

5. cvičení z Matematické analýzy 2

15. března 2021

Budeme vyšetřovat extrémy funkcí. Nejdříve to budou **lokální** extrémy funkce f na **otevřené** množině U .

Postup při hledání **lokálních** extrémů funkce f na **otevřené** množině U bude tento:

- najdeme stacionární body $a \in U$ (protože $df(a) = \vec{0}$ je nutná podmínka);
- dále pak vyšetříme definitnost $d^2f(a)$ v těchto bodech.

Bod $a \in U$, ve kterém je $df(a) = (0, \dots, 0)$, se nazývá *stacionární* bod funkce f .

Co je definitnost bilineární formy: Symetrická bilineární forma $Q : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ se nazývá

- *pozitivně definitní* \iff pro každý vektor $\vec{0} \neq \vec{h} \in \mathbb{R}^n$ je $Q[\vec{h}, \vec{h}] > 0$.
- *negativně definitní* \iff pro každý vektor $\vec{0} \neq \vec{h} \in \mathbb{R}^n$ je $Q[\vec{h}, \vec{h}] < 0$.
- *indefinitní* \iff existují vektory $\vec{h}, \vec{k} \in \mathbb{R}^n$ takové, že $Q[\vec{h}, \vec{h}] > 0$ a $Q[\vec{k}, \vec{k}] < 0$.

Každá symetrická bilineární forma $Q : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je popsána svou maticí \mathbb{A} ve standardní bázi, tj.

$$Q[\vec{h}, \vec{k}] = \vec{h}^T \cdot \mathbb{A} \cdot \vec{k}$$

pro všechna $\vec{h}, \vec{k} \in \mathbb{R}^n$. Tato matice \mathbb{A} je symetrická, tedy $\mathbb{A}^T = \mathbb{A}$ (zde $(\cdot)^T$ znamená transponování dané matice).

Postačující podmínky pro lokální extrém na otevřené množině: Nechť funkce $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ je třídy C^2 na otevřené množině U (tedy má spojité všechny druhé parciální derivace na U). Nechť $a_0 \in U$ je stacionární bod funkce f (tj. $df(a_0) = (0, \dots, 0)$). Jestliže

- $d^2f(a_0)$ je *pozitivně* definitní \Rightarrow v bodě a_0 je (ostré) lokální minimum.
- $d^2f(a_0)$ je *negativně* definitní \Rightarrow v bodě a_0 je (ostré) lokální maximum.
- $d^2f(a_0)$ je *indefinitní* \Rightarrow v bodě a_0 *NENÍ* lokální extrém.

V posledním případě říkáme, že v a_0 je sedlový bod (tj. pokud a_0 je stacionární a $f''(a_0)$ je indefinitní). Tento název je odvozen z toho, že při průchodu bodem a_0 po přímkách v něm máme v nějakém směru lokální minimum a v nějakém jiném zase lokální maximum.

Abychom mohli snadno rozeznávat definitnost forem, bude se nám hodit následující kritérium. Předtím si ještě zaved' me toto značení:

Pro čtvercovou matici $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pro $i = 1, \dots, n$ označme Δ_i determinant matice typu $i \times i$ vzniklé z prvních i sloupců a prvních i řádků z matice \mathbb{A} . (Determinanty Δ_i se nazývají hlavní minory matice \mathbb{A} .)

Sylvestrovo kritérium (definitnosti symetrických forem): Nechť symetrická bilineární forma Q je popsána symetrickou maticí $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Pak Q je

- *pozitivně definitní* \iff pro každé $i = 1, \dots, n$ je $\Delta_i > 0$.
 - *negativně definitní* \iff pro každé $i = 1, \dots, n$ je $\text{sgn}(\Delta_i) = (-1)^i$.
- (neboli: hlavní minory střídají znaménka, přičemž PRVNÍ je ZÁPORNÉ.)

Pokud je ještě navíc $\det(\mathbb{A}) \neq 0$, pak Q je

- *indefinitní* \iff není pozitivně ani negativně definitní (tj. nenastane ani jeden z předchozích dvou znaménkových případů).

5.1 (lokální extrémy)

Najděte lokální extrémy následujících funkcí:

(a) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy,$

(b) $f(x, y) = 6xy - x^3 - 2y^3 + 2.$

Řešení:

(i) Funkce je polynom a tedy má derivace všech řádů. Nutnou podmínkou pro extrém v daném bodě je nulovost první derivace.

$$df(x, y) = (3x^2 - 3y, 3y^2 - 3x)$$

Tedy $df(x, y) = 0$ právě když $x^2 = y$ a $y^2 = x$, což je právě když $(x, y) = (0, 0)$ nebo $(x, y) = (1, 1)$. V daných (kritických) bodech dále vyšetříme druhou derivaci:

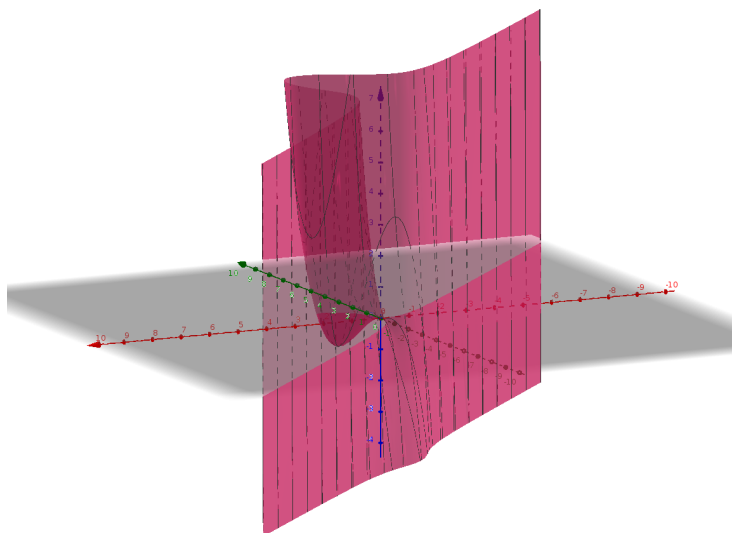
$$d^2f(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}.$$

- Pro $(x, y) = (0, 0)$ je $d^2f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$. Tedy pro $\vec{h} = (h_1, h_2)^T \in \mathbb{R}^2$ je

$$d^2f(0, 0)[\vec{h}, \vec{h}] = -6h_1h_2$$

a tato forma nabývá libovolných hodnot (je indefinitní). V bodě $(0, 0)$ je tedy SEDLO.

- Pro $(x, y) = (1, 1)$ je $d^2f(1, 1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$. Podle Sylvestrova kritéria ($\Delta_1 = 6 > 0$, $\Delta_2 = 36 - 9 = 27 > 0$) je forma pozitivně definitní a tedy v daném bodě je (lokální) MINIMUM. Toto minimum ale není globální, protože funkce není zdola omezená (lze vzít např. zúžení $f(x, 0) = x^3$).



(ii) Nutnou podmínkou pro lokální extrém v daném bodě je nulovost první derivace:

$$df(x, y) = (6y - 3x^2, 6x - 6y^2)$$

Tedy $d(x, y) = 0$ právě když $2y = x^2$ a $x = y^2$. Tedy $2y = y^4$ a řešení jsou tak $(x, y) = (0, 0)$ nebo $(x, y) = (\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2})$.

V daných (kritických) bodech dále vyšetříme druhou derivaci.

$$d^2f(x, y) = \begin{pmatrix} -6x & 6 \\ 6 & -12y \end{pmatrix}$$

- Pro $(x, y) = (0, 0)$ je $d^2f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$. Tedy pro $\vec{h} = (h_1, h_2)^T \in \mathbb{R}^2$ je

$$d^2f(0, 0)[\vec{h}, \vec{h}] = 12 \cdot h_1h_2$$

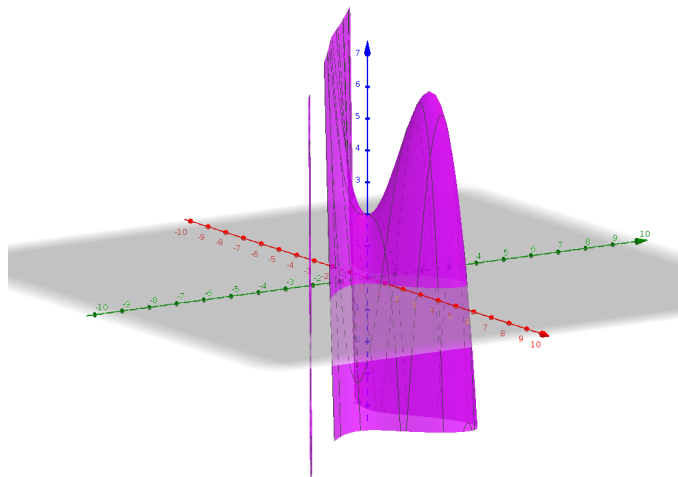
a tato forma nabývá libovolných hodnot (je indefinitní). V bodě $(0, 0)$ je tedy SEDLO.

- Pro $(x, y) = (\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2})$ je

$$d^2 f \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right) = \begin{pmatrix} -6\sqrt[3]{4} & 6 \\ 6 & -12\sqrt[3]{2} \end{pmatrix}.$$

Podle Sylvestrova kritéria ($\Delta_1 = -6\sqrt[3]{4} < 0$, $\Delta_2 = 72\sqrt[3]{8} - 36 = 72 \cdot 2 - 36 > 0$) je forma daná druhou derivací negativně definitní a tedy v daném bodě je lokální MAXIMUM.

Toto maximum ale není globální, protože funkce není shora omezená - např. stačí vzít zúžení $f(x, 0) = -x^3 + 2$.



5.2 (lokální extrémy)

Najděte lokální extrémy následujících funkcí:

(a) $f(x, y, z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$ pro $x, y, z > 0$,

(b) $f(x, y, z) = x^3 + y^2 + \frac{z^2}{2} - 3xy - 2y + 2z$.

Řešení:

(i) Nutnou podmínkou pro lokální extrém v daném bodě je nulovost první derivace:

$$df(x, y, z) = \left(1 - \frac{y^2}{4x^2}, \frac{y}{2x} - \frac{z^2}{y^2}, \frac{2z}{y} - \frac{2}{z^2} \right)$$

Tedy $df(x, y, z) = 0$ právě když

$$\begin{array}{l} y^2 = 4x^2 \\ y^3 = 2xz^2 \\ y = z^3 \end{array} \quad \begin{array}{l} \xrightarrow{y=z^3} \\ (z^3)^2 = 4x^2 \\ (z^3)^3 = 2xz^2 \end{array} \quad \begin{array}{l} \xrightarrow{x=z^7/2} \\ z^6 = 4 \left(\frac{z^7}{2} \right)^2 \end{array} \quad \begin{array}{l} \xrightarrow{z>0} \\ z = 1 \end{array}$$

Řešení pro $x, y, z > 0$ je pouze $(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}, 1, 1 \right)$.

Dále vyšetříme druhou derivaci.

$$d^2 f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{y^2}{2x^3} & -\frac{y}{2x^2} & 0 \\ -\frac{y}{2x^2} & \frac{1}{2x} + \frac{2z^2}{y^3} & -\frac{2z}{y^2} \\ 0 & -\frac{2z}{y^2} & \frac{2}{y} + \frac{4}{z^3} \end{pmatrix}$$

- Pro $(x, y, z) = (\frac{1}{2}, 1, 1)$ je

$$d^2 f\left(\frac{1}{2}, 1, 1\right) = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

Podle Sylvestrova kritéria ($\Delta_1 = 4 > 0$, $\Delta_2 = 12 - 4 = 8 > 0$, $\Delta_3 = 72 - 16 - 24 = 32 > 0$) je forma daná druhou derivací pozitivně definitní a tedy v daném bodě je lokální MINIMUM.

(ii) Funkce je polynom a tedy má derivace všech řádů. Nutnou podmínkou pro lokální extrém v daném bodě je nulovost první derivace.

$$df(x, y, z) = (3x^2 - 3y, 2y - 3x - 2, z + 2)$$

Tedy $df(x, y, z) = (0, 0, 0)$ právě když

$$\begin{aligned} y &= x^2 \\ 2y &= 3x + 2 & \xrightarrow{y=x^2} & 2x^2 = 3x + 2 & \implies & x = 2 \vee x = -\frac{1}{2} \\ z &= -2 \end{aligned}$$

tedy řešení jsou právě $(x, y, z) = (2, 4, -2)$ nebo $(x, y, z) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -2)$. V daných (kritických) bodech dále vyšetříme druhou derivaci:

$$d^2 f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 6x & -3 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Pro $(x, y, z) = (2, 4, -2)$ je

$$d^2 f(2, 4, -2) = \begin{pmatrix} 12 & -3 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Podle Sylvestrova kritéria ($\Delta_1 = 12 > 0$, $\Delta_2 = 24 - 9 = 15 > 0$, $\Delta_3 = 15 > 0$) je tato forma pozitivně definitní a tedy v daném bodě je (lokální) minimum.

- Pro $(x, y, z) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -2)$ je

$$d^2 f\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -2\right) = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Podle Sylvestrova kritéria ($\Delta_1 = -3 < 0$, $\Delta_2 = -6 - 9 = -15 < 0$, $\Delta_3 = -15 < 0$) je tato forma indefinitní a tedy v daném bodě je sedlo.

Můžeme ještě zjistit, jestli lokální extrémy jsou i globální. Protože zřejmě $f(x, 0, 0) = x^3$ a tato funkce nabývá všech hodnot, původní funkce f žádné globální extrémy nemá.

Dále budeme hledat *absolutní (globální)* extrémy funkce f na *uzavřené* (a obvykle také *omezené*) množině M .

Postup při hledání *absolutních (globálních)* extrémů funkce f na *uzavřené* (a obvykle také *omezené*) množině M bude tento:

- pomocí nutných podmínek (obvykle to jsou Lagrangeovy multiplifikátory) vyloučíme ty body, kde určitě extrémy nejsou;
- ve zbylé množině podezřelých bodů (obvykle malé) srovnáme jejich funkční hodnoty, ze kterých vybereme největší a nejmenší;
- jestliže víme, že obou extrémů musí být nabyto, pak jsou to právě předchozí nalezené největší a nejmenší hodnoty v podezřelých bodech;
- při hledání pouze globálního minima podstupujeme obdobně - tj. hledáme nejmenší hodnotu mezi podezřelými body;
- **Důležité:** zde nepotřebujeme používat druhou derivaci! (Ostatně, globálnost případného extrému nám tato druhá derivace stejně nemůže potvrdit.)

Poznámka: Necht' M má tvar z Lagr. věty. Jestliže nějaký bod $a \in M$ nesplňuje podmínku o lineární nezávislosti $\text{grad } g_1(a), \dots, \text{grad } g_k(a)$, zařadíme ho automaticky mezi podezřelé body. Obvykle takových bodů není mnoho, případně funkce je na nich "uchopitelná". Proto při aplikaci Lagr. věty vlastně vždy ověřujeme, jestli všechny body z M splňují uvedenou podmínku pro lineární nezávislost. Pokud ano, vazbám g_1, \dots, g_k se pak říká nezávislé.

Při hledání absolutních extrémů budeme využívat tyto věty:

Věta: Spojitá funkce na uzavřené a omezené (tzv. *kompaktní*) množině nabývá svého maxima i minima.

Věta: Necht' $U \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $f, g_i : U \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, \dots, k$ jsou spojitě diferencovatelné funkce. Položme

$$M = \bigcap_{i=1}^k \{a \in U \mid g_i(a) = 0\}.$$

Necht' $a_0 \in M$ je bodem *lokálního extrému funkce f zúžené na M* . Jestliže vektory

$\text{grad } g_1(a_0), \dots, \text{grad } g_k(a_0)$ jsou *lineárně nezávislé*

pak existují $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ (tzv. *Langrangeovy multiplifikátory*), že

$$\text{grad } f(a_0) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \text{grad } g_i(a_0).$$

(Jestliže výše zmíněná lineární nezávislost platí v každém bodě $a \in M$, pak se množina M nazývá *varieta* (angl. *manifold*) a je možné ji přiřadit dimenzi - pomocí věty o implicitní funkci - a sice $\dim M = n - k$. Dimenze tak odpovídá dimenzi n původního prostoru \mathbb{R}^n sníženou o počet k nezávislých vazeb daných zobrazením Φ .)

5.3 (vázané extrémy)

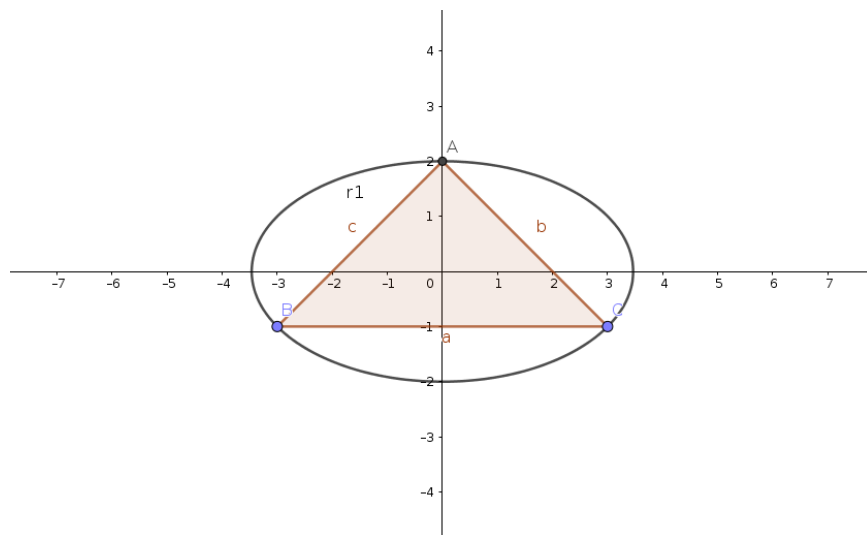
Do elipsy $x^2 + 3y^2 = 12$ vepište rovnoramenný trojúhelník takový, že má základnu rovnoběžnou s osou x a má maximální obsah.

Řešení:

Vzhledem k symetrii elipsy, stačí vyšetřit případ, kdy jeden z vrcholů (x, y) základny bude ležet na polovině elipsy

$$M : x^2 + 3y^2 = 12 \quad \& \quad x > 0$$

a vrchol naproti základně bude v bodě $(0, 2)$.



Na M nyní hledáme maximum funkce

$$f(x, y) = x(2 - y)$$

(což je obsah daného trojúhelníka).

Použijeme metodu Lagrangeových multiplikátorů. Množina M je zadána implicitně jako

$$M = \{(x, y) \in U \mid \Phi(x, y) = 0\}$$

kde $U : x > 0$ a vazbová funkce je

$$\Phi(x, y) = x^2 + 3y^2 - 12.$$

Dále, vektor $\text{grad } \Phi(x, y) = (2x, 6y)$ je nenulový pro každé $(x, y) \in M$ (jinak by to byl spor s tím, že má platit $x^2 + 3y^2 = 12$).

Věta o Lagrangeových multiplikátorech nám tedy říká, že pro extrém $a = (x, y)$ existuje $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$(2 - y, -x) = \text{grad} f(a) = \lambda \cdot \text{grad} \Phi(a) = \lambda \cdot (2x, 6y)$$

a

$$x^2 + 3y^2 = 12.$$

Z rovnic a omezení množinou U plyne, že ani jedna z hodnot x, y nemůže být nulová, takže máme

$$\begin{array}{l} 2 - y = 2\lambda x \\ -x = 6\lambda y \\ x^2 + 3y^2 = 12 \end{array} \quad \xrightarrow{\lambda = -x/(6y)} \quad \begin{array}{l} 2 - y = -\frac{x^2}{3y} \\ x^2 + 3y^2 = 12 \end{array} \quad \xrightarrow{x^2 = 12 - 3y^2} \quad \begin{array}{l} 3y(2 - y) = 3y^2 - 12 \\ y = -1 \end{array} \quad \xrightarrow{(x, y) \in M}$$

tedy jediné řešení je $(x, y) = (3, -1)$ s hodnotou $f(3, -1) = 9$.

Abychom věděli, že spojitá funkce f bude nabývat svého maxima, potřebujeme množinu M uzavřít (omezená pak už bude). To znamená přidat k M body $(0, 2)$ a $(0, -2)$, které se tímto stanou dalšími podezřelými body z extrému. Jejich odpovídající hodnoty jsou

$$f(0, 2) = f(0, -2) = 0.$$

Množina $\overline{M} = M \cup \{(0, 2), (0, -2)\}$ je nyní uzavřená a omezená množina a spojitá funkce tak na \overline{M} nabývá svého maxima a minima.

Porovnáním hodnot podezřelých bodů vidíme, že pro vrchol $(3, -1)$ je skutečně nabyt maximální obsah.

5.4 (vázané extrémny)

Najděte nejmenší a největší hodnoty funkce $f(x, y) = x - y + 3$ za podmínky $3x^2 + 5xy + 3y^2 = 1$, Načrtněte útvar určený touto vazbou.

Řešení:

Hledáme absolutní extrémny funkce $f(x, y) = x - y + 3$ na množině

$$M = \{(x, y) \in U \mid \Phi(x, y) = 0\}$$

kde $U = \mathbb{R}^2$ (je tedy otevřená) a $\Phi(x, y) = 3x^2 + 5xy + 3y^2 - 1$.

- Ověříme, že $\text{grad } \Phi(a) \neq (0, 0)$ pro každé $a \in M$:

Protože

$$\text{grad } \Phi(x, y) = (6x + 5y, 5x + 6y)$$

tak $\text{grad} \Phi(x, y) = (0, 0)$ právě když $(x, y) = (0, 0)$. Bod $(0, 0)$ ale není v M , takže v každém bodě $a \in M$ je $\text{grad} \Phi(a) \neq (0, 0)$.

- Z Lagrangeovy věty proto máme, že v bodě $a = (x, y) \in M$ lokálního extrému f na M existuje $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$(1, -1) = \text{grad} f(a) = \lambda \cdot \text{grad} \Phi(a) = \lambda (6x + 5y, 5x + 6y)$$

a

$$3x^2 + 5xy + 3y^2 = 1.$$

Jelikož z rovnic plyne, že $\lambda \neq 0$, dostáváme rovnici $6x + 5y = \frac{1}{\lambda} = -(5x + 6y)$. Odsud plyne $x = -y$ a po dosazení do vazby získáme kandidáty na extrémny:

$$(1, -1), \quad (-1, 1)$$

s hodnotami

$$f(1, -1) = 5, \quad f(-1, 1) = 1.$$

- Potřebujeme ještě zjistit, zda množina M je vůbec omezená (uzavřenost M plyne snadno z toho, že $M = \Phi^{-1}(\{0\})$, neboli že je to vzor uzavřené množiny $\{0\}$ při spojitém zobrazení Φ).

Doplněním na čtverec

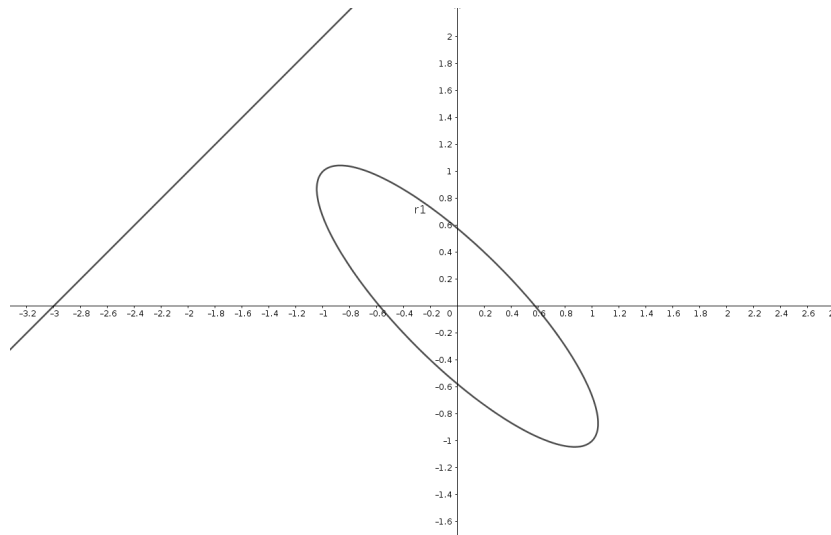
$$1 = 3x^2 + 5xy + 3y^2 = 3 \left(x + \frac{5}{6}y \right)^2 + \frac{11}{12}y^2$$

zjistíme, že jde o omezenou množinu (konkrétně o (natočenou) elipsu). To lze zjistit i z toho, že kvadratická forma

$$Q(x, y) = 3x^2 + 5xy + 3y^2 = (x, y) \begin{pmatrix} 3 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

je pozitivně definitní (např. pomocí Sylvestrova kritéria).

- Spojitá funkce f tak na uzavřené a omezené množině M skutečně nabývá svého maxima v bodě $(1, -1)$ a minima v bodě $(-1, 1)$.



Poznámka: Úloha (a) je ekvivalentní tomu, když máme najít na implicitně zadané křivce $M : 3x^2 + 5xy + 3y^2 = 1$ body, kde tečna přímka je rovnoběžná s přímkou $x - y + 3 = 0$.