4. cvičení z Matematické analýzy 2

8. března 2021

Věta: Nechť U je otevřená množina v $\mathbb{R}^3$, $\Phi : U \to \mathbb{R}$ je spojitě diferencovatelná na G. Označme

$$M = \{a \in U \mid \Phi(a) = 0\}$$

což je zřejmě vrstevnice funkce Φ.

Jestliže pro každé $a \in M$ platí, že $\mathrm{grad}\Phi(a) \neq \vec{0}$, pak M implicitně definovaná (regulární) plocha. Tečná rovina k M v bodě $a_0 = (x_0, y_0, z_0) \in M$ má rovnici

$$\mathrm{grad}\Phi(a_0) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = 0.$$

Poznámka: Každý graf spojitě diferencovatelné funkce $f : G \to \mathbb{R}$, kde $G \subseteq \mathbb{R}^2$ je otevřená v $\mathbb{R}^2$, můžeme přirozeně chápat jako implicitně definovanou (regulární) plochu pomocí funkce $\Phi : G \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\Phi(x, y, z) := f(x, y) - z$$

protože

$$GRAF\ (f) = \{(x, y, z) \in G \times \mathbb{R} \mid\ z = f(x, y)\ \} = \{(x, y, z) \in G \times \mathbb{R} \mid\ \Phi(x, y, z) = 0\ \}$$

Současně vidíme, že normálový vektor tečné roviny ke grafu funkce f v bodě $A_0 = \big(a_0, f(a_0)\big)$ pro $a_0 \in G$ je

$$\mathrm{grad}\Phi(A_0) = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}(A_0), \frac{\partial \Phi}{\partial y}(A_0), \frac{\partial \Phi}{\partial z}(A_0)\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a_0), \frac{\partial f}{\partial y}(a_0), -1\right) \neq \vec{0}$$

tedy je nenulový.

4.1 (úhly grafů funkcí)

Nalezněte úhel, který svírají

(a) graf funkce $f(x, y) = \ln(\sqrt{x^2 + y^2})$ a plocha $M : (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 2$ v bodě $(1, 0, ?)$.

(b) graf funkce $f(x, y) = e^{\sin xy}$ a plocha $M : (x-1)^2 + \frac{y^2}{2} + (z-3)^2 = 7$ v bodě $(0, 2, ?)$.

Řešení:
Úhel, který svírají implicitně dané plochy M_1 a M_2, je dán jako úhel mezi jednotlivými tečnými rovinami a ten je zase určen jejich normálovými vektory n_1 a n_2, tj. gradienty funkcí Φ_1 a Φ_2. Z možných dvou (navzájem doplňkových) úhlů mezi tečnými rovinami si volíme ten menší. Tento úhel $\alpha \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ má tedy nezáporný kosinus a je tudíž jednoznačně určen jako

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{||\vec{n}_1|| \cdot ||\vec{n}_2||}\ .$$

(a) Třetí souřadnice bodu $A = (1, 0, ?)$, který je na grafu funkce f, je dána hodnotou $f(1, 0) = \ln(1) = 0$. Tedy jde o bod $A = (1, 0, 0)$. Je dobře ještě ověřit, že takto určený bod skutečně leží v M.

Graf funkce f si zadejme implicitně pomocí funkce

$$\Phi_1(x, y, z) = f(x, y) - z = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) - z\ .$$

Plocha M je zadaná implicitně funkcí

$$\Phi_2(x, y, z) = (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 - 2\ .$$

Normálové vektory tečných rovin v $A = (1, 0, 0)$ jsou

$$\vec{n}_1 = \mathrm{grad}\ \Phi_1(A) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2},\ \frac{y}{x^2 + y^2},\ -1\right)_{|A} = (1, 0, -1)$$

$$\vec{n}_2 = \text{grad } \Phi_2(A) = \Big(2(x-1),\ 2(y+1),\ 2(z+1)\Big)_{|A} = (0,2,2)$$

Úhel $\alpha \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ je dán jako $\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{||\vec{n}_1|| \cdot ||\vec{n}_2||} = \frac{2}{\sqrt{2}\sqrt{8}} = \frac{1}{2}$, tedy $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

(b) Třetí souřadnice bodu $A = (0,2,?)$, který je na grafu funkce f, je dána hodnotou $f(0,2) = e^{\sin 0} = 1$. Tedy jde o bod $A = (0,2,1)$. Je dobré ještě ověřit, že takto určený bod skutečně leží v M.

Graf funkce f si zadejme implicitně pomocí funkce

$$\Phi_1(x,y,z) = e^{\sin(xy)} - z\ .$$

Plocha M je zadána implicitně funkcí

$$\Phi_2(x,y,z) = (x-1)^2 + \frac{y^2}{2} + (z-3)^2 - 7\ .$$

Normálové vektory tečných rovin v $A = (0,2,1)$ jsou

$$\vec{n}_1 = \text{grad } \Phi_1(A) = \Big(y\cos(xy)e^{\sin(xy)},\ x\cos(xy)e^{\sin(xy)},\ -1\Big)_{|A} = (2,0,-1)$$

$$\vec{n}_2 = \text{grad } \Phi_2(A) = \Big(2(x-1),\ y,\ 2(z-3)\Big)_{|A} = (-2,2,-4)$$

Úhel $\alpha \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ je dán jako $\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{||\vec{n}_1|| \cdot ||\vec{n}_2||} = 0$, tedy $\alpha = \frac{\pi}{2}$ a plochy jsou vzájemně kolmé.

4.2 Najděte rovnici tečné roviny k elipsoidu $M:\ x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$, která je rovnoběžná s rovinou $\varrho:\ 4x + 2y + z = 3$.

Řešení:
Použijeme větu o tečné rovině k implicitně definované ploše v $\mathbb{R}^3$.

Elipsoid $M = \{a \in U \mid \Phi(a) = 0\}$ je implicitně zadán pomocí funkce $\Phi(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + z^2 - 1$ a množiny $U = \mathbb{R}^3$. Zřejmě $\text{grad}\Phi(a) = (2x, 4y, 2z)$.

Ověříme si, že v každém bodě $a_0 = (x_0, y_0, z_0) \in M$ je skutečně $\text{grad}\Phi(a_0) \neq \vec{0}$ (tj. že v každém bodě M máme k dispozici normálový vektor tečné roviny $\text{grad}\Phi(a_0)$):

Dokážeme to nepřímo: zřejmě $\text{grad}\Phi(a) = (2x, 4y, 2z) = \vec{0}$ právě když $a = (0,0,0)$. Ovšem tento bod není v M, protože nesplňuje $\Phi(a) = 0$.

Normálový vektor tečné roviny v bodě $a_0 = (x_0, y_0, z_0) \in M$ je tedy právě $\text{grad}\Phi(a_0)$. Tato rovina bude rovnoběžná s ϱ, která má normálový vektor $\mathbf{n}_\varrho = (4,2,1)$, právě když

$$(2x_0, 4y_0, 2z_0) = \text{grad}\Phi(a_0) = \lambda \cdot \mathbf{n}_\varrho = \lambda \cdot (4,2,1)$$

pro nějaké $\lambda \in \mathbb{R}$, tedy $(x_0, y_0, z_0) = (2\lambda, \lambda/2, \lambda/2)$. Současně má také platit, že $x_0^2 + 2y_0^2 + z_0^2 = 1$. Po dosazení pak dostaneme $(2\lambda)^2 + 2(\lambda/2)^2 + (\lambda/2)^2 = 1$ tedy $\lambda = \pm 2/\sqrt{19}$.

Hledané tečné roviny pak musí mít normálový vektor $\mathbf{n}_\varrho$, tedy rovnici $4x + 2y + z = c$, kde neznámé hodnoty $c \in \mathbb{R}$ určíme dosazením spočítaných bodů $a_0 = \pm\frac{1}{\sqrt{19}} \cdot (4,1,1)$, kterými tečné roviny musí procházet. Výsledek je

$$4x + 2y + z = \sqrt{19}$$

a

$$4x + 2y + z = -\sqrt{19}.$$

4.3 Nechť p je přímka procházející body $(1,2,3)$ a $(2,3,4)$. Najděte rovnici tečné roviny k elipsoidu M : $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$, která je kolmá na přímku p.

Řešení:
Použijeme větu o tečné rovině k implicitně definované ploše v $\mathbb{R}^3$:

Přímka p má směrový vektor $\vec{n} = (2,3,4) - (1,2,3) = (1,1,1)$.

Elipsoid $M = \{a \in U \mid \Phi(a) = 0\}$ je implicitně zadán pomocí funkce $\Phi(x,y,z) = \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} - 1$ a množiny $G = \mathbb{R}^3$. Zřejmě $\mathrm{grad}\Phi(a) = \left(\frac{2x}{25}, \frac{2y}{16}, \frac{2z}{9}\right)$. Takže $\mathrm{grad}\Phi(a) = \vec{0}$ právě když $a = (0,0,0)$. Ovšem tento bod není v M. Můžeme proto použít uvedenou větu a normálový vektor tečné roviny v bodě $a_0 = (x_0, y_0, z_0) \in M$ je právě $\mathrm{grad}\Phi(a_0)$. Tečná rovina bude mít za normálový vektor $\vec{n} = (1,1,1)$, právě když

$$\left(\frac{2x_0}{25}, \frac{2y_0}{16}, \frac{2z_0}{9}\right) = \mathrm{grad} f(a_0) = \lambda \cdot \mathbf{n} = \lambda \cdot (1,1,1)$$

pro nějaké $\lambda \in \mathbb{R}$. Tedy $(x_0, y_0, z_0) = \frac{\lambda}{2}(25, 16, 9)$. Současně má také platit, že $\frac{x_0^2}{25} + \frac{y_0^2}{16} + \frac{z_0^2}{9} = 1$. Dostáváme $\lambda = \pm 2/\sqrt{25}$ a tečné roviny jsou

$$x + y + z = 5\sqrt{2}$$

pro bod $\left(\frac{25}{\sqrt{25}}, \frac{16}{\sqrt{25}}, \frac{9}{\sqrt{25}}\right) \in M$ a

$$x + y + z = -5\sqrt{2}$$

pro bod $\left(-\frac{25}{\sqrt{25}}, -\frac{16}{\sqrt{25}}, -\frac{9}{\sqrt{25}}\right) \in M$.

Definice: Parciální derivace vyšších řádů funkce $f : U \to \mathbb{R}$ (kde $U \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina) v bodě $a \in U$ definujeme induktivně jako

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(a) := \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}} \right)(a)$$

kde $\frac{\partial^1 f}{\partial x_i} := \frac{\partial f}{\partial x_i}$ a $k \in \mathbb{N}$. Dále se zavádí zkrácené značení $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} := \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}$ a podobně pro vyšší derivace.

4.4 Určete $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$ a $\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}$ pro funkci $f(x,y) = \sin(x^2 y)$.

Řešení:
Máme $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)$ a $\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)$, takže stačí určit funkci $g(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ a její parciální derivace.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \sin(x^2 y)}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 \cos(x^2 y)\right) = 2x\cos(x^2 y) - 2x^3 y \sin(x^2 y)$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(2x\cos(x^2 y) - 2x^3 y \sin(x^2 y)\right) =$$
$$= 2\cos(x^2 y) - 4x^2 y \sin(x^2 y) - 6x^2 y \sin(x^2 y) - 4x^4 y^2 \cos(x^2 y)$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(2x\cos(x^2 y) - 2x^3 y \sin(x^2 y)\right) =$$
$$= -2x^3 \sin(x^2 y) - 2x^3 \sin(x^2 y) - 2x^5 y \cos(x^2 y)$$

Taylorův polynom: Taylorův polynom řádu 2 (pro bod a_0 a funkci f) je takový polynom $T_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stupně nejvýše 2, který nejlépe aproximuje funkci f v okolí bodu a_0 v tomto smyslu

$$f(a_0 + \vec{h}) = T_2(a_0 + \vec{h}) + o(\|\vec{h}\|^2)$$

tedy

$$\lim_{\vec{h}\to 0} \frac{f(a_0 + \vec{h}) - T_2(a_0 + \vec{h})}{\|\vec{h}\|^2} = 0 \ .$$

Tento polynom je jednoznačně určený (pokud existuje).

Existence a tvar Taylorova polynomu řádu 2: Jestliže f má spojité všechny druhé parciální derivace na nějakém okolí bodu a_0 (tedy je třídy C^2 na tomto okolí), pak existuje i Taylorův polynom řádu 2 (pro bod a_0 a funkci f) a je tvaru

$$T_2(a_0 + \vec{h}) = f(a_0) + df(a_0)[\vec{h}] + \frac{1}{2!} d^2 f(a_0)[\vec{h}, \vec{h}]$$

kde $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$ a bilineární forma $d^2 f(a_0) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je určena tzv. Hessovou maticí

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a_0) \end{pmatrix}$$

jako

$$d^2 f(a_0)[\vec{u}, \vec{v}] = \vec{u}^T \cdot \mathbb{A} \cdot \vec{v} \quad \text{pro} \quad \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$$

.

Speciálně pro $\vec{h} = (h_1, \dots, h_n)^T$ platí, že $d^2 f(a_0)[\vec{h}, \vec{h}] = \sum\limits_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a_0) h_i h_j$.

4.5 Najděte Taylorův polynom druhého řádu pro funkci f v okolí bodu a_0 a určete pomocí něj přibližnou hodnotu $f(a)$ pro daný bod a:

(i) $f(x, y) = e^{\sqrt{x} - y}$, $a_0 = (1, 1)$, $a = (1.01,\ 0.98)$

(ii) $f(x, y, z) = x e^y \cos z$, $a_0 = (0, 0, 0)$, $a = (-0.02,\ 0.01, -0.03)$

Řešení:
(i) Máme

$$f'(a_0) = \left(e^{\sqrt{x} - y} \frac{1}{2\sqrt{x}},\ -e^{\sqrt{x} - y} \right)_{|a_0} = (\tfrac{1}{2}, -1)$$

a

$$f''(a_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}_{|a_0} = \begin{pmatrix} e^{\sqrt{x} - y} \frac{1}{4x} - e^{\sqrt{x} - y} \frac{x^{-\frac{3}{2}}}{4} & -e^{\sqrt{x} - y} \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ -e^{\sqrt{x} - y} \frac{1}{2\sqrt{x}} & e^{\sqrt{x} - y} \end{pmatrix}_{|a_0} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Tedy

$$T_2(a_0 + \vec{h}) = f(a_0) + f'(a_0)[\vec{h}] + \frac{1}{2!} f''(a_0)[\vec{h}, \vec{h}] =$$

$$= 1 + (\tfrac{1}{2}, -1) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(h_1, h_2) \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} =$$

$$= 1 + \tfrac{1}{2} h_1 - h_2 - \tfrac{1}{8} h_1 h_2 + \tfrac{1}{2} h_2^2$$

kde $\vec{h} = (h_1, h_2)$.

Takže pro $\vec{h} = (0.01,\ -0.02)$ máme

$$f(a) \doteq T(a) = T(a_0 + \vec{h}) = 1 + \tfrac{1}{2} 0.01 + 0.02 + \tfrac{1}{8} 0.01 \cdot 0.02 + \tfrac{1}{2} 0.02^2 = 1.025225 \ .$$

(Pro srovnání skutečná hodnota zaokrouhlená na 9 desetinných míst je $f(a) \doteq 1.025302368$.)

(ii) Podobně dostaneme:

$$f'(a_0) = (e^y \cos z, xe^y \cos z, -xe^y \sin z)_{|a_0} = (1, 0, 0)$$

a

$$f''(a_0) = \begin{pmatrix} 0 & e^y \cos z & -e^y \sin z \\ e^y \cos z & xe^y \cos z & -xe^y \sin z \\ -e^y \sin z & -xe^y \sin z & -xe^y \cos z \end{pmatrix}_{|a_0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tedy

$$T_2(a_0 + \mathbf{h}) = h_1 + h_1 h_2.$$

Takže pro $\vec{h} = (-0.02,\ 0.01,\ -0.03)$ máme

$$f(a) \doteq T(a) = T(a_0 + \vec{h}) = -0.02 - 0.02 \cdot 0.01 = -0.0202\ .$$

(Pro srovnání skutečná hodnota zaokrouhlená na 9 desetinných míst je $f(a) \doteq -0.020201001$.)