2. cvičení z Matematické analýzy 2

22. února 2021

Motivace:

Pojem *otevřené* množiny intuitivně zavádíme jako množinu, která s každým bodem obsahuje ještě dost prostoru kolem něj (je to kvůli pozdějšímu použití pro derivování - potřebujeme se k bodu přiblížit "odkudkoliv").

Pojmem *uzavřené* množiny zase intuitivně myslíme takovou množinu, ze které nemůžeme vypadnout při "limitách posloupností," tj. taková množina obsahuje všechny body, ke kterým se můžeme z této množiny přiblížit libovolně blízko.

Kupodivu, tyto dva pojmy jsou nakonec navzájem doplňkové (viz níže).

Definice:

Okolím $U_\varepsilon(a_0)$ (tzv. otevřenou koulí) s poloměrem $\varepsilon > 0$ a středem v bodě $a_0 \in \mathbb{R}^n$ označujeme množinu

$$U_\varepsilon(a_0) \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in \mathbb{R}^n \mid ||a - a_0|| < \varepsilon\}$$

kde $||a - a_0||$ je *eukleidovská vzdálenost* bodů a a a_0, tj. pro

$$a_0 = (x_1, \ldots, x_n)$$

a

$$a = (y_1, \ldots, y_n)$$

je

$$||a - a_0|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}\ .$$

Připomeňme si, že pro množinu $A \subseteq \mathbb{R}^n$ si

- *vnitřek A°* množiny A definujeme jako množinu všech bodů $a \in A$, které jsou v A i s nějakým okolím:

$$a \in A^\circ \stackrel{\text{def}}{\iff} (\exists\ \varepsilon > 0)\ \ U_\varepsilon(a) \subseteq A$$

- *hranice ∂A* množiny A je množina všech bodů $a \in \mathbb{R}^n$, jejichž libovolná okolí zasahují jak do samotné množiny A, tak do jejího doplňku $\mathbb{R}^n \setminus A$:

$$a \in \partial A \stackrel{\text{def}}{\iff} (\forall\ \varepsilon > 0)\ \ U_\varepsilon(a) \cap A \neq \emptyset \ \ \wedge \ \ U_\varepsilon(a) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \neq \emptyset$$

- *uzávěr $\overline{A}$* množiny A si definujeme jako množinu

$$\overline{A} \stackrel{\text{def}}{=} A \cup \partial A$$

  neboli (jak se dá snadno ověřit) jako množinu všech bodů $a \in \mathbb{R}^n$, jejichž libovolná okolí zasahují do množiny A:

$$a \in \overline{A} \iff (\forall\ \varepsilon > 0)\ \ U_\varepsilon(a) \cap A \neq \emptyset$$

Kromě toho ještě platí, že

$$\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ$$

a tedy

$$\overline{A} = A^\circ \ \dot\cup\ \partial A$$

kde "$\cup$" znamená disjunktní sjednocení. Pro libovolnou množinu A se dále celý prostor $\mathbb{R}^n$ vždy disjunktně rozloží na vnitřek A°, hranici ∂A a *vnějšek* $(\mathbb{R}^n \setminus A)^\circ$:

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{A^\circ}_{\text{vnitřek}} \cup \underbrace{\partial A}_{\text{hranice}} \cup \underbrace{(\mathbb{R}^n \setminus A)^\circ}_{\text{vnějšek}}$$

A nakonec si ještě (teď už skutečně) definujme, že

- množina A je *otevřená* $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $A = A^\circ$ (tj. A je rovna svému vnitřku)
- množina A je *uzavřená* $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $A = \overline{A}$ (tj. A je rovna svému uzávěru).

A platí, že

$$A \text{ je otevřená} \iff \mathbb{R}^n \setminus A \text{ je uzavřená}$$

(tj. otevřenost a uzavřenost jsou vzájemně doplňkové pojmy).

Poznámka: Při zdůvodnění toho, že nějaká množina je otevřená, případně uzavřená, se dá využít následující věta:

Jestliže $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce (tento pojem bude sice definován později, ale např. polynom určitě spojitá funkce bude), pak

- množina $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid f(x_1, \dots, x_n) > 0\}$ je otevřená,
- množina $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid f(x_1, \dots, x_n) \geq 0\}$ je uzavřená.

2.1 Určete vnitřek, hranici a uzávěr definičních oborů následujících funkcí:

(a) $f(x, y) = \sqrt{\frac{x^2 - x + y^2}{2x - x^2 - y^2}}$,

(b) $f(x, y) = \ln\left(x \ln(y - x)\right)$;

Řešení:
Tento příklad je určený pro "intuitivní" řešení pomocí náčrtů daných množin. Nechť $M := D(f)$ je definiční obor funkce f.

(a) Výraz pod odmocninou musí být nezáporný a čitatel nesmí být nulový.

$$M: \ (x^2 - x + y^2 \geq 0 \ \wedge \ 2x - x^2 - y^2 > 0) \ \vee \ (x^2 - x + y^2 \leq 0 \ \wedge \ 2x - x^2 - y^2 < 0)$$

Zadání lze upravit na přehlednější tvar. Doplněním na čtverec, tedy použitím vzorce $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ např. pro

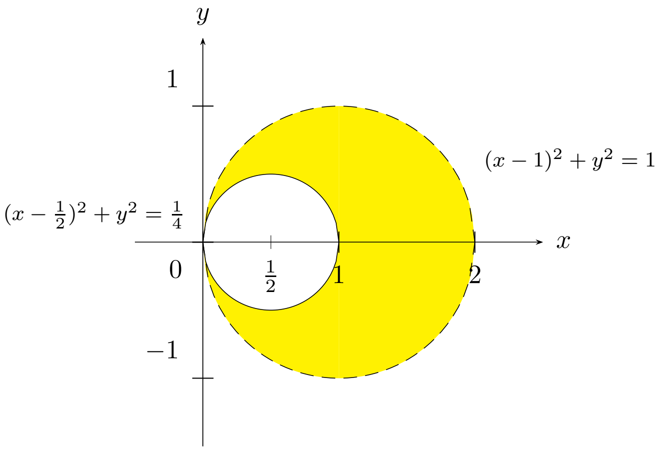
$$x^2 - x = \left(x^2 - 2 \cdot x \cdot \tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{2})^2\right) - (\tfrac{1}{2})^2 = (x - \tfrac{1}{2})^2 - (\tfrac{1}{2})^2$$

můžeme nerovnosti vyjádřit jako

$$M: \ \left((x - \tfrac{1}{2})^2 + y^2 \geq \tfrac{1}{4} \ \wedge \ (x - 1)^2 + y^2 < 1\right) \ \vee \ \left((x - \tfrac{1}{2})^2 + y^2 \leq \tfrac{1}{4} \ \wedge \ (x - 1)^2 + y^2 > 1\right)$$

což představuje oblasti vně a uvnitř kružnic. Z toho je vidět, že druhá závorka představuje prázdnou množinu, tedy celkem je

$$M: \ \left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 + y^2 \geq \tfrac{1}{4} \ \wedge \ (x - 1)^2 + y^2 < 1$$



- (***vnitřek***) M° : $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2>\frac{1}{4}\ \wedge\ (x-1)^2+y^2<1.$
- (***uzávěr***) $\overline{M}$: $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2\geq\frac{1}{4}\ \wedge\ (x-1)^2+y^2\leq 1.$
- (***hranice***) $\partial M=\overline{M}\setminus M^\circ$: $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}\ \vee\ (x-1)^2+y^2=1$
  (POZOR: je tu jiná logická spojka!)

(b) Argument v každém z logaritmu musí být kladný.

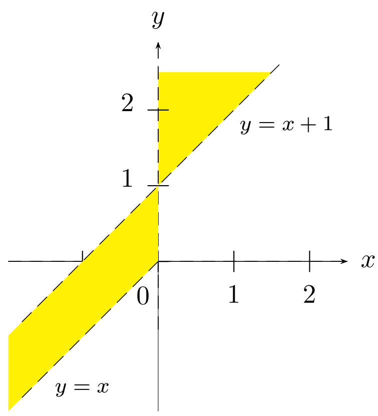
$$M:\ y-x>0\wedge\Big(\big(x>0\ \wedge\ \ln(y-x)>0\big)\ \vee\ \big(x<0\ \wedge\ \ln(y-x)<0\big)\Big)$$

tedy

$$M:\ (x>0\ \wedge\ y-x>1)\ \vee\ (x<0\ \wedge\ 0<y-x<1)$$

neboli

$$M:\ (x>0\ \wedge\ x+1<y)\ \vee\ (x<0\ \wedge\ x<y<x+1)\ .$$



- (***vnitřek***): Množina M je zadána ostrými nerovnostmi, je tedy otevřená a proto $M^\circ=M$.

- (***uzávěr***) $\overline{M}$: $(x \geq 0 \ \wedge \ y - x \geq 1) \ \vee \ (x \leq 0 \ \wedge \ 0 \leq y - x \leq 1)$
- (***hranice***) ∂M : $y = x + 1 \ \vee \ (y = x \ \wedge \ x \leq 0) \ \vee \ (x = 0 \ \wedge \ y \geq 0)$
  (Hranice jsou části přímek.)

2.2 Načrtněte následující množinu a určete její vnitřek, hranici a uzávěr:

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 2x - y^2 > 0 \ \wedge \ x^2 - 4x + y^2 \leq 0\} \ .$$

Řešení:
Tento příklad je určený pro "intuitivní" řešení pomocí náčrtů daných množin.

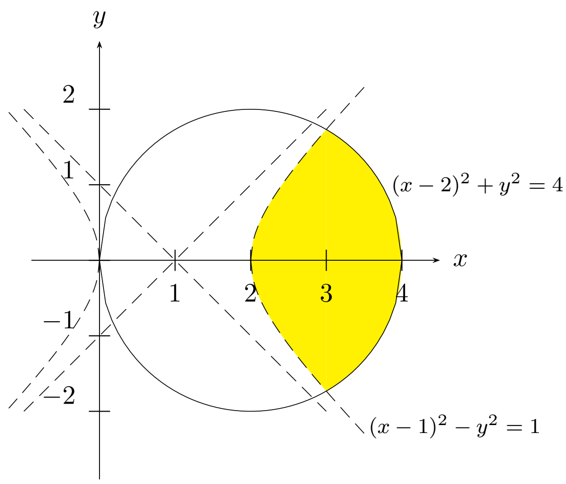
I zde použijeme doplnění na čtverec. První nerovnost vyjadřuje dvě oblasti ostře vymezené hyperbolou

$$(x - 1)^2 - y^2 > 1$$

která má střed v bodě $(1, 0)$. Druhá nerovnost je opět kružnice s okrajem o poloměru 2 a středem v bodě $(2, 0)$

$$(x - 2)^2 + y^2 \leq 4 \ .$$

Množina M má tvar podobný "čočce".



- (***vnitřek***) M° : $(x - 1)^2 - y^2 > 1 \ \wedge \ (x - 2)^2 + y^2 < 4$.
- (***uzávěr***): Musíme si dát pozor na zápis, protože bod $(0, 0)$ v uzávěru naší množiny M není, ačkoliv je průnikem hyperboly a kružnice.
$$\overline{M} : \ (x - 1)^2 - y^2 \geq 1 \ \wedge \ (x - 2)^2 + y^2 \leq 4 \ \wedge \ (x, y) \neq (0, 0) \ .$$
- (***hranice***): Hranice je jeden oblouk kružnice a jeden oblouk hyperboly. Opět si musíme dát pozor na zápis, protože bod $(0, 0)$ na hranici naší množiny M není.
$$\partial M : \Big((x - 1)^2 - y^2 = 1 \ \wedge \ (x - 2)^2 + y^2 \leq 4 \ \wedge \ (x, y) \neq (0, 0)\Big) \ \vee$$
$$\vee \ \Big((x - 1)^2 - y^2 \geq 1 \ \wedge \ (x - 2)^2 + y^2 = 4 \ \wedge \ (x, y) \neq (0, 0)\Big)$$

Poznámka: Můžeme si všimnout, že vnitřek (uzávěr, resp.) jsme v předchozích příkladech často získali tak, že jsme z neostrých nerovnosti udělali ostré (z ostrých neostré, resp.). Ale POZOR, takhle to obecně nefunguje, jak ukázal příklad **2.2** a jak je také vidět z následujícího příkladu:

Lze zvolit spojitou funkci $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tak, aby pro

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) > 0\}$$

a

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) \geq 0\}$$

bylo

$$\overline{A} \subsetneqq B \quad \text{a} \quad A \subsetneqq B^\circ$$

(neboli: po přidání neostré nerovnosti je uzávěr obecně MENŠÍ a po ubrání neostré nerovnosti je vnitřek obecně VĚTŠÍ.)

Taková funkce je např.

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2, & x < 0, \\ 0, & x \in \langle 0, 1 \rangle, \\ -(x-1)^2, & x > 1 \ . \end{cases}$$

kde je pak $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0\}$ a $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 1\}$.

Problém vzniká proto, že zatímco vrstevnice

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = c\}$$

pro hladiny $c \neq 0$ jsou křivky (objekty s dimenzí 1), tak pro $c = 0$ je vrstevnice plocha (objekt s dimenzí 2).

2.3 Určete vnitřek, hranici, vnějšek a uzávěr množiny $\mathbb{Q}^2 \subseteq \mathbb{R}^2$, kde $\mathbb{Q}$ je množina všech racionálních čísel.

Řešení:
Uvědomíme si, že v libovolném okolí (na reálné přímce) libovolného $r \in \mathbb{R}$ leží jak nějaké racionální číslo, tak také nějaké iracionální číslo. Dále pokud máme $|r_i - s_i| < \frac{\varepsilon}{2}$ pro $i = 1, 2$ (kde $r_i, s_i \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$) pak

$$||(r_1, r_2) - (s_1, s_2)|| = \sqrt{(r_1 - s_2)^2 + (r_2 - s_2)^2} \leq \sqrt{\left(\tfrac{\varepsilon}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{\varepsilon}{2}\right)^2} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} < \varepsilon \ .$$

Jestliže si nyní vezmeme libovolný bod $a = (r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2$ a zvolíme $\varepsilon > 0$, pak

- existují racionální čísla $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ tak, že $|r_i - q_i| < \frac{\varepsilon}{2}$
- a také iracionální čísla $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tak, že $|r_i - \alpha_i| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Speciálně tedy v libovolném ε-okolí $U_\varepsilon(a)$ bodu $a \in \mathbb{R}^2$ leží jak nějaký prvek z $(q_1, q_2) \in \mathbb{Q}^2$, tak nějaký prvek $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$. Proto můžeme ihned napsat, že

$$\overline{\mathbb{Q}^2} = \mathbb{R}^2, \quad (\mathbb{Q}^2)^\circ = \emptyset \quad \text{a} \quad \partial\mathbb{Q}^2 = \overline{\mathbb{Q}^2} \setminus (\mathbb{Q}^2)^\circ = \mathbb{R}^2 \setminus \emptyset = \mathbb{R}^2.$$

2.4 Najděte příklady neprázdných množin M v $\mathbb{R}^2$, že

(a) M nemá žádný vnitřní ani vnější bod (= vnitřní bod doplňku množiny M),

(b) M nemá žádný hraniční bod,

(c) M nemá žádný vnější bod a je uzavřená.

Řešení:

(a) Např. $M = \mathbb{Q}^2$ (jak je vidět z postupu v příkladu **2.4**, tak ani $\mathbb{Q}^2$ ani $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$ nemají vnitřní body).

(b) Žádný hraniční bod nemá určitě celá rovina, tj. $M = \mathbb{R}^2$ (protože její doplněk je prázdný).

Dokonce je to jediná taková množina: Nechť M nemá hraniční bod, tj. $\partial M = \emptyset$. Pak

$$M \subseteq \overline{M} = M^\circ \cup \underbrace{\partial M}_{=\emptyset} = M^\circ \subseteq M$$

tedy dostáváme, že $M = \overline{M}$ a $M = M^\circ$. Množina M je tak současně otevřená a uzavřená. Dá se ukázat (s trochou práce), že jediná taková neprázdná množina v $\mathbb{R}^2$ je jen $M = \mathbb{R}^2$. Je to důsledek tzv. *souvislosti* prostoru $\mathbb{R}^2$.

(c) Opět můžeme zvolit $M = \mathbb{R}^2$.

Opět je to jediná takováto množina, což zjistíme takto: Použijeme rozklad $\mathbb{R}^2$ pomocí M, pro kterou předpokládáme $(\mathbb{R}^2 \setminus M)^\circ = \emptyset$ a $M = \overline{M}$:

$$\mathbb{R}^2 = \underbrace{M^\circ \ \dot\cup\ \partial M}_{=\overline{M}} \ \dot\cup\ \underbrace{(\mathbb{R}^n \setminus M)^\circ}_{=\emptyset} = \overline{M} = M$$

tedy $M = \mathbb{R}^2$.

Připomenutí:

Jestliže chceme zjišťovat, jak se chová funkce v okolí nějakého bodu ve smyslu limity, pak se k tomuto bodu potřebujeme přiblížit pomocí bodu z definičního oboru dané funkce. Přitom však tyto body chceme mít jiné, než je samotný původní bod, ve kterém limitu zjišťujeme. To vede k následujícím pojmům:

- *Prstencovým okolím $P_\varepsilon(a_0)$* s poloměrem $\varepsilon > 0$ a středem v bodě $a_0 \in \mathbb{R}^n$ označujeme množinu

$$P_\varepsilon(a_0) \stackrel{\text{def}}{=} U_\varepsilon(a_0) \setminus \{a_0\} = \{a \in \mathbb{R}^n \mid 0 < ||a - a_0|| < \varepsilon\}$$

- bod a_0 je *hromadným bodem množiny M*, jestliže v každém svém okolí má nějaký bod této množiny, ale jiný než a_0, tj.:

$$(\forall\ \varepsilon > 0) \quad P_\varepsilon(a) \cap M \neq \emptyset$$

  (hromadný bod je tedy určitě bodem uzávěru množiny M, ale není "osamocený").

Limita funkce je nyní definována takto:

Nechť $f : D \to \mathbb{R}$ je funkce s definičním oborem $D \subseteq \mathbb{R}^n$ a $a_0 \in \mathbb{R}^n$ je hromadný bod tohoto definičního oboru D. Následující definice a značení znamená, že hodnota $c \in \mathbb{R}$ je limitou funkce f v bodě a_0:

$$\lim_{a \to a_0} f(a) = c \ \stackrel{\text{def}}{\iff}\ (\forall\ \varepsilon > 0)(\exists\ \delta > 0)(\forall a \in D) \quad \underbrace{0 < \|a - a_0\| < \delta}_{a \in P_\delta(a_0)} \ \Rightarrow\ \underbrace{|f(a) - c| < \varepsilon}_{f(a) \in U_\varepsilon(c)}$$

(tj. když jsme v dostatečně malém prstencovém okolí $P_\delta(a_0)$ bodu a_0, pak se body odsud zobrazují funkcí f do zvoleného malého okolí $U_\varepsilon(c)$ hodnoty c.)

2.5 Vyšetřete existenci limity $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)^2}{x-y}$.

Řešení:

Definiční obor funkce $f(x, y) = \frac{(x+y)^2}{x-y}$ je

$$D(f) : \quad x \neq y\ .$$

Bod $(0,0)$ je zřejmě hromadný bod množiny $D(f)$. Abychom zjistili, jakou hodnotu $c \in \mathbb{R}$ by případná limita měla mít, vyzkoušíme se přiblížit k bodu $a_0 = (0,0)$ po vhodné křivce. Nejjednodušší jsou obvykle přímky. Vezměme si tedy přímku $y = kx$, kde $k \neq 1$. Pro $x \to 0$ máme $(x, kx) \to (0,0)$. Takže nás bude zajímat

$$\lim_{x\to 0} f(x, kx) = \lim_{x\to 0} \frac{(x+kx)^2}{x-kx} = \lim_{x\to 0} \frac{(1+k)^2}{1-k} x = 0 \ .$$

Pokud naše původní limita existuje musí mít tedy hodnotu $c = 0$ (to, že jsme prověřili přímky a dostali stejnou hodnotu, ale ještě NIC o existenci limity NEŘÍKÁ! K tomu bychom museli stejnou hodnotu dostat také pro VŠECHNY možné další křivky, po kterých se můžeme dostat do bodu a_0).

Můžeme se pokusit najít jiná přiblížení (viz níže) anebo můžeme využít jednoduché kritérium pro neexistenci (konečné) limity (viz Poznámky k limitám):

- $f(x,y) = \frac{h(x,y)}{g(x,y)}$, kde $h(x,y) = (x+y)^2$ a $g(x,y) = x - y$ jsou spojité funkce
- položme $M: \ x = y \ \wedge \ (x,y) \neq (0,0)$
- pro každé $a \in M$ je $g(a) = 0$ a $h(a) \neq 0$
- $a_0 = (0,0)$ je hromadný bod množiny M

Pak NEEXISTUJE (konečná) limita $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

(Vzhledem k už nalezené limitě 0 při nějakém přiblížení z toho vyplývá, že ani případná "nekonečná" limita nemůže existovat.)

Zjistili jsme tedy, že $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)^2}{x-y}$ neexistuje.

Poznámka: Jestliže chceme najít přiblížení, pro které vyjde jiná hodnota než 0, můžeme v tomto případě zkusit "variaci konstanty k" a vzít křivku ve tvaru $y(x) = k(x) \cdot x$, kde $k(x)$ je zatím neznámá funkce a kdy chceme, aby pro $x \to 0$ bylo také $y(x) \to 0$. Křivku dosadíme do funkce:

$$f\big(x, y(x)\big) = \frac{\big(x + k(x)\cdot x\big)^2}{x - k(x)\cdot x} = \frac{\big(1+k(x)\big)^2}{1-k(x)} \cdot x$$

Nyní bude stačit, když se např. $\frac{x}{1-k(x)}$ bude blížit k nenulové hodnotě $d \in \mathbb{R}$ a současně i $\big(1+k(x)\big)^2$ se bude blížit ke konečné nenulové hodnotě.

Stačí položit $\frac{x}{1-k(x)} = d$, tj. $k(x) = 1 - \frac{x}{d}$. Musíme ještě ověřit, že v tomto případě je křivka

$$y(x) = k(x)\cdot x = \Big(1 - \frac{x}{d}\Big)\, x$$

stále v definičním oboru $D(f)$ (což by stačilo i jen pro x blízká k 0). To je ale ihned vidět. Dále také zřejmě je $y(x) \to 0$ pro $x \to 0$.

A nakonec vidíme, že

$$f\big(x, y(x)\big) = \cdots = \frac{\big(1+k(x)\big)^2}{1-k(x)} \cdot x = d\Big(2 - \frac{x}{d}\Big)^2 \ \overset{x\to 0}{\longrightarrow} \ 4d$$

což je kýžený výsledek.

Současně si všimněme, že k bodu $(0,0)$ se blížíme v tomto případě po parabole $y(x) = x - \frac{x^2}{d}$ jejíž tečna v bodě $(0,0)$ je právě přímka $y = x$, kterou jsme vyloučili z definičního oboru $D(f)$. Toto je v jistém smyslu i návod pro jiné příklady - hledejme křivky "napodobující" hranici definičního oboru v daném bodě.