{1}{2} + r\cos\varphi)^2}_{\frac{1}{4} + r\sin\varphi + r^2\cos^2\varphi})r \ d\varphi \ dr = 2 \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \int\limits_0^{2\pi} r^3 \underbrace{(\sin^2\varphi - \cos^2\varphi)}_{-\cos(2\varphi)} - r^2 \sin\varphi - \tfrac{r}{4} \ d\varphi \ dr =$$

$$= 0 + 0 - 2 \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \int\limits_0^{2\pi} \tfrac{r}{4} \ d\varphi \ dr = -\frac{\pi}{8}.$$

Zde jsme využili nulovost integrálu přes periodu funkcí $\sin\varphi$ a $\cos(2\varphi)$.

13.2 (Stokesova věta)

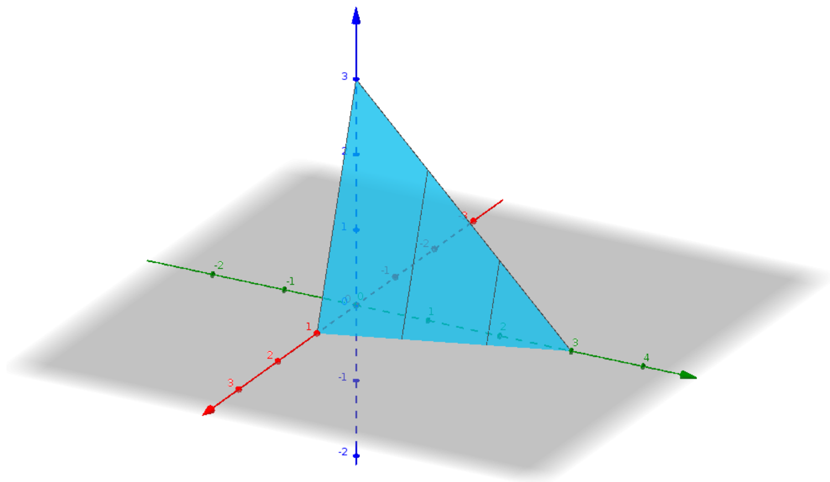
Pomocí Stokesovy věty spočítejte

$$\int\limits_{\partial M} \vec{F} \cdot d\vec{s},$$

kde $\vec{F}(x,y,z) = (xz, 2xy, 3xy)$ a $\mathcal{C}$ je hranice části roviny $3x + y + z = 3$, která je v prvním oktantu. Okraj plochy je orientovaný v záporném smyslu při pohledu seshora (neboli: jestliže křivku, která tvoří okraj zprojektujeme do roviny xy, bude mít tento její obraz zápornou orientaci).

Řešení:

Plocha M je trojúhelník.



Orientace plochy v souladu s orientací okraje je tedy směrem dolů (při pohledu zdola bude okraj orientovaný v "kladném" smyslu). Normované normálové pole je tak dané směrem vektoru

$$\vec{n} = -(3,1,1)\ .$$

Dále máme

$$\mathrm{rot}(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz & 2xy & 3xy \end{vmatrix} = \big(3x,\ x-3y,\ 2y\big)\ .$$

Plochu zparametrizujeme jako graf funkce $z = 3-3x-y$, tedy

$$\Phi(x,y) = (x, y, 3-3x-y)$$

pomocí množiny

$$U: \quad 0 \le x \le 1 \ \ \&\ \ 0 \le y \le 3-3x\ .$$

(U je jen projekcí M do roviny xy). Pro tečné vektory máme

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial\Phi}{\partial x} &= \big(1, \quad 0, \quad -3\big) \\ \tfrac{\partial\Phi}{\partial y} &= \big(0, \quad 1, \quad -1\big) \end{aligned}$$

a

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} \times \frac{\partial\Phi}{\partial y} = \big(3,1,1\big).$$

Protože tento vektorový součin má opačný směr než zadaná orientace $\vec{n}$, musíme ho do integrálu dosadit s opačným znaménkem (nebo prostě změnit pořadí vektorů v součinu, tj. dosadit $\frac{\partial\Phi}{\partial y} \times \frac{\partial\Phi}{\partial x}$ namísto $\frac{\partial\Phi}{\partial x} \times \frac{\partial\Phi}{\partial y}$). Takže máme

$$\int\limits_{\partial M} \vec{F}\cdot d\vec{s} = \iint\limits_{M=\Phi(U)} \mathrm{rot}(\vec{F})\cdot d\vec{S} = \iint\limits_{U} \Big(\mathrm{rot}(\vec{F})\circ\Phi\Big)\cdot\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\times\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) dS =$$

$$= \iint\limits_{U} (3x,\ x-3y,\ 2y)\cdot\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} dS = \iint\limits_{U} (-10x+y)\ dS = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{3(1-x)} y - 10x\ dy\ dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \frac{9}{2}(1-x)^2 - 30x(1-x)\ dx = \frac{3}{2} - 30 \cdot \frac{1}{6} = -\frac{7}{2}\ .$$

Gaussova věta

$$\iint\limits_{\partial E} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint\limits_{E} \operatorname{div}(\vec{F})\ dV$$

dává do souvislosti tok pole $\vec{F}$ přes okraj $M = \partial E$ oblasti E v $\mathbb{R}^3$ s integrálem přes tuto oblast E. Okraj ∂E má zde vždy vnější orientaci. Funkce

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z},$$

která se integruje v M se nazývá divergence pole $\vec{F}$ a interpretuje se jako "zdroj"pole v daném bodě (při kladné hodnotě) případně "odtok"pole v daném bodě (při záporné hodnotě). Smyslem Gaussovy věty tedy je, že celková "změna pole"v objemu odpovídá příslušnému toku pole přes okraj.

13.3 (Gaussova věta)

Pomocí Gaussovy věty určete tok pole $\vec{F}(x,y,z) = (x,\ y^2,\ y+z)$ povrchem tělesa E ohraničeného plochami $x^2+y^2=4$, $z=x$ a $z=4$. Povrch má vnější orientaci.

Řešení:
Oblast E je vnitřek válce, který je shora omezen rovinou $z=4$ a zdola seříznut rovinou $z=x$.
Tedy

$$E:\quad x^2+y^2 \le 4,\ x \le z \le 4$$

. Divergence pole je

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = 1 + 2y + 1 = 2(1+y)\ .$$

Protože v Gaussově větě budeme integrovat přes E využijeme substituce přes válcové souřadnice:

$$\Phi:\ \begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = h \end{array}$$

s oblastí parametrizace

$$U:\quad 0 \le r \le 2,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ r\cos\varphi \le h \le 4$$

kterou získáme snadno jednak z náčrtu (rozsah φ) a jednak dosazením substituce do nerovnic popisujících množinu R. Pro povrch $M = \partial E$ s vnější normálou pak máme z Gaussovy věty, že

$$\iint\limits_{\partial E} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint\limits_{E} \operatorname{div}(\vec{F})\ dV = \iiint\limits_{E} 2\,(1+y)\ \ dV = \iiint\limits_{U} 2\,(1+r\sin\varphi)\,r\ dh\ dr\ d\varphi =$$

$$= 2\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^2\int\limits_{r\cos\varphi}^4 (r + r^2\sin\varphi)\ dh\ dr\ d\varphi = 2\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^2 \underbrace{(r+r^2\sin\varphi)(4-r\cos\varphi)}_{4r - r^2\cos\varphi + 4r^2\sin\varphi - r^3\cos\varphi\sin\varphi}\ dr\ d\varphi =$$

$$= 2\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^2 4r\ dr\ d\varphi - 2\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^2 r^2\cos\varphi + 4r^2\sin\varphi - r^3\underbrace{\cos\varphi\sin\varphi}_{\frac{1}{2}\sin(2\varphi)}\ dr\ d\varphi =$$

$$= \left(\int\limits_0^{2\pi} 2\ d\varphi\right) \cdot \left(\int\limits_0^2 r^2\ dr\right) + 0 = 4\pi \cdot \frac{8}{3} = \frac{32}{3}\pi.$$

Zde jsme využili nulovosti integrálu přes periodu funkcí $\sin\varphi$, $\cos\varphi$ a $\sin(2\varphi)$.

13.4 (Gaussova věta)

Pomocí Gaussovy věty určete

$$\iint\limits_M \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

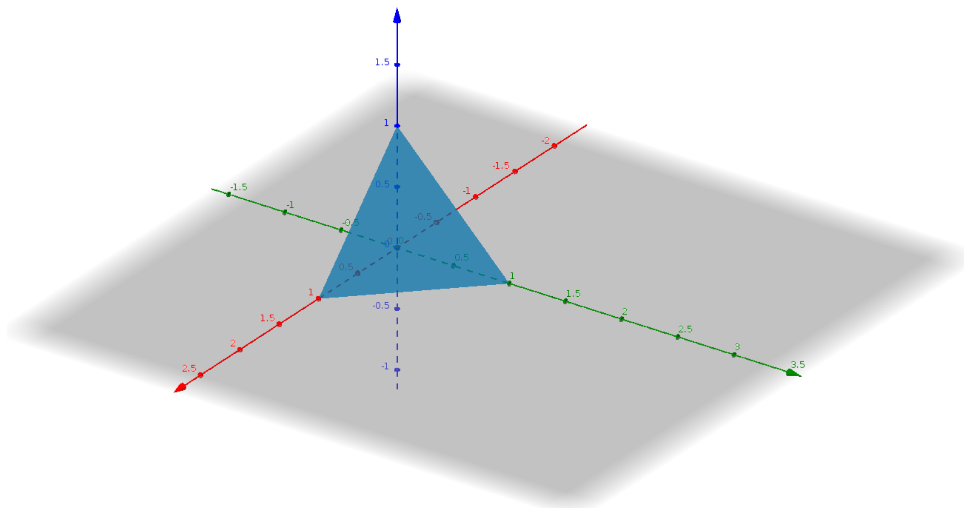
kde plocha je

$$M: \quad x + y + z = 1 \ \ \& \ \ x, y, z \geq 0$$

a je orientovaná směrem vzhůru a vektorové pole je

$$\vec{F}(x, y, z) = \big(xy, \ yz, \ xz\big) \ .$$

Řešení:



Abychom mohli použít Gaussovu větu, potřebujeme nějakou trojrozměrnou oblast E, jejíž okraj ∂E bude obsahovat plochu M a kde tok pole zbytkem okraje, tj. orientovanou plochou $\partial E \setminus M$ bude nulový.

Jestliže si zvolíme čtyřstěn

$$E: \quad x + y + z \leq 1 \ \ \& \ \ x, y, z \geq 0$$

pak se jeho okraj ∂E skládá z plochy M (jejíž zadaná orientace odpovídá vnější orientaci) a tří trojúhelníků Δ_1, Δ_2 a Δ_2 (jejichž orientaci si zvolíme také jako "vnější"). Pole $\vec{F}$ na trojúhelníku

$$\Delta_1: \quad x = 0 \ \ \& \ \ y + z \geq 1 \ \ \& \ \ y, z \geq 0$$

je tvaru $\vec{F}(0, y, z) = \big(0, \ yz, \ 0\big)$ a je proto rovnoběžné s plochou tohoto trojúhelníka (neboli toto pole $\vec{F}$ je kolmé na normálové vektorové pole $\vec{N}_1 = (-1, 0, 0)$ plochy trojúhelníka, tj. $\vec{F} \cdot \vec{N}_1 = 0$). Proto bude

$$\iint\limits_{\Delta_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint\limits_{\Delta_1} (\vec{F} \cdot \vec{N}_1) \ dS = 0 \ .$$

A podobně to dopadne i pro zbylé trojúhelníky.

Celkově tedy budeme mít, že (při vnější orientaci okraje ∂E) bude

$$\iint\limits_{\partial E} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint\limits_{M} \vec{F} \cdot d\vec{S} + \sum_{i=1}^{3} \underbrace{\iint\limits_{\Delta_i} \vec{F} \cdot d\vec{S}}_{=0} = \iint\limits_{M} \vec{F} \cdot d\vec{S} \ .$$

Teď tedy použijeme Gaussovu větu. Spočítáme si divergenci

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = y + z + x \ .$$

a čtyřstěn E si rozřežeme (kvůli Fubiniově větě) např. jako

$$E: \quad 0 \le x \le 1 \quad \& \quad 0 \le y \le 1 - x \quad \& \quad 0 \le z \le 1 - x - y$$

Máme tedy

$$\iint\limits_{M} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint\limits_{\partial E} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint\limits_{E} \operatorname{div}(\vec{F}) \ dV = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} x + y + z \ dz \ dy \ dx =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} \left[(x+y) + \frac{1}{2}(1-x-y) \right] (1-x-y) \ dy \ dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{1-x} 1 - (x+y)^2 \ dy \ dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[y - \frac{(x+y)^3}{3} \right]_{y=0}^{y=1-x} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2}{3} - x + \frac{x^3}{3} \ dx = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{12} \right) = \frac{1}{8} \ .$$

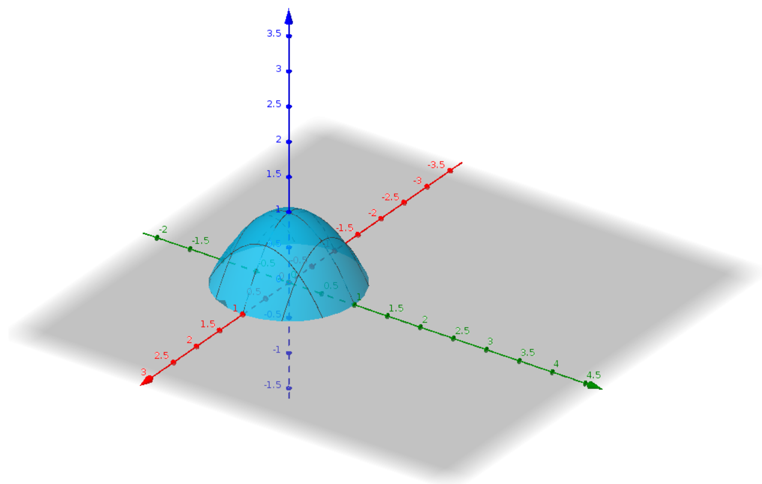
13.5 (Gaussova věta)

Pomocí Gaussovy věty určete

$$\iint\limits_{M} \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

kde $\vec{F}(x, y, z) = (x, \ y, \ z)$ a M je část paraboloidu $z = 1 - x^2 - y^2$ pro $z \ge 0$ s orientací danou vektorovým polem směřujícím vzhůru.

Řešení:



Budeme postupovat podobně jako v příkladu **14.11**. Plocha M spolu s kruhem

$$K: \quad x^2+y^2 \leq 1 \quad \& \quad z=0$$

(jehož orientace je směrem dolů) tvoří hranici ∂E (s vnější orientací) pro těleso

$$E: \quad 0 \leq z \leq 1-(x^2+y^2)\ .$$

Pole na kruhu K má tvar $\vec{F}(x,y,0)=(x,\ y,\ 0)$ a je tedy rovnoběžné z plochou kruhu. Proto je

$$\iint_K \vec{F}\cdot d\vec{S} = 0\ .$$

Tudíž díky Gaussově větě pak budeme mít:

$$\iint_M \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint_M \vec{F}\cdot d\vec{S} + \underbrace{\iint_K \vec{F}\cdot d\vec{S}}_{=0} = \iint_{\partial E} \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iiint_E \underbrace{\operatorname{div}(\vec{F})}_{=1+1+1=3}\ dV = \iiint_E 3\ dV =$$

$$= \begin{bmatrix} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \\ z=h \\ \\ 0\leq\varphi\leq 2\pi \\ 0\leq r\leq 1 \\ 0\leq z\leq 1-r^2 \end{bmatrix} = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{1-r^2} 3r\ dh\ dr\ d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^1 3r(1-r^2)\ dr\ d\varphi =$$

$$= \left(\int_0^1 (r-r^3)\ dr\right)\cdot\left(\int_0^{2\pi} 3\ d\varphi\right) = \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)6\pi = \frac{3}{2}\pi\ .$$

13.6 Určete poloměr konvergence a sečtěte mocninnou řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2^n+(-1)^n)nx^n$$

na vnitřku oboru konvergence.

Řešení:

Poloměr konvergence: Využijeme třeba podílové kritérium:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|(2^{n+1} + (-1)^{n+1})(n+1)\right|}{\left|(2^n + (-1)^n)n\right|} = \lim_{n\to\infty} 2 \cdot \frac{n+1}{n} \frac{\left|1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right|}{\left|1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n}\right|} = 2$$

Poloměr konvergence je tedy $R = \frac{1}{2}$.

Součet: Řadu rozepíšeme pomocí součtu dvou řad. To můžeme udělat na společném oboru konvergence těchto řad. Pro $|x| < \frac{1}{2}$ platí, že

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2^n + (-1)^n) n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} n(2x)^n + \sum_{n=0}^{\infty} n(-x)^n = 2x \sum_{n=0}^{\infty} n(\underbrace{2x}_{y_1})^{n-1} + (-x) \sum_{n=0}^{\infty} n(\underbrace{-x}_{y_2})^{n-1}$$

protože poloměr konvergence řad na pravé straně je postupně $R_1 = \frac{1}{2}$ a $R_2 = 1$. Pro sečtení využijeme toto:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n y^{n-1} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} y^n\right)' = \left(\frac{1}{1-y}\right)' = \frac{1}{(1-y)^2} \ .$$

Takže po dosazeni $y_1 = 2x$ a $y_2 = -x$ dostaneme

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2^n + (-1)^n) n x^n = \frac{2x}{(1-2x)^2} - \frac{x}{(1+x)^2}$$

pro $|x| < \frac{1}{2}$.

(Zjišťování konvergence na krajích nebylo požadováno, ale snadno je vidět, že řada na krajích diverguje).