# 14. cvičení z Matematické analýzy 2

4. - 8. ledna 2021

Pro mocninné řady budeme využívat toho, že na vnitřku oboru konvergence příslušné řady platí:

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1} = \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n (x-x_0)^n\right)'$
- $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} (x-x_0)^n\right)' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{n-1} (x-x_0)^{n-1}$
- $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ pro $|x| < 1$.

**14.1** Určete poloměr konvergence a sečtěte mocninnou řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(2n + \frac{1}{3}\right) x^{2n-1}$$

na vnitřku oboru konvergence.

**Řešení:**

*Poloměr konvergence:* Můžeme využít podílové kritérium pro obecnou řadu (ne nutně mocninnou):

Mějme řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$, kde $\alpha_n \in \mathbb{R}$ a nechť je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|\alpha_{n+1}|}{|\alpha_n|} = q$. Pokud je $0 \le q < 1$, řada konverguje a pokud je $q > 1$, řada diverguje.

V našem případě tedy je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\left(2n+2+\frac{1}{3}\right) x^{2n+1}\right|}{\left|\left(2n+\frac{1}{3}\right) x^{2n-1}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+\frac{7}{3}}{2n+\frac{1}{3}} x^2 = x^2$$

Tedy řada konverguje pro $|x|^2 < 1$ a diverguje pro $|x|^2 > 1$, tudíž poloměr konvergence je nutně $R = 1$.

*Součet:* Pro $0 < |x| < 1$ si řadu rozdělíme na součet řad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(2n + \frac{1}{3}\right) x^{2n-1} = 2x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n (x^2)^{n-1} + \frac{1}{3x} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (x^2)^n.$$

Teď už jen sečteme rady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n y^{n-1}$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y^n$, kde pak dosadíme $y := x^2$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} y^n = \frac{1}{1-y} - 1 = \frac{y}{1-y} \qquad \text{a} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n y^{n-1} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} y^n\right)' = \left(\frac{1}{1-y} - 1\right)' = \frac{1}{(1-y)^2}$$

Takže po dosazení $y := x^2$ dostaneme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(2n + \frac{1}{3}\right) x^{2n-1} = \cdots = 2x \cdot \frac{1}{(1-x^2)^2} + \frac{1}{3x} \cdot \frac{x^2}{1-x^2} = \frac{2x}{(1-x^2)^2} + \frac{x}{3(1-x^2)}$$

pro $|x| < 1$.

(Zjišťování konvergence na krajích nebylo požadováno, ale snadno je vidět, že řada na krajích diverguje).

**14.2** Určete poloměr konvergence a sečtěte mocninnou řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n(n+1)}$$

na vnitřku oboru konvergence.

**Řešení:**

*Poloměr konvergence:* Můžeme využít podílové kritérium pro obecnou radu:

V našem případě tedy je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{x^{2n+3}}{(n+1)(n+2)}\right|}{\left|\frac{x^{2n+1}}{n(n+1)}\right|} = x^2 \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+2} = x^2$$

Tudíž poloměr konvergence je $R = 1$.

*Součet:* Řadu si vyjádříme jako

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n(n+1)} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^2)^{n+1}}{n(n+1)}$$

A opět pro $y = x^2$ sečteme příslušnou řadu. Označme si $g(y) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{y^{n+1}}{n(n+1)}$. Pro $|y| < 1$ platí, že

$$g'(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{y^{n+1}}{n(n+1)}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n} \ .$$

Znovu zderivujeme:

$$g''(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{y^n}{n}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} y^{n-1} = \frac{1}{1-y}$$

a tedy

$$g'(y) = \int \frac{1}{1-y} \ \mathrm{d}y = -\ln(1-y) + C \ .$$

Po dosazení $y = 0$ dostaneme $0 = g'(0) = -\ln(1) + C$, tedy $C = 0$. Dále máme

$$g(y) = \int g'(y) \ \mathrm{d}y = \int -\ln(1-y) \ \mathrm{d}y = \{\text{per partes}\} =$$

$$= (1-y)\ln(1-y) + \int \frac{1-y}{1-y} \ \mathrm{d}y = (1-y)\ln(1-y) + y + D \ .$$

Opět po dosazení $y = 0$ dostaneme

$$0 = g(0) = 1\ln(1) + 0 + D \ ,$$

tedy $D = 0$. Celkově pak součet řady je

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n(n+1)} = \frac{1}{x} \cdot \left((1-x^2)\ln(1-x^2) + x^2\right) =$$

$$= \frac{\ln(1-x^2)}{x} - x\ln(1-x^2) + x$$

kde rovnost platí pro $|x| < 1$, když přitom funkci $\frac{\ln(1-x^2)}{x}$ definujeme v bodě $x = 0$ spojitě.

(Zjišťování konvergence na krajích nebylo požadováno, ale je rychle vidět, že řada na krajích konverguje a tedy rovnost platí i pro body $x = \pm 1$ - ovšem opět je potřeba funkci na pravé straně dodefinovat spojitě v těchto bodech, což lze.)

**14.3** Určete poloměr konvergence a sečtěte mocninnou řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n}(x+1)^n$$

na vnitřku oboru konvergence.

**Řešení:**

Střed řady je $x_0 = -1$.

*Poloměr konvergence:* Využijeme třeba podílové kritérium:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{3^{n+1}+(-2)^{n+1}}{n+1}\right|}{\left|\frac{3^n+(-2)^n}{n}\right|} = \lim_{n\to\infty} 3 \cdot \frac{n}{n+1} \frac{\left|1 + \left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right|}{\left|1 + \left(-\frac{2}{3}\right)^{n}\right|} = 3$$

Poloměr konvergence je tedy $R = \frac{1}{3}$.

*Součet:* Řadu rozepíšeme pomocí součtu dvou řad. To můžeme udělat na společném oboru konvergence těchto řad. Pro $|x+1| < \frac{1}{3}$ platí, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n}(x+1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\big(\overbrace{3(x+1)}^{y_1}\big)^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\big(\overbrace{-2(x+1)}^{y_2}\big)^n}{n}$$

protože poloměr konvergence řad na právě straně je postupně $R_1 = \frac{1}{3}$ a $R_2 = \frac{1}{2}$. Pro sečtení využijeme toto:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{y^n}{n}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} y^{n-1} = \frac{1}{1-y} \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n} = \int \frac{1}{1-y}\mathrm{d}y = -\ln(1-y) + C\ .$$

Pro $y = 0$ dostaneme, že $0 = -\ln(1) + C$, tedy $C = 0$.

Takže po dosazeni $y_1 = 3(x+1)$ a $y_2 = -2(x+1)$ dostaneme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n}(x+1)^n = -\ln\big(1 - 3(x+1)\big) - \ln\big(1 + 2(x+1)\big) =$$

$$= -\ln\big(-2-3x\big) - \ln\big(3+2x\big)$$

pro $|x+1| < \frac{1}{3}$, tj. pro $x \in \left(-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

(Zjišťování konvergence na krajích nebylo požadováno, ale snadno je vidět, že řada na krajích diverguje).

**14.4** Určete poloměr konvergence a sečtěte mocninnou řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2} x^{2n+1}$$

na vnitřku oboru konvergence.

**Řešení:**

*Poloměr konvergence:* Máme

$$a_k = \begin{cases} \frac{n}{2} = \frac{k-1}{4}, & \text{pro } k = 2n+1 \geq 3 \text{ liché}, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

takže nemůžeme přímo použít podílové kritérium. Stačí ale řadu trochu přepsat, tj.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2}\, x^{2n+1} = \frac{x}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n\, (x^2)^n$$

a zjistit poloměr konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} n\, y^n$, která má podle podílového kritéria $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$ poloměr konvergence roven 1, tj. konverguje pro $|y| < 1$ a diverguje pro $|y| > 1$. Pro $y = x^2$ tak dostáváme, že pro $|x^2| < 1$ to konverguje a pro $|x^2| > 1$ to diverguje. Neboli poloměr konvergence původní řady je rovněž $R = 1$. Mohli jsme ovšem také na začátku využít i $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \cdots = 1$.

*Součet:* Využijeme toho, co už máme, tj. pro $|y| < 1$ platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\, y^n = y \sum_{n=1}^{\infty} n\, y^{n-1} = y \left( \sum_{n=1}^{\infty} y^n \right)' = y \left( \frac{1}{1-y} - 1 \right)' = \frac{y}{(1-y)^2} \,.$$

Takže

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2}\, x^{2n+1} = \frac{x}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n\, (x^2)^n = \frac{x \cdot x^2}{2(1-x^2)^2} = \frac{x^3}{2(1-x^2)^2}$$

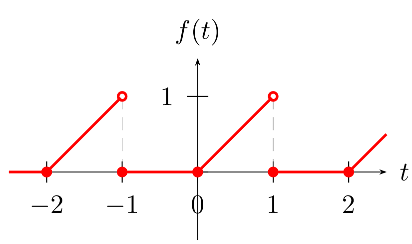
pro $|x| < 1$.

(Zjišťování konvergence na krajích nebylo požadováno, ale snadno je vidět, že řada na krajích diverguje).

**14.5** Nalezněte Fourierovu řadu pro periodické rozšíření funkce

$$f(t) = \begin{cases} t & , \ t \in [0,1), \\ 0 & , \ t \in [1,2). \end{cases}$$

(tj. funkci s periodou $T = 2$) a určete její součet.




**Řešení:**

Pro Fourierovu řadu funkce $f$ máme: $T = 2$, $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$ a $\frac{2}{T} = 1$.

$$a_0 = \tfrac{2}{2}\int_0^2 f(t)\,dt = \int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}$$

$$a_k = \tfrac{2}{2}\int_0^1 t\cos(k\pi t)\,dt = \underbrace{\left[t\cdot\frac{\sin(k\pi t)}{k\pi}\right]_{t=0}^{t=1}}_{=0} - \int_0^1 \frac{\sin(k\pi t)}{k\pi}\,dt = \left[\frac{\cos(k\pi t)}{(k\pi)^2}\right]_{t=0}^{t=1} = \frac{(-1)^k-1}{(k\pi)^2}$$

$$b_k = \tfrac{2}{2}\int_0^1 t\sin(k\pi t)\,dt = -\left[t\cdot\frac{\cos(k\pi t)}{k\pi}\right]_{t=0}^{t=1} + \int_0^1 \frac{\cos(k\pi t)}{k\pi}\,dt = \frac{(-1)^{k+1}}{k\pi} + \underbrace{\left[\frac{\sin(k\pi t)}{(k\pi)^2}\right]_{t=0}^{t=1}}_{=0} = \frac{(-1)^{k+1}}{k\pi}$$

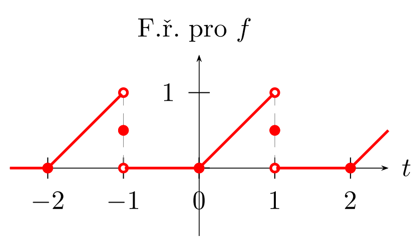
Takže

$$f \sim \tfrac{1}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{(-1)^k-1}{(k\pi)^2}\cos(k\pi t) + \tfrac{(-1)^{k+1}}{k\pi}\sin(k\pi t)$$

a podle Jordanova kritéria je

$$\tfrac{1}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{(-1)^k-1}{(k\pi)^2}\cos(k\pi t) + \tfrac{(-1)^{k+1}}{k\pi}\sin(k\pi t) = \begin{cases} \frac{1}{2} & ,t\in 2\mathbb{Z}+1 \\ f(t) & ,t\in\mathbb{R}\setminus(2\mathbb{Z}+1) \end{cases}.$$

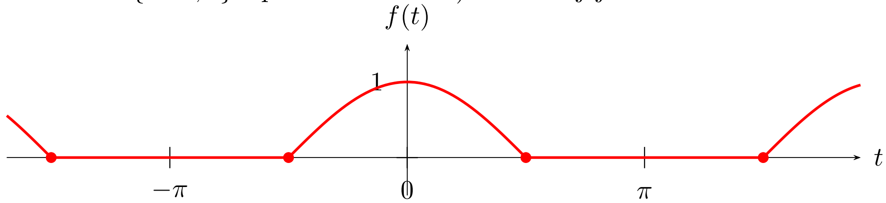
s grafem




**14.6** Nalezněte Fourierovu řadu pro periodické rozšíření funkce

$$f(t) = \begin{cases} \cos t & ,\ t\in\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ 0 & ,\ t\in\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) \end{cases}$$

(neboli funkci $\max\{\cos t, 0\}$ s periodou $T = 2\pi$) a určete její součet.



**Řešení:**

Perioda naší funkce je $T = 2\pi$, frekvence je $\omega = \frac{2\pi}{T} = 1$ a $\frac{2}{T} = \frac{1}{\pi}$. Funkce $f$ je sudá. Proto $b_k = 0$ pro $k = 1, 2, \ldots$ a dále ze sudosti $f$ máme pro zbyle koeficienty Fourierovy řady funkce $f$, ze:

$$a_0 = 2 \cdot \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\pi} f(t)\, dt = 2 \cdot \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\pi/2} \cos t\, dt = \frac{2}{\pi} \Big[ \sin t \Big]_{t=0}^{t=\pi/2} = \frac{2}{\pi}.$$

$$a_k = 2 \cdot \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\pi} f(t) \cos(kt)\, dt = 2 \cdot \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\pi/2} \cos t \cos(kt)\, dt = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\pi/2} \Big( \cos(k+1)t + \cos(k-1)t \Big)\, dt =$$

$$= \{\text{dále platí pro } k \geq 2\} = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\sin(k+1)t}{k+1} + \frac{\sin(k-1)t}{k-1} \right]_{t=0}^{t=\pi/2} =$$

$$= \begin{cases} 0 & , k \text{ liché} \\ \frac{1}{\pi} \left( \frac{(-1)^n}{2n+1} + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \right) = -\frac{2(-1)^n}{\pi(4n^2-1)} & , k = 2n,\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

protože

$$\sin\Big( (2n+1)\tfrac{\pi}{2} \Big) = (-1)^n \text{ pro } n \in \mathbb{Z}\ .$$

Pro $k = 1$ máme

$$a_1 = \cdots = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\pi/2} \Big( \cos 2t + 1 \Big)\, dt = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\sin 2t}{2} + t \right]_{t=0}^{t=\pi/2} = \frac{1}{2}\ .$$

Takže dostáváme

$$f \sim \tfrac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \Big[ a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt) \Big] =$$

$$= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \cos t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1} \cos 2nt$$

($a_k = 0$ pro lichá $k$ a pro sudá jsme to přepsali pomocí $k = 2n$)

Periodické rozšíření funkce $f$ je všude spojité a podle Jordanova kritéria konverguje všude k původní funkci, tj.

$$f(t) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \cos t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1} \cos 2nt$$

pro všechna $t \in \mathbb{R}$.

**Poznámka:** Použili jsme vzorce

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$
$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

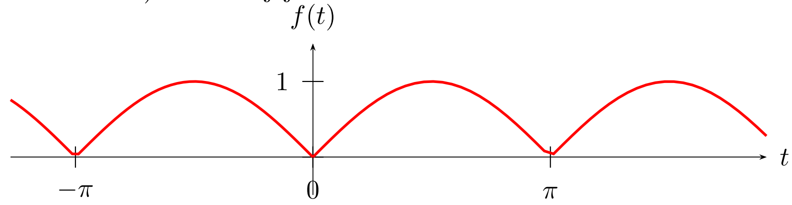
a tedy

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} \Big( \cos(x+y) + \cos(x-y) \Big)\ .$$

**14.7** Nalezněte Fourierovu řadu pro periodické rozšíření funkce

$$f(t) = \sin t, \qquad t \in [0, \pi)$$

(tj. s periodou $T = \pi$) a určete její součet.




**Řešení:**

Perioda naší funkce je $T = \pi$, frekvence je $\omega = \frac{2\pi}{\pi} = 2$ a $\frac{2}{T} = \frac{2}{\pi}$. Funkce $f$ je sudá, tedy $b_k = 0$ pro $k \in \mathbb{N}$. Spočítáme zbylé koeficienty Fourierovy řady funkce $f$, kde opět využijeme sudosti a periodičnosti funkcí $f(t)\cos(k\omega t)$ pro $k = 0, 1, \dots$ :

$$a_0 = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin t \, dt = \frac{4}{\pi} \Big[ -\cos t \Big]_{t=0}^{t=\pi/2} = \frac{4}{\pi}.$$

$$a_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos(k\omega t) \, dt = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin t \cos(2kt) \, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \big( \sin(2k+1)t - \sin(2k-1)t \big) \, dt =$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[ -\frac{\cos(2k+1)t}{2k+1} + \frac{\cos(2k-1)t}{2k-1} \right]_{t=0}^{t=\pi/2} = \frac{2}{\pi} \left( \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k-1} \right) =$$

$$= \frac{-4}{\pi(4k^2-1)} \quad \text{pro } k \geq 1.$$

**Poznámka:** Použili jsme vzorce

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$
$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

a tedy

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2} \Big( \sin(x+y) + \sin(x-y) \Big) \; .$$

Takže dostáváme

$$f \sim \tfrac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \big[ a_k \cos(2kt) + b_k \sin(2kt) \big] =$$

$$= \frac{2}{\pi} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(4k^2-1)} \cos 2kt \; .$$

Periodické rozšíření funkce $f$ je všude spojité a podle Jordanova kritéria konverguje všude k původní funkci, tj.

$$\sin t = \frac{2}{\pi} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(4k^2-1)} \cos 2kt$$

pro všechna $t \in \langle 0, \pi \rangle$.

Pro náš příklad z Parsevalovy rovnosti dostáváme, že

$$\frac{8}{\pi^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{16}{\pi^2(4k^2-1)^2} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^2 t \, dt = 1$$

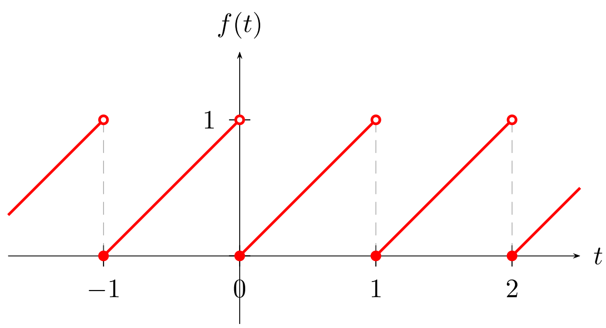
a tedy máme takovouto rovnost

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k^2-1)^2} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2} \, .$$

**14.8** Nalezněte Fourierovu řadu pro periodické rozšíření funkce

$$f(t) = t, \qquad t \in [0, 1)$$

(tj. s periodou $T = 1$) a určete její součet.

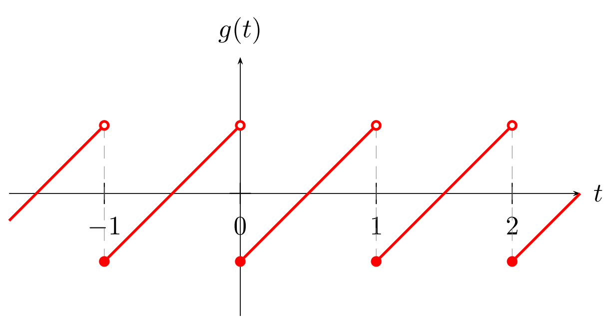



**Řešení:**
Pro Fourierovu řadu funkce $f$ máme: $T = 1$, $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi$ a $\frac{2}{T} = 2$. Funkce není ani sudá ani lichá, ale vhodným posunutím získáme funkci $g$, která (téměř) lichá je (alespoň z hlediska integrálu), a sice:

$$g(t) := f(t) - \frac{1}{2}$$

s periodou $T = 1$, která na intervalu $\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ má předpis

$$g(t) = \begin{cases} t - \frac{1}{2} & , \ t \in \langle 0, \frac{1}{2}), \\ t + \frac{1}{2} & , \ t \in \langle -\frac{1}{2}, 0). \end{cases}$$



Najdeme teď Fourierovu řadu pro funkci $g$ (s periodou $T=1$ a frekvenci $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi$). Z lichosti $g$ dostáváme $a_i = 0$ pro $i = 0, 1, \ldots$ a pro zbylé koeficienty máme

$$b_k = \tfrac{4}{T} \int\limits_0^{T/2} g(t)\sin(k\omega t)\,dt = 4\int\limits_0^{1/2} (t-\tfrac{1}{2})\sin(2k\pi t)\,dt = -4\left[(t-\tfrac{1}{2})\tfrac{\cos(2k\pi t)}{2k\pi}\right]_{t=0}^{t=1/2} + 4\int\limits_0^{1/2} \tfrac{\cos(2k\pi t)}{2k\pi}\,dt =$$

$$= -\tfrac{1}{k\pi} + 4\underbrace{\left[\tfrac{\sin(2k\pi t)}{(2k\pi)^2}\right]_{t=0}^{t=1/2}}_{=0} = -\tfrac{1}{k\pi}$$

pro $k \in \mathbb{N}$.

Takže

$$f - \tfrac{1}{2} = g \sim -\sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{1}{k\pi}\sin(2k\pi t)$$

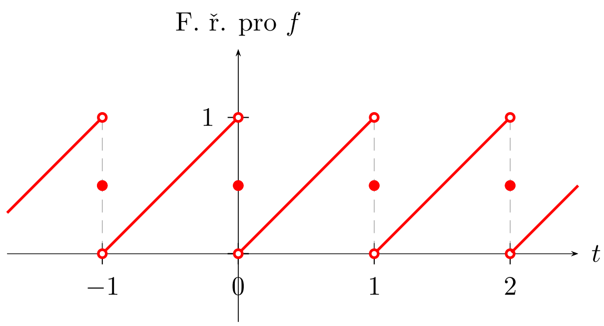
a podle Jordanova kritéria je

$$-\sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{1}{k\pi}\sin(2k\pi t) = \begin{cases} 0 & , t \in \mathbb{Z} \\ g(t) & , t \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}\ . \end{cases}$$

Úpravou pak získáme:

$$f \sim \tfrac{1}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{1}{k\pi}\sin(2k\pi t) = \begin{cases} \tfrac{1}{2} & , t \in \mathbb{Z} \\ f(t) & , t \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}\ . \end{cases}$$

kde součet Fourierovy řady pro $f$ má graf




To, že jsme takto získali skutečně Fourierovu řadu pro $f$, plyne z její jednoznačnosti (nebo snadno z linearity výpočtu koeficientů).