3. cvičení z Matematické analýzy 2

1. března 2021

3.1 Zjistěte, zda existují následující limity a pokud ano, určete jejich hodnotu:

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y}{y^2+x}$,

(b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{x^2y^2}$.

Řešení:

(a) Definiční obor funkce $f(x,y) = \frac{x^2+y}{y^2+x}$ je

$$D(f): \quad x \neq -y^2 \ .$$

Bod $(0,0)$ je zřejmě hromadný bod množiny $D(f)$. Z tvaru funkce f už snadno vidíme, že na parabole $x = -y^2$ se jmenovatel zlomku vynuluje a čitatel ne (až na bod $(0,0)$). Takže můžeme použít jednoduché kritérium pro neexistenci (konečné) limity (viz Poznámky k limitám):

- $f(x,y) = \frac{h(x,y)}{g(x,y)}$, kde $h(x,y) = x^2+y$ a $g(x,y) = y^2+x$ jsou spojité funkce
- položme $M: \ x = -y^2 \ \wedge \ (x,y) \neq (0,0)$
- pro každé $a \in M$ je $g(a) = 0$ a $h(a) \neq 0$
- $a_0 = (0,0)$ je hromadný bod množiny M

Pak NEEXISTUJE (konečná) limita $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Pro pořádek si ještě spočítejme alespoň jedno přiblížení, abychom věděli, že ani případná "nekonečná" limita nemůže existovat:

Vyzkoušíme se přiblížit k bodu $a_0 = (0,0)$ po přímce $y = kx$, kde $k \in \mathbb{R}$. Pro $x \to 0$ máme $(x,kx) \to (0,0)$. Takže nás zajímá

$$\lim_{x\to 0} f(x,kx) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+kx}{k^2x^2+x} = \lim_{x\to 0} \frac{x+k}{k^2x+1} = k \ .$$

I z tohoto výsledku už vidíme, že limita závisí na přiblížení. Takže i toto nám ukazuje, že limita $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y}{y^2+x}$ prostě neexistuje.

- -

(b) Pro funkci $f(x,y) = (x^2+y^2)^{x^2y^2} = e^{x^2y^2 \ln(x^2+y^2)}$ je její definiční obor

$$D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

Stačí tedy zjistit $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x^2y^2 \ln(x^2+y^2)$. Zkusíme si přiblížení, např. po ose x (tj. při $y = 0$):

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

Tedy jediný kandidát na limitu je $c = 0$. Ze zkušenosti s limitami můžeme už tušit, že limita bude existovat. Použijeme odhad:

$$|x|, |y| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$$

a z něj máme

$$0 \leq \left| x^2 y^2 \ln(x^2 + y^2) \right| \leq (x^2 + y^2)^2 \cdot \left| \ln(x^2 + y^2) \right|.$$

Použitím věty o limitě složené funkce pro předpoklady

- $g(x, y) = x^2 + y^2$ a $h(z) = z^2 \ln z$
- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x, y) = 0 \ (= b_0)$
- $\lim\limits_{z\to(b_0)_+} h(z) = \lim\limits_{z\to 0_+} z^2 \ln z = 0 \quad \overset{\text{L'Hospital}}{\Longleftarrow} \quad \lim\limits_{z\to 0_+} \frac{(\ln z)'}{(z^{-2})'} = \lim\limits_{z\to 0_+} \frac{z^{-1}}{-2z^{-3}} = \lim\limits_{z\to 0_+} \frac{z^2}{-2} = 0$
- v prstencovém okolí bodu $(0, 0)$ je $g(x, y) \neq b_0$

dostáváme

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2 + y^2)^2 \ln(x^2 + y^2) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} h(g(x, y)) = 0.$$

Z věty o limitě sevřené funkce pak máme

$$0 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 \quad \leq \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| x^2 y^2 \ln(x^2 + y^2) \right| \quad \leq \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| (x^2 + y^2)^2 \cdot \ln(x^2 + y^2) \right| \ = 0$$

tedy

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2 y^2 \ln(x^2 + y^2) = 0$$

a konečně pak

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2 + y^2)^{x^2 y^2} = e^0 = 1.$$

Ještě pomocí polárních souřadnic: Můžeme opět použít odhad pomocí polárních souřadnic (ale ani zde nedostaneme nic nového): body (x, y) v okolí $a_0 = (0, 0)$ vyjádříme jako

$$x = \varrho \cos \varphi \quad \text{a} \quad y = \varrho \sin \varphi$$

a dosadíme:

$$0 \leq \left| x^2 y^2 \ln(x^2 + y^2) \right| = \varrho^4 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \ln(\varrho^2) \leq \varrho^4 \ln(\varrho^2) =: g(\varrho)$$

A protože $\lim\limits_{\varrho\to 0_+} g(\varrho) = \lim\limits_{\varrho\to 0_+} 2\varrho^4 \ln \varrho = 0$ (viz výše) vyplývá z toho (viz Poznámky k limitám), že

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2 y^2 \ln(x^2 + y^2) = 0 \ .$$

A zbytek by byl stejný.

3.2 Zjistěte, zda existují následující limity a pokud ano, určete jejich hodnotu:

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^3}$,

(b) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} ((x - 1)^2 + y) \sin\left(\frac{1}{x}\right) \sin\left(\frac{x - y}{y^2}\right)$.

Řešení:

(a) Definiční obor funkce $f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^2+y^3}$ je

$$D(f):\quad y^3\neq -x^2\ .$$

Bod $(0,0)$ je zřejmě hromadný bod množiny $D(f)$. Z tvaru funkce f snadno vidíme, že na křivce $y=-\sqrt[3]{x^2}$ se jmenovatel zlomku vynuluje a čitatel ne (až na bod $(0,0)$). Takže můžeme použít jednoduché kritérium pro neexistenci (konečné) limity (viz Poznámky k limitám):

- $f(x,y)=\frac{h(x,y)}{g(x,y)}$, kde $h(x,y)=x^2y^2$ a $g(x,y)=x^2+y^3$ jsou spojité funkce
- položme $M:\ \ y=-\sqrt[3]{x^2}\ \wedge\ (x,y)\neq(0,0)$
- pro každé $a\in M$ je $g(a)=0$ a $h(a)\neq 0$
- $a_0=(0,0)$ je hromadný bod množiny M

Pak NEEXISTUJE (konečná) limita $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Pro pořádek si ještě spočítejme alespoň jedno přiblížení, abychom věděli, že ani případná "nekonečná" limita nemůže existovat:

Vyzkoušíme se přiblížit k bodu $a_0=(0,0)$ po přímce $y=kx$, kde $k\in\mathbb{R}$. Pro $x\to 0$ máme $(x,kx)\to(0,0)$. Takže dostaneme

$$\lim_{x\to 0} f(x,kx)=\lim_{x\to 0}\frac{k^2x^4}{x^2+k^3x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{k^2x^2}{1+k^3x}=0\ .$$

Proto ani "nekonečná" limita neexistuje.

Celkově máme, že $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{x^2+y^3}$ neexistuje.

- -

(b) Definiční obor funkce $f(x,y)=((x-1)^2+y)\sin\left(\frac{1}{x}\right)\sin\left(\frac{x-y}{y^2}\right)$ je

$$D(f):\quad x\neq 0\quad\wedge\quad y\neq 0.$$

Máme zde případ, kdy omezená funkce je násobena funkcí, která má limitu nula. Stačí tedy použít odhad pro $(x,y)\in D(f)$:

$$0\le\left|f(x,y)\right|=|(x-1)^2+y|\cdot\underbrace{\left|\sin\left(\tfrac{1}{x}\right)\right|}_{\le 1}\cdot\underbrace{\left|\sin\left(\tfrac{x-y}{y^2}\right)\right|}_{\le 1}\le|(x-1)^2+y|$$

Z věty o limitě sevřené funkce pak máme, že

$$0=\lim_{(x,y)\to(1,0)} 0\ \le\ \lim_{(x,y)\to(1,0)}\left|f(x,y)\right|\ \le\ \lim_{(x,y)\to(1,0)}|(x-1)^2+y|\ =0$$

kde jsme použili to, že funkce $g(x,y)=|(x-1)^2+y|$ je spojitá, protože je to složení spojitých funkcí (abs. hodnota, polynom).

Nebo-li dokázali jsme, že $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0.$

3.3 Je možné najít hodnotu $c \in \mathbb{R}$ tak, aby funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{|x|^3+|y|^3}, & \text{pro } (x,y) \neq (0,0), \\ c, & \text{pro } (x,y) = (0,0) \ . \end{cases}$$

byla spojitá v bodě $a_0 = (0,0)$?

Řešení:
Podle zadání hledáme $c \in \mathbb{R}$ tak, aby

$$c = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{|x|^3+|y|^3} \ .$$

Nejdříve najdeme, jakou c musí mít hodnotu. Pokud limita existuje, pak musí být nabyta např. při přiblížení k bodu $(0,0)$ po ose x (tj. při $y=0$):

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

Tedy jediný kandidát je $c = 0$. Teď ukážeme, že to skutečně limita je. K tomu se používají obvykle odhady. Hlavní trik v tomto případě je odhadnout jmenovatel výrazem, který se zkrátí s čitatelem. V čitateli je polynom stupně $2+2=4$, ve jmenovateli je "v podstatě"také polynom a to stupně 3. Oba jsou nulové v počátku, takže můžeme očekávat, že vršek převáží spodek.

Využijeme tento odhad:

$$|x|^3, |y|^3 \leq |x|^3 + |y|^3 \quad \Rightarrow \quad |x|, |y| \leq \sqrt[3]{|x|^3+|y|^3}$$

Pro $(x,y) \neq (0,0)$ tak dostaneme

$$0 \leq \big|f(x,y) - \underbrace{c}_{0}\big| = \frac{|x|^2 \cdot |y|^2}{|x|^3+|y|^3} \leq \frac{\left(\sqrt[3]{|x|^3+|y|^3}\right)^{2+2}}{|x|^3+|y|^3} = \left(|x|^3+|y|^3\right)^{\frac{4}{3}-1} = \sqrt[3]{|x|^3+|y|^3}$$

Z věty o limitě sevřené funkce pak máme, že

$$0 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 \ \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \big|f(x,y) - c\big| \ \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt[3]{|x|^3+|y|^3} \ = 0$$

kde jsme použili to, že funkce $g(x,y) = \sqrt[3]{|x|^3+|y|^3}$ je spojitá, protože je to složení spojitých funkcí (polynom, absolutní hodnota, odmocnina).

Nebo-li dokázali jsme, že $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = c = 0$.

- -

Ještě pomocí polárních souřadnic: Můžeme ještě použít odhad pomocí polárních souřadnic (který ale vlastně nepřináší v tomto případě nic nového): body (x,y) v okolí $a_0 = (0,0)$ vyjádříme jako

$$x = \varrho\cos\varphi \quad \text{a} \quad y = \varrho\sin\varphi$$

a dosadíme:

$$0 \leq \big|f(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi) - \underbrace{c}_{=0}\big| = \frac{|\varrho\sin\varphi|^2 \cdot |\varrho\cos\varphi|^2}{|\varrho\sin\varphi|^3 + |\varrho\cos\varphi|^3} = \varrho \cdot \frac{|\sin\varphi|^2 \cdot |\cos\varphi|^2}{|\sin\varphi|^3 + |\cos\varphi|^3} \leq \frac{\varrho}{|\sin\varphi|^3 + |\cos\varphi|^3}$$

Zde jsme použili odhad $|\sin\varphi| \leq 1$ a $|\cos\varphi| \leq 1$. Protože chceme dostat odhad nezávislý na φ, musíme ještě odhadnout *zespodu* jmenovatel posledního výrazu. To lze udělat díky tomu, že funkce $h(\varphi) := |\sin\varphi|^3 + |\cos\varphi|^3$ je *kladná a spojitá na omezeném a uzavřeném intervalu* $\langle 0, 2\pi\rangle$. Musí tedy existovat $\varepsilon_0 > 0$, že $h(\varphi) \geq \varepsilon_0$ pro všechna $\varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle$. Proto můžeme dále použít odhad

$$0 \leq \left|f(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi) - c\right| = \cdots \leq \frac{\varrho}{|\sin\varphi|^3 + |\cos\varphi|^3} \leq \frac{\varrho}{\varepsilon_0} =: g(\varrho)$$

Nyní, protože $\lim\limits_{\varrho\to 0_+} g(\varrho) = 0$ vyplývá z toho (viz Poznámky k limitám), že $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = c = 0$.

- -

Ještě si můžeme procvičit definici limity: Podle definice limity má tedy platit, že

$$\forall\,\varepsilon > 0 \;\; \exists\,\delta > 0 \;\; \forall\, a \in D(f) \quad 0 < \|a - a_0\| < \delta \;\Rightarrow\; |f(a) - c| < \varepsilon\ .$$

Pro $a_0 = (0,0)$ a $a = (x,y)$ je $\|a - a_0\| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Využijeme odhad, co už máme

$$\left|f(x,y) - c\right| \leq \cdots \leq \sqrt[3]{|x|^3 + |y|^3}$$

a rádi bychom dostali odhad, který bude využívat hodnotu $\|a - a_0\|$. Toho lze snadno dosáhnout pomocí dalšího odhadu

$$|x|, |y| \leq \|a - a_0\| \qquad \Rightarrow \qquad \sqrt[3]{|x|^3 + |y|^3} \leq \sqrt[3]{\|a - a_0\|^3 + \|a - a_0\|^3} = \sqrt[3]{2} \cdot \|a - a_0\|$$

Tudíž máme

$$\left|f(x,y) - c\right| \leq \cdots \leq \sqrt[3]{|x|^3 + |y|^3} \leq \sqrt[3]{2} \cdot \|a - a_0\|$$

pro $\varepsilon > 0$ teď stačí vzít $\delta := \frac{\varepsilon}{\sqrt[3]{2}}$ a pro a takové, že $0 < \|a - a_0\| < \delta$ tudíž máme

$$|f(a) - c| \leq \cdots \leq \sqrt[3]{2} \cdot \|a - a_0\| < \sqrt[3]{2} \cdot \delta = \varepsilon\ .$$

Nebo-li dokázali jsme z definice, že $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

Připomenutí:

Nechť f je funkce z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$ a nechť a_0 je vnitřní bod jejího definičního oboru. *Derivace podle vektoru* $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$ funkce f v bodě a_0 je definována jako následující (konečná) hodnota

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{h}}(a_0) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(a_0 + t\vec{h})|_{t=0} = \lim_{t\to 0} \frac{f(a_0 + t\vec{h}) - f(a_0)}{t}$$

Neboli: Definiční obor $D(f)$ "projíždíme" po přímce $\varphi(t) = a_0 + t\vec{h}$, kde t představuje čas a $\vec{h}$ tím pádem vektor rychlosti pohybu po dané přímce. A ptáme se, jak se rychle se přitom budou měnit hodnoty funkce f při průchodu bodem a_0. Je zřejmé, že čím větší bude rychlost průchodu $\vec{h}$, tím rychlejší budou i změny hodnot funkce f.

Speciálně definujeme tzv. *parciální derivaci podle i-té proměnné* (dejme tomu, že se bude jmenovat x_i) jako

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_0) := \frac{\partial f}{\partial \vec{e}_i}(a_0)$$

kde $\vec{e}_i = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{i-\text{tá pozice}}, 0, \ldots, 0)$ je vektor standardní báze.

Konkrétně pro funkci $f : D \to \mathbb{R}$, kde $D \subseteq \mathbb{R}^2$ a vnitřní bod $a_0 = (x_0, y_0)$ definičního oboru $D(f) = D$ je

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x, y_0)_{|x=x_0}$$

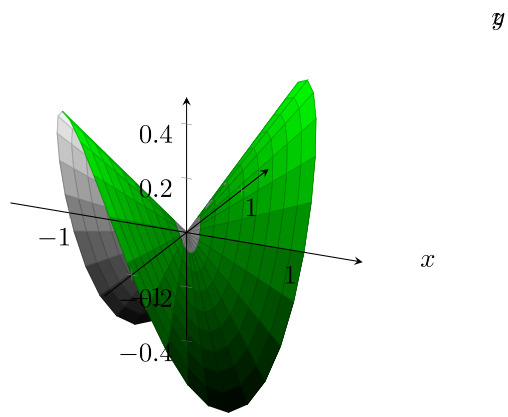
tedy funkci f stačí "obyčejně"derivovat podle proměnné x, kde druhou proměnnou y bereme na chvíli jako konstantu.

3.4 Najděte parciální derivaci $\frac{\partial f}{\partial x}$ funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{pro } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{pro } (x,y) = (0,0)\ . \end{cases}$$

ve všech bodech $a = (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Je funkce $\frac{\partial f}{\partial x}$ spojitá v bodě $a_0 = (0,0)$?

Řešení:
Graf funkce f:



V bodech $a = (x, y) \neq (0, 0)$ je předpis funkce f v nějakém okolí $U_\varepsilon(a)$ ve tvaru $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Můžeme tak standardně použít postupy o derivování funkcí:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)(a) = \frac{y\sqrt{x^2+y^2} - xy\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-1/2}2x}{(\sqrt{x^2+y^2})^2} =$$

$$= \frac{y(x^2+y^2) - yx^2}{(\sqrt{x^2+y^2})^3} = \frac{y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

Pro bod $a = (0, 0)$, který nemá v žádném svém okolí “jednotný” předpis funkce f, musíme použít (explicitní) definici:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \to 0} 0 = 0 \ .$$

Celkem jsme tedy dostali, že

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \frac{y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}, & \text{pro } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{pro } (x, y) = (0, 0) \ . \end{cases}$$

a podíváme se, jestli je tato funkce spojitá v bodě $(0, 0)$. Když si vezmeme např. přiblížení po ose y (tj. $x = 0$) dostaneme, že

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = \frac{y^3}{(y^2)^{3/2}} = \begin{cases} 1, & \text{pro } y > 0, \\ -1, & \text{pro } y < 0 \ . \end{cases}$$

Tedy nejenže $\lim\limits_{y \to 0} \frac{\partial f}{\partial x}(0, y)$ není rovna 0 (což je hodnota $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$), ale dokonce tato limita vůbec neexistuje. Tedy ani limita

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$$

neexistuje a funkce $\frac{\partial f}{\partial x}$ není spojitá v bodě $(0, 0)$.

Na druhou stranu, jak je snadno vidět díky předpisu a spojitosti funkcí, v bodech $a = (x, y) \neq (0, 0)$ funkce $\frac{\partial f}{\partial x}$ spojitá je.

Důležitá poznámka: Hodnotu $\frac{\partial f}{\partial x}(a_0)$ nelze obecně počítat jako $\lim\limits_{a\to a_0} \frac{\partial f}{\partial x}(a)$! Často ale ano, a to ovšem právě tehdy, jestliže funkce $\frac{\partial f}{\partial x}$ je spojitá v bodě a_0.

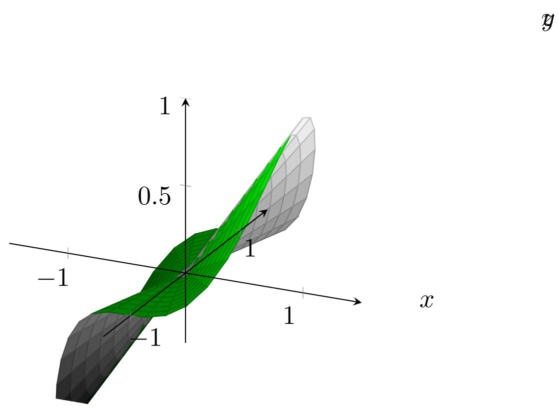
3.5 Najděte parciální derivaci $\frac{\partial f}{\partial x}$ funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & , \ (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & , \ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

ve všech bodech $a = (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Je funkce $\frac{\partial f}{\partial x}$ spojitá v bodě $a_0 = (0,0)$?

Řešení:

Graf funkce f:



V bodech $a = (x,y) \neq (0,0)$ je předpis funkce f v nějakém okolí $U_\varepsilon(a)$ ve tvaru $f(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2}$. Můžeme tak standardně použít postupy o derivování funkcí:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^3}{x^2+y^2}\right)(a) = \frac{3x^2(x^2+y^2) - 2x \cdot x^3}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

Pro bod $a = (0,0)$, který nemá v žádném svém okolí "jednotný" předpis funkce f, musíme použít (explicitní) definici:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t^3}{t^2+0} - 0}{t} = 1 \ .$$

Celkem jsme tedy dostali, že

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2}, & \text{pro } (x,y) \neq (0,0), \\ 1, & \text{pro } (x,y) = (0,0) \ . \end{cases}$$

a podíváme se, jestli je tato funkce spojitá v bodě $(0,0)$. Když si vezmeme např. přiblížení po ose y (tj. $x = 0$) dostaneme, že

$$\lim_{y\to 0} \frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \lim_{y\to 0} 0 = 0 \ .$$

Tedy limita

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$

nemůže být rovna 1, což je hodnota $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, a tedy funkce $\frac{\partial f}{\partial x}$ *není spojitá v bodě* $(0,0)$.

Na druhou stranu, jak je snadno vidět díky předpisu a spojitosti funkcí, v bodech $a = (x,y) \neq (0,0)$ funkce $\frac{\partial f}{\partial x}$ spojitá je.

3.6 Pro následující funkce f najděte parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}$ a $\frac{\partial f}{\partial y}$ a obory jejich existence:

(a) $f(x,y) = \sqrt{y^2+x} \cdot \sin \frac{y}{x}$,

(b) $f(x,y) = (xy)^{\sqrt{x^2+y^2}}$

Řešení:

(a) Definiční obor je $D(f) : y^2 + x \geq 0 \ \wedge \ x \neq 0$. Jeho vnitřek (tj. množina, kde se můžeme ptát na parciální derivace) je otevřená množina $D(f)^\circ : y^2 + x > 0 \ \wedge \ x \neq 0$. Ve všech bodech vnitřku můžeme použít pravidla o derivování součinu funkcí, složené funkce atd. Parciální derivace jsou

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{y^2+x} \cdot \sin \frac{y}{x}\right) = \frac{x}{2\sqrt{y^2+x}} \cdot \sin \frac{y}{x} + \sqrt{y^2+x} \cdot \left(\cos \frac{y}{x}\right) \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{y^2+x} \cdot \sin \frac{y}{x}\right) = \frac{y}{\sqrt{y^2+x}} \cdot \sin \frac{y}{x} + \sqrt{y^2+x} \cdot \left(\cos \frac{y}{x}\right) \cdot \frac{1}{x}$$

Obě parciální derivace evidentně existují na $D(f)^\circ$.

(b) Definiční obor $D(f) : xy \geq 0 \ \wedge \ (x,y) \neq (0,0)$. Jeho vnitřek (tj. množina, kde se můžeme ptát na parciální derivace) je otevřená množina $D(f)^\circ : xy > 0$. Ve všech bodech vnitřku můžeme použít pravidla o derivování součinu funkcí, složené funkce atd. Parciální derivace jsou

Funkci si pro $(x,y) \in D(f)^\circ$ vhodně přepíšeme jako $f(x,y) = (xy)^{\sqrt{x^2+y^2}} = e^{\ln(xy)\sqrt{x^2+y^2}}$. Protože funkce je symetrická v proměnných x a y, stačí spočítat jen jednu z derivaci a druhou pak příslušně přepsat:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{\ln(xy)\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \left[\frac{1}{x}\sqrt{x^2+y^2} + \ln(xy)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right] = e^{\ln(xy)\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{y^2 + x^2(1+\ln(xy))}{x\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{\ln(xy)\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{x^2 + y^2(1+\ln(xy))}{y\sqrt{x^2+y^2}}$$

Obě parciální derivace opět existují na $D(f)$.

Připomenutí: *Derivace (totální diferenciál)* funkce f z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$ ve vnitřním bodě $a_0 \in D(f)$ definičního oboru $D(f) \subseteq \mathbb{R}^n$ je takové lineární zobrazení (označené jako $df(a_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$), které je nejlepší aproximací funkce f v bodě a_0 v tomto smyslu:

Rozdíl hodnot funkcí $f(a)$ a

$$g(a) := f(a_0) + df(a_0)[a - a_0]$$

klesá v okolí bodu a_0 rychleji než $\|a - a_0\|$, tj.

$$\lim_{a\to a_0} \frac{f(a)-g(a)}{\|a-a_0\|} = \lim_{a\to a_0} \frac{f(a)-f(a_0)-df(a_0)[a-a_0]}{\|a-a_0\|} = 0\,.$$

Funkce g se nazývá *linearizací* funkce f v bodě a_0.

Poznámka:

- Pokud existuje derivace $df(a_0)$, pak také existují derivace $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a_0)$ podle vektoru pro každý vektor $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ a platí, že
$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a_0) = df(a_0)[\vec{u}] \ .$$
Speciálně, existují pak všechny parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a_0)$ a matice zobrazeni $df(a_0)$ ve standardní bázi má tvar
$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_0) \ , \dots , \ \frac{\partial f}{\partial x_n}(a_0) \right) \ .$$
(Pro jednoduchost zápisu, budeme ztotožňovat zobrazení a jeho matici ve standardní bázi.)

POZOR: Pouhá existence parciálních derivací ještě nezaručuje existenci (úplné) derivace! Ta je mnohem komplikovanější objekt. Máme ale tuto postačující podmínku:

- Nechť všechny parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ existují a *jsou spojité* na otevřené množině $G \subseteq \mathbb{R}^n$. Pak derivace $df(a)$ existuje v každém bodě $a \in G$.

Definice tečné roviny:
Tečnou rovinu ke grafu funkce f v bodě definujeme jako graf linearizace funkce f v tomto bodě, tj. jako graf funkce $g(a) = f(a_0) + df(a_0)[a - a_0]$. Tečna rovina má tedy předpis
$$z = f(a_0) + df(a_0)[a - a_0]$$
Pro případ dvou proměnných a bodů $a_0 = (x_0, y_0)$ má tečná rovina rovnici
$$z = f(a_0) + \tfrac{\partial f}{\partial x}(a_0) \cdot (x - x_0) + \tfrac{\partial f}{\partial y}(a_0) \cdot (y - y_0) \ .$$

Definice: Nechť existuje $df(a_0)$. *Gradient funkce* f v bode a_0 je takový vektor $\mathrm{grad} f(a_0) \in \mathbb{R}^n$, že pro každé $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$ je
$$df(a_0)[\vec{h}] = \mathrm{grad} f(a_0) \cdot \vec{h}$$
(kde $\cdot$ je standardní skalární součin). Tedy ve standardní bázi máme
$$\mathrm{grad} f(a_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$
a proto gradient i derivaci budeme ztotožňovat.

- -

3.7 Pro funkci $f(x, y) = xy + \sin(x - y)$ v bodě $a_0 = (2, 2)$ určete derivaci, tečnou rovinu a přímku, která je k ní kolmá a prochází bodem $B = (0, -1, 3)$.
Ve kterém ze směrů $\vec{u}_1 = (0, 1)$ a $\vec{u}_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ má funkce větší růst?

Řešení:
Parciální derivace jsou
$$\frac{\partial f}{\partial x} = y + \cos(x - y)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = y - \cos(x - y) \ .$$
Z jejich spojitosti v okolí bodu $a_0 = (x_0, y_0) = (2, 2)$ (spojité jsou dokonce všude na $\mathbb{R}^2$) vidíme, že derivace $df(a_0)$ skutečně existuje. Máme tedy
$$\left(\tfrac{\partial f}{\partial x}(a_0), \tfrac{\partial f}{\partial y}(a_0) \right) = \Big(y + \cos(x - y), \ x - \cos(x - y) \Big)(a_0) = (3, 1)$$
a tudíž
$$df(a_0)[\vec{h}] = \left(\tfrac{\partial f}{\partial x}(a_0), \tfrac{\partial f}{\partial y}(a_0) \right) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = (3, 1) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 3h_1 + h_2 \ .$$

Tečná rovina má rovnici:

$$z = f(a_0) + df(a_0)[a - a_0] = f(a_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(a_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(a_0) \cdot (y - y_0) =$$

$$= 4 + 3(x - 2) + y - 2$$

neboli

$$3x + y - z = 4$$

Vektor kolmý k tečné rovině má tedy vždy tvar $\vec{n} = (\frac{\partial f}{\partial x}(a_0), \frac{\partial f}{\partial x}(a_0), -1) = (3, 1, -1)$. Rovnice hledané přímky pak je

$$p : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Oba vektory $\vec{u}_1$ a $\vec{u}_2$ jsou skutečně směry (tj. $\|\vec{u}_1\| = 1 = \|\vec{u}_2\|$), takže z hlediska růstu funkce stačí spočítat derivace v těchto směrech (kdyby vektory měly obecně různou délku, pak bychom je měli nejdříve znormovat a pak teprve počítat derivaci ve směru). Máme

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}_1}(a_0) = df(a_0)[\vec{u}_1] = (3,\ 1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

a

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}_2}(a_0) = df(a_0)[\vec{u}_2] = (3,\ 1) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \sqrt{2}$$

takže větší růst je v $\vec{u}_2$.

Poznámka: Nechť pro funkci $f(x, y)$ existuje grad$f(a_0) \in \mathbb{R}^3$ v bodě $a_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Pak vektor $\vec{U} \in \mathbb{R}^3$ leží ve vektorovém prostoru příslušnému tečné rovině v bodě a_0 právě když je

$$(\mathrm{grad} f(a_0), -1) \cdot \vec{U} = 0\ ,$$

kde $(\mathrm{grad} f(a_0), -1) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a_0), \frac{\partial f}{\partial y}(a_0), -1\right)$

Je to proto, ze rovnice tečné roviny má tvar $z = f(a_0) + \mathrm{grad} f(a_0)[a - a_0]$ neboli

$$(\mathrm{grad} f(a_0), -1) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - f(a_0) \end{pmatrix} = 0\ .$$

Neboli $(\mathrm{grad} f(a_0), -1)$ je normálový vektor tečné roviny (a jejího přidruženého vektorového prostoru).

Nechť je nyní $\vec{U} = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$. Nechť $\vec{u} = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ představuje vektor z jeho prvních dvou souřadnic (neboli $\vec{u}$ je projekce $\vec{U}$ do základny). Pak $\vec{U}$ leží v tečné rovině právě když

$$0 = (\mathrm{grad} f(a_0), -1) \cdot \vec{U} = \alpha \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(a_0) + \beta \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(a_0) + \gamma \cdot (-1) = df(a_0)[\vec{u}] - \gamma = \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a_0) - \gamma$$

neboli když

$$\gamma = \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a_0), \quad \text{pro } \ \vec{u} = (\alpha, \beta)$$

tudíž vektor $\vec{U}$ je prostě tvaru

$$\vec{U} = \left(\vec{u}, \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a_0)\right)\ .$$

Současně si všimněme, že úhel $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$, který svírá vektor $\vec{U} = (\alpha, \beta, \gamma) = \left(\vec{u}, \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a_0)\right)$ se základnou je dán jako

$$\mathrm{tg}(\varphi) = \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = \frac{1}{\|\vec{u}\|} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a_0) = \frac{df(a_0)[\vec{u}]}{\|\vec{u}\|}\ .$$

3.8 Pro funkci $f(x, y) = \mathrm{arctg}(xy^2)$ v bodě $a_0 = (1, 1)$ určete totální diferenciál, tečnou rovinu a derivaci ve směru $\vec{u} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Určete vektory $\vec{U}_1 = (0, 1, ?)$ a $\vec{U}_2 = (2, 1, ?)$ tak, aby ležely ve vektorovém prostoru odpovídajícímu tečné rovině. Který z vektoru ukazuje směrem většího stoupání v tečné rovině?

Řešení:
Budeme postupovat podobně jako v příkladu **3.7**. Pro jednoduchost zápisu, budeme ztotožňovat zobrazení $df(a)$ a jeho matici ve standardní bázi.

Pro $a_0 = (1, 1)$ tedy máme

$$df(a_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a_0), \frac{\partial f}{\partial y}(a_0)\right) = \left(\frac{y^2}{1+xy^2}, \frac{2xy}{1+xy^2}\right)(a_0) = \left(\tfrac{1}{2}, 1\right) \ .$$

Existence $f'(a_0)$ plyne ze spojitosti parciálních derivací v obecném bodě - viz řádek výše.

Tečná rovina je graf linearizace funkce f v daném bodě $a_0 = (x_0, y_0)$. Má tedy rovnici:

$$z = f(a_0) + df(a_0)[a - a_0]$$

neboli

$$z = f(a_0) + \left(\tfrac{\partial f}{\partial x}(a_0), \tfrac{\partial f}{\partial y}(a_0)\right)\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} = \tfrac{\pi}{4} + \left(\tfrac{1}{2},\ 1\right)\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} = \tfrac{\pi}{4} + \tfrac{1}{2}(x-1) + y - 1$$

což se dá přepsat také jako

$$\tfrac{1}{2}x + y - z = \tfrac{3}{2} - \tfrac{\pi}{4} \ .$$

Derivace ve směru $\vec{u}$ je

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a_0) = df(a_0)[\vec{u}] = \left(\tfrac{1}{2},\ 1\right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \tfrac{3\sqrt{2}}{2}.$$

A nakonec, podle poznámky výše, potřebujeme zjistit derivace podle vektorů $\vec{u}_1 = (0, 1)$ a $\vec{u}_2 = (2, 1)$:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}_1}(a_0) = df(a_0)[\vec{u}_1] = (1,\ 2) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2$$

a

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}_2}(a_0) = df(a_0)[\vec{u}_2] = (1,\ 2) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 4$$

Všimněme si, že každý z vektorů $\vec{u}_1$ a $\vec{u}_2$ má jinou délku.

Jde tedy o vektory $\vec{U}_1 = (0, 1, 2)$ a $\vec{U}_2 = (2, 1, 4)$, které svírají se základnou postupně úhly φ_1 a φ_2 takové, že

$$\operatorname{tg}(\varphi_1) = \frac{1}{\|\vec{u}_1\|} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{u}_1}(a_0) = \frac{2}{1} = 2$$

$$\operatorname{tg}(\varphi_2) = \frac{1}{\|\vec{u}_2\|} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{u}_2}(a_0) = \frac{4}{\sqrt{5}}\ (< 2)$$

takže větší stoupání v tečné rovině ukazuje vektor v $\vec{U}_1$.