6. cvičení z Matematické analýzy 2

22. března 2021

6.1 (vázané extrémy na uzavřené množině s vnitřkem a hladkým okrajem)
Najděte nejmenší a největší hodnoty funkce

$$f(x,y) = x^2 - (y-1)^2$$

na množině

$$M: \quad y^2 \leq 1 - x^2.$$

Načrtněte tuto množinu.

Řešení:
Množina M je kruh o poloměru 1 se středem v počátku. Příklad rozdělíme na vyšetření (volného) extrému na otevřené množině

$$M^\circ: \quad x^2 + y^2 < 1$$

a vázaného extrému na hranici

$$\partial M: \quad x^2 + y^2 = 1\ .$$

Extrém na M°: Absolutní extrém na M° musí být lokální a tedy musí platit

$$(0,0) = \mathrm{d}f(x,y) = \big(2x,\ -2(y-1)\big)$$

což nastává právě když $(x,y) = (0,1)$. Tento bod ale neleží v M°, takže žádné podezřelé body zatím nedostáváme.

Extrém na ∂M:

Použijeme metodu Langrangeových multiplikátorů. Pro extrém $a = (x,y)$ na kružnici dané vazbovou funkcí

$$\Phi(x,y) = x^2 + y^2 - 1$$

existuje $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$\big(2x,\ -2(y-1)\big) = \mathrm{grad} f(a) = \lambda \cdot \mathrm{grad}\Phi(a) = \lambda \cdot \Big(2x,\ 2y\Big)$$

a

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Tedy má platit

$$x = x\lambda$$
$$1 - y = y\lambda\ .$$

Odsud máme, že buď je $x = 0$ nebo $\lambda = 1$. Z první možnosti a rovnice kružnice máme body $(0, \pm 1)$. Z druhé, tj. $\lambda = 1$ dostáváme $y = \frac{1}{2}$ a tudíž body $\Big(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\Big)$. Jejich funkční hodnoty jsou:

$$f\big(0,1\big) = 0, \qquad f\big(0,-1\big) = -4$$

$$f\big(\pm\tfrac{\sqrt{3}}{2}, \tfrac{1}{2}\big) = \tfrac{1}{2}\ .$$

Množina M je uzavřená a omezená množina a spojitá funkce tak v těchto bodech nabývá svého maxima a minima.

Porovnáním hodnot podezřelých bodů dostáváme, že funkce nabývá svého maxima v bodech $\big(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\big)$ a minima v bodě $(0,-1)$.

6.2 (vázané extrémy na uzavřené množině s vnitřkem a hladkým okrajem)

Kruhový talíř o rovnici $x^2 + y^2 \leq 1$ je zahřátý na teplotu $T(x, y) = x^2 + 2y^2 - x$. Najděte nejteplejší a nejstudenější bod na talíři.

Řešení:
Vyšetření extrému T na uzavřené a omezené množině $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ rozdělíme na případ (volného) extrému na otevřené množině

$$A^\circ : \quad x^2 + y^2 < 1$$

a případ vázaného extrému na

$$\partial A : \quad x^2 + y^2 = 1.$$

Extrém na A°:

Jestliže $a = (x, y) \in A^\circ$ je extrém T na A, pak je i lokálním extrémem T na A°. Takže musí platit, že

$$(0, 0) = \mathrm{d}T(a) = (2x - 1, 4y)$$

tedy $a = (\frac{1}{2}, 0)$ a tento bod skutečně patří do A°. Máme tedy první podezřelý bod.

Extrém na ∂A:

Jestliže $a = (x, y) \in \partial A$ je extrém T na A, pak je i (vázaným) extrémem T na

$$\partial A : \quad \Phi(x, y) = 0$$

kde $\Phi(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Musí tedy existovat $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$(2x - 1, 4y) = \mathrm{grad}T(a) = \lambda \cdot \mathrm{grad}\Phi(a) = \lambda(2x, 2y)$$

a

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Takže máme

$$\begin{array}{rcl} 2x - 1 &=& \lambda 2x \\ 2y &=& \lambda y \\ x^2 + y^2 &=& 1 \end{array} \quad \overset{(2-\lambda)y=0}{\Longrightarrow} \quad \begin{array}{l} y = 0: \quad x^2 = 1 \;\Rightarrow\; x = \pm 1 \\ \lambda = 2: \quad 2x - 1 = 2 \cdot 2x \;\Rightarrow\; x = -\frac{1}{2} \overset{y^2=1-x^2}{\Longrightarrow} y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}$$

Dostáváme $a = \pm(1, 0)$ nebo $a = (-\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2})$. Teď víme, že jedinými možnými kandidáty na extrémy jsou body

$$\left(\tfrac{1}{2}, 0\right), \ (1, 0), \ (-1, 0), \ \left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ a } \left(-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Protože T nabývá na (uzavřené a omezené) množině A extrému, porovnáním funkčních hodnot

$$T\left(\tfrac{1}{2}, 0\right) = -\tfrac{1}{4}, \quad T(1, 0) = 0, \quad T(-1, 0) = 2, \quad T\left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \tfrac{9}{4} = T\left(-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

zjistíme, že T nabývá minima v $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ a maxima v $\left(-\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

6.3 (extrémy pro po částech hladký okraj)

Nalezněte největší a nejmenší hodnotu funkce $f(x,y) = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$ na množině

$$M: \quad x^2 \leq y \leq 4 \ .$$

Řešení:
Množina M je část ležící nad parabolou a pod přímkou a je zřejmě omezená i uzavřená (je průnikem uzavřených množin).

Příklad opět rozdělíme na vyšetření (volného) extrému na otevřené množině

$$M^\circ: \quad x^2 < y < 4$$

a vázaného extrému na hranici

$$\partial M: \quad \begin{array}{l} (y = x^2 \ \ \& \ \ -2 \leq x \leq 2) \ \vee \\ (y = 4 \ \ \& \ \ -2 \leq x \leq 2) \end{array}$$

kterou ale nejde vyjádřit pomocí jediné diferencovatelné vazby. Vazbami jsou dvě křivky (část paraboly a úsečka). POZOR: tyto dvě vazby ale NEPLATÍ současně! Každá vyjadřuje JINOU část okraje!

Extrém na M°:

$$(0,0) = \mathrm{d}f(x,y) = \big(6x^2 + 8x - 2y, 2y - 2x\big)$$

nastává (vzhledem k $x, y > 0$) právě když je splněna soustava

$$y = 3x^2 + 4x$$

$$y = x \ .$$

Jediná řešení této soustavy $(0,0)$ a $(-1,-1)$ ale nepatří do M°, takže žádné podezřelé body zatím nedostáváme.

Extrém na ∂M:

Na obou křivkách můžeme použít Lagrangeovu větu, ale nejvhodnější bude zavést nějakou parametrizaci a vyšetřit lokální extrémy zúžených funkcí:

- část paraboly parametrizujeme přirozeně pomocí

$$\varphi_1 : (-2,2) \to \mathbb{R}^2, \quad \varphi_1(t) = (t, t^2) \ .$$

Pokud $a = \varphi_1(t_0)$ je bodem extrému f na části paraboly, pak je t_0 extrémem funkce $f \circ \varphi_1$ a tedy musí být $(f \circ \varphi_1)'(t_0) = 0$. Tuto úvahu ovšem můžeme udělat právě jen proto, že t_0 je VNITŘNÍM bodem intervalu $(-2,2)$. Z tohoto důvodu MUSÍME při vyšetřování části paraboly vynechat její koncové body, kde navazuje na úsečku (tyto koncové body automaticky zařadíme do podezřelých bodů).

Budeme tedy vyšetřovat funkci

$$g_1(t) := f(\varphi_1(t)) = f(t, t^2) = 4t^2 + t^4 \quad \text{pro} \quad t \in (-2,2) \ .$$

Máme $g_1'(t) = 8t + 4t^3 = 0$ právě když $t = 0$. Podezřelým bodem tak je $(0,0) \in \partial M$ s hodnotou $f(0,0) = 0$.

- podobně úsečku parametrizujeme přirozeně pomocí OTEVŘENÉHO intervalu

$$\varphi_2 : (-2,2) \to \mathbb{R}^2, \quad \varphi_2(t) = (t, 4) \ .$$

Budeme tedy vyšetřovat funkci

$$g_2(t) := f(\varphi_2(t)) = f(t,4) = 2t^3 + 4t^2 - 8t + 16 \quad \text{pro} \quad t \in (-2,2) \ .$$

Rovnice $g_2'(t) = 6t^2 + 8t - 8 = 2(3t-2)(t+2) = 0$ má řešení pro $t = \frac{2}{3} \in (-2,2)$. Podezřelým bodem tak je $(\frac{2}{3}, 4) \in \partial M$ s hodnotou $f\left(\frac{2}{3}, 4\right) = \frac{16\cdot 22}{27}$.

• zbývají už jen dva průsečíky křivek $(-2,4)$ a $(2,4)$ s hodnotami $f(-2,4) = f(2,4) = 32$, které taky zahrneme mezi podezřelé body.

Porovnáním hodnot podezřelých bodů (tj. $32 > \frac{16\cdot 22}{27} > 0$) dostáváme, že funkce evidentně nabývá svého maxima v bodech $(-2,4)$ a $(2,4)$ a minima v bodě $(0,0)$.

6.4 (extrémy pro po částech hladký okraj)

Nalezněte největší a nejmenší hodnotu funkce $f(x,y) = x^2y(4-x-y)$ na množině

$$M : \quad x \geq 0 \ \ \& \ \ y \geq 0 \ \ \& \quad x + y \leq 6 \ .$$

Řešení:

Množina M je trojúhelník s vrcholy $(0,0)$, $(6,0)$ a $(0,6)$ a je zřejmě omezená i uzavřená (je průnikem uzavřených polorovin).

Příklad opět rozdělíme na vyšetření (volného) extrému na otevřené množině

$$M^\circ : \quad x > 0 \ \ \& \ \ y > 0 \ \ \& \quad x + y < 6$$

a vázaného extrému na hranici

$$\partial M : \quad \begin{array}{l} (y = 0 \ \ \& \ \ 0 \leq x \leq 6) \ \ \vee \\ (x = 0 \ \ \& \ \ 0 \leq y \leq 6) \ \ \vee \\ (x + y = 6 \ \ \& \ \ 0 \leq x \leq 6) \end{array}$$

kterou ale nejde vyjádřit pomocí jediné diferencovatelné vazby. Vazbami jsou tři otevřené úsečky (hraný trojúhelníky) a tři body (vrcholy trojúhelníků). Tyto vazby ale opět NEJSOU splněné SOUČASNĚ (což je vidět i tím, že používáme logickou spojku “NEBO”, nikoliv “A”).

Extrém na M°:

$$(0,0) = \mathrm{d}f(x,y) = \left(8xy - 3x^2y - 2xy^2, 4x^2 - x^3 - 2x^2y\right)$$

nastává (vzhledem k tomu, že $x, y > 0$) právě když je splněna soustava

$$8 = 3x + 2y$$

$$4 = x + 2y \ .$$

Tedy podezřelým bodem je řešení $a = (2,1) \in M^\circ$ s hodnotou $f(2,1) = 4$.

Extrém na ∂M:

Na obou odvěsnách trojúhelníku je funkce f identicky nulová, takže všechny tyto body prostě zařadíme do podezřelých bodů. Zbývá vyšetřit otevřenou úsečku, která představuje třetí stranu. Tentokrát ji prostě zparametrizujeme pomocí

$$\varphi(t) = (t, 6-t) \quad \text{pro} \quad t \in (0,6)$$

a vyšetříme tak (lokální) extrémy funkce

$$g(t) := (f \circ \varphi)(t) = -2t^2(6-t) = 2t^3 - 12t^2$$

pro $t \in (0,6)$. Máme

$$g'(t) := 6t^2 - 24t = 6t(t-4) = 0$$

právě když $t = 4 \in (0,6)$ (zdůrazněme, že tento interval nutně musí být OTEVŘENÝ - jinak nemůžeme použít nutnou podmínku, tj. nulovost derivace). Tedy podezřelý bod je $a = (4,2)$ s hodnotou $f(4,2) = -64$.

Porovnáním hodnot podezřelých bodů (zejména nezapomínejme na vrcholy trojúhelníku jako samostatné vazby, které nelze zařadit do ostatních vazeb, protože ty musí být definovány v rámci otevřených množin - opět proto, abychom mohli derivovat) dostáváme, že funkce tedy evidentně nabývá svého maxima v bodě $(2,1)$ a minima v bodě $(4,2)$.

6.5 (vázané extrémy - aplikace)

Najděte tři pozitivní čísla jejichž součin je maximální, a jejichž součet je roven 100.

Řešení:

Zadání příkladu lze interpretovat také tak, že hledáme maximální objem kvádru, který se vejde do pravidelného trojbokého jehlanu, jehož jeden vrchol je společný s vrcholem kvádrů. Intuitivně lze očekávat, že maximální takový objem bude odpovídat krychli.

Budeme tedy hledat body maxima funkce

$$f(x,y,z) = xyz$$

na množině

$$M = \{(x,y,z) \in U \mid \Phi(x,y,z) = 0\},$$

kde

$$U: \; x,y,z > 0$$

je otevřená množina a

$$\Phi(x,y,z) = x + y + z - 100$$

je vazbová funkce.

Protože U je OTEVŘENÁ (což je podstatné!) a $\mathrm{grad}\Phi(a) \neq (0,0,0)$ pro každé $a \in M$, tak můžeme použít Langrangeovu podmínku pro extrém na M. Pro bod extrému $a = (x,y,z) \in M$ pak musí existovat $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$(yz, xz, xy) = \mathrm{grad} f(a) = \lambda \cdot \mathrm{grad}\Phi(a) = \lambda(1,1,1)$$

a

$$x + y + z = 100 \; .$$

Odsud máme např. že $yz = \lambda = xz$ a protože $z > 0$, tak dostaneme $x = y$. Podobně odvodíme, že $x = y = z$ a tedy $x + x + x = 100$. Takže jediný podezřelý bod z extrému je $a = \left(\frac{100}{3}, \frac{100}{3}, \frac{100}{3}\right)$ s hodnotou $f\left(\frac{100}{3}, \frac{100}{3}, \frac{100}{3}\right) = \left(\frac{100}{3}\right)^3$.

Abychom mohli využít věty o nabytí extrémů, potřebujeme ale uzavřenou množinu, což M není (je to trojúhelník, ale bez hran). Tak si M prostě uzavřeme, čímž dostaneme

$$\overline{M} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z \geq 0 \quad \& \quad \Phi(x, y, z) = 0\},$$

což je trojúhelník i s hranami. Na těchto přidaných hranách je ale funkce f nulová (a tudíž snadno uchopitelná), takže všechny hrany můžeme zařadit mezi podezřelé body z extrémů na $\overline{M}$. Tím jsme prošli všechny body $\overline{M}$.

Množina $\overline{M}$ je teď už uzavřená a omezená, takže spojitá funkce f zde nabývá svých extrémů. Porovnáním funkčních hodnot v podezřelých bodech teď snadno dostáváme, že na hranách nabývá f svého minima a v bodě $\left(\frac{100}{3}, \frac{100}{3}, \frac{100}{3}\right)$ svého (jediného) maxima (jak jsme očekávali).

6.6 (vázané extrémy - aplikace)

Do úseče eliptického paraboloidu $z = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3}$ vymezené rovinou $z = 1$ vepište kvádr takový, že jeho stěny budou rovnoběžně s jednotlivými souřadnými rovinami a jenž bude mít maximální objem.

Řešení:
Vzhledem k symetriím stačí vyšetřit případ, kdy čtvrtina kvádru leží v množině $x, y, z \geq 0$. Tato část je jednoznačně určena svým vrcholem (x, y, z), který leží v množině:

$$M: \quad z = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} \ \ \& \ \ 0 \leq x, y \ \ \& \ \ 0 \leq z \leq 1$$

objem této části je pak dán hodnotou

$$f(x, y, z) = xy(1 - z) \ .$$

Hledáme tedy maximum f na M. Množina M je uzavřena (je to průnik uzavřených množin) a omezená (jak se snadno nahlédne). K použití věty o Langrangeových multiplikátorech potřebujeme ale množinu tvaru $\{a \in U \mid \Phi(a) = 0\}$, kde speciálně U je OTEVŘENÁ množina v $\mathbb{R}^3$. Množinu M proto rozdělíme na

$$M_1: \quad \underbrace{0 < x, y \ \& \ \ 0 < z < 1}_{=:U} \quad \& \quad \Phi(x, y, z) = 0$$

a

$$M_2: \quad (x = 0 \ \vee \ y = 0 \ \vee \ z = 0 \ \vee \ z = 1) \ \ \& \ \ 0 \leq x, y \ \ \& \ \ 0 \leq z \leq 1 \ \ \& \ \ \Phi(x, y, z) = 0$$

kde $\Phi(x, y, z) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} - z$ je vazbová funkce.

Pro body extrémů na M_1 můžeme teď použít Lagrangeovu podmínku (protože pro $a \in M_1$ je $\mathrm{grad}\Phi(a) \neq (0, 0, 0)$, jak bude vidět). Tedy budeme tu mít $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$\Big(y(1 - z), \ x(1 - z), \ -xy\Big) = \mathrm{grad} f(a) = \lambda \cdot \mathrm{grad}\Phi(a) = \lambda\Big(x, \ \tfrac{2}{3}y, \ -1\Big)$$

a

$$z = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} \ .$$

Protože na U jsou hodnoty x, y a $1 - z$ nenulové, můžeme vydělit první rovnici třetí rovnicí a také druhou rovnici opět třetí rovnicí:

$$\begin{array}{rcl} y(1-z) &=& \lambda x \\ x(1-z) &=& \lambda \frac{2}{3} y \\ xy &=& \lambda \\ z &=& \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3} \end{array} \quad \xRightarrow{\text{vydělení rovnic}} \quad \begin{array}{l} 1-z=x^2 \\ 1-z=\frac{2}{3}y^2 \\ z=\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3} \end{array} \quad \xRightarrow[y^2/3=(1-z)/2]{x^2=1-z}$$

$$\Longrightarrow \quad z=\frac{1-z}{2}+\frac{1-z}{2} \quad \Longrightarrow \quad z=\frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{l} x^2=1-z=\frac{1}{2} \\ y^2=\frac{3}{2}(1-z)=\frac{3}{4} \end{array} \quad \xRightarrow{x,y>0} \quad \begin{array}{l} x=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y=\frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}$$

Jediný podezřelý bod na M_1 je tedy $a=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$ s hodnotou $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{6}}{8}$.

Na množině M_2 je funkce f konstantně nulová, takže celou M_2 můžeme zařadit mezi podezřelé body.

Porovnáním funkčních hodnot (a tím, že f nabývá extrémů na M), pak ihned máme, že kvádr s maximálním objemem je určen vrcholem $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$ (a jeho symetrickými protějšky na eliptickém paraboloidu).

6.7 (extrémy pro dvě vazby)

Určete největší a nejmenší hodnoty funkce $f(x,y,z)=xyz$ na množině M dané podmínkami

(a) $x+y+z=5$ a $xy+yz+zx=8$.

(b) $x+y+z=0$ a $x^2+y^2+z^2=1$.

Řešení:

(i) Tentokrát máme vazby dvě a budeme tedy potřebovat ověřit jejich nezávislost (v bodech množiny M), tj. lineární nezávislost gradientů vazeb v příslušných bodech.

Položme

$$\Phi_1(x,y,z)=x+y+z-5$$

a

$$\Phi_2(x,y,z)=xy+yz+zx-8.$$

Pak je $M=\{a\in\mathbb{R}^3 \mid \Phi_1(a)=0 \;\;\&\;\; \Phi_2(a)=0\}$.

uzavřenost M:

Množiny $\{a\in\mathbb{R}^3 \mid \Phi_i(a)=0\}$ jsou vzorem jednobodové (a tedy uzavřené) množiny $\{0\}$ při spojitých zobrazeních Φ_i a jsou tudíž uzavřené. Množina M je jejich průnikem a proto je také uzavřená.

omezenost M:

Buď si vyjádříme jednu proměnnou z první rovnice (např. $z=5-x-y$), dosadíme do druhé a tu přepíšeme doplněním na čtverec:

$$xy+(x+y)(5-x-y)=8$$

$$x^2+y^2+xy-5x-5y=-8$$

$$\left(x+\frac{y}{2}-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\left(y-\frac{5}{3}\right)^2=\frac{1}{3}$$

nebo použijeme jednodušší a elegantnější postup, který využije konkrétního tvaru rovnic:

$$5^2 = (x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx) = x^2+y^2+z^2+2\cdot 8$$

tedy

$$x^2+y^2+z^2 = 5^2 - 2\cdot 8 (= 9)$$

V každém případě vidíme, že proměnné jsou omezené a tedy i množina M je omezená.

nezávislost vazeb:
Potřebujeme ukázat, že pro $a=(x,y,z)$ platí:

$$\Phi_1(a)=0 \quad \& \quad \Phi_2(a)=0 \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{grad}\Phi_1(a) \ \text{ a } \ \mathrm{grad}\Phi_2(a) \ \text{ jsou lineárně nezávislé.}$$

Máme

$\mathrm{grad}\Phi_1(a) = (1,1,1)$

$\mathrm{grad}\Phi_2(a) = (y+z, z+x, x+y)$.

Tyto vektory jsou lineárně závislé právě když $y+z=z+x=x+y$ neboli když $x=y=z$. Pokud by přitom mělo platit $\Phi_1(a)=0$ a $\Phi_2(a)=0$, pak dostáváme, že $3x=5$ a $3x^2=8$, což nelze splnit. Pro body z M tak máme opravdu nezávislost vazeb.

Teď konečně můžeme (korektně!) použít větu o Lagrangeových multiplikátorech:
Pro bod $a=(x,y,z)\in M$ absolutního (a tedy i lokálního) extrému f na M teď existují $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, že

$$(yz, zx, xy) = \mathrm{grad} f(a) = \lambda\cdot\mathrm{grad}\Phi_1'(a) + \mu\cdot\mathrm{grad}\Phi_2'(a) = \lambda(1,1,1)+\mu(y+z, z+x, x+y)$$

a

$$x+y+z=5 \qquad \text{a} \qquad xy+yz+zx=8.$$

Když teď od sebe např. odečteme první dvě rovnice

$$yz = \lambda + \mu(y+z)$$

$$zx = \lambda + \mu(z+x)$$

dostaneme $z(y-x)=\mu(y-x)$, což dává podmínku buď $x=y$ nebo $z=\mu$. Symetricky dostaneme další podmínku $y=z$ nebo $x=\mu$. Odsud snadno plyne, že vždy je buď $x=y$ nebo $y=z$ nebo $x=\mu=z$, tedy že dvě souřadnice jsou vždy stejné. Stačí tedy vyřešit jednu z verzí a další už dostaneme permutacemi souřadnic.

Např. z podmínky $x=y$ dostáváme dosazením do vazeb řešení $(x,y,z)=(2,2,1)$ nebo $(x,y,z)=\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{7}{3}\right)$. Hodnoty parametru λ ani μ už zjišťovat nemusíme, podezřelé body teď mohou být už jen tyto:

$$a=(2,2,1),(1,2,2),(2,1,2) \qquad \text{kde} \quad f(a)=4$$

a

$$a=\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{7}{3}\right),\left(\frac{4}{3},\frac{7}{3},\frac{4}{3}\right),\left(\frac{7}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right) \qquad \text{kde} \quad f(a)=\frac{112}{27}.$$

Protože funkce f je spojitá a množina M je omezená a uzavřená, nabývá f v prvních bodech minimum a v druhých maximum (protože $\frac{112}{27}>4$).

(ii) Budeme postupovat podobně jako v (i). Položme

$$\Phi_1(x,y,z) = x+y+z$$

$$\Phi_2(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1.$$

$$M: \quad \Phi_1(a)=0 \ \& \ \Phi_2(a)=0\ .$$

uzavřenost M: stejné zdůvodnění jako v (i).

omezenost M: Jedna z vazeb představuje sféru, takže i M je omezená.

nezávislost vazeb:
Potřebujeme ukázat, že pro $a = (x, y, z)$ platí:

$$\Phi_1(a) = 0 \quad \& \quad \Phi_2(a) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{grad}\Phi_1(a) \;\text{ a }\; \mathrm{grad}\Phi_2(a) \;\text{ jsou lineárně nezávislé.}$$

Máme

$\mathrm{grad}\Phi_1(a) = (1, 1, 1)$

$\mathrm{grad}\Phi_2(a) = (2x, 2y, 2z)$.

Tyto vektory jsou lineárně závislé právě když $x = y = z$. Pokud by přitom mělo platit $\Phi_1(a) = 0$ a $\Phi_2(a) = 0$, pak dostáváme, že $3x = 0$ a $3x^2 = 1$, což nelze splnit. Pro body z M tak máme opravdu nezávislost vazeb.

Teď konečně můžeme korektně použít větu o Lagrangeových multiplikátorech:
Pro bod $a = (x, y, z) \in M$ absolutního (a tedy i lokálního) extrému f na M teď existují $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, že

$$(yz, zx, xy) = \mathrm{grad} f(a) = \lambda \cdot \mathrm{grad}\Phi_1(a) + \mu \cdot \mathrm{grad}\Phi_2(a) = \lambda(1, 1, 1) + \mu(2x, 2y, 2z)$$

a

$$x + y + z = 0 \qquad \text{a} \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Když opět od sebe odečteme první dvě rovnice

$$yz = \lambda + 2\mu x$$

$$zx = \lambda + 2\mu y$$

dostaneme $z(y - x) = 2\mu(x - y)$, což dává podmínku buď $x = y$ nebo $z = -2\mu$. Symetricky dostaneme další podmínku $y = z$ nebo $x = -2\mu$. Odsud snadno plyne, že vždy je buď $x = y$ nebo $y = z$ nebo $x = -2\mu = z$, tedy že dvě souřadnice jsou vždy stejné. Stačí tedy vyřešit jednu z verzí a další už dostaneme permutacemi souřadnic.

Např. z podmínky $x = y$ dostáváme dosazením do vazeb řešení $(x, y, z) = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2)$. Hodnoty parametru λ ani μ už zjišťovat nemusíme, podezřelé body teď mohou být už jen tyto:

$$a = -\frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2), \quad -\frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1), \quad -\frac{1}{\sqrt{6}}(-2, 1, 1) \quad \text{kde} \quad f(a) = \frac{\sqrt{6}}{18}$$

a

$$a = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2), \quad \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1), \quad \frac{1}{\sqrt{6}}(-2, 1, 1) \quad \text{kde} \quad f(a) = -\frac{\sqrt{6}}{18}\ .$$

Protože funkce f je spojitá a množina M je omezená a uzavřená, nabývá f v prvních bodech maximum a v druhých minimum.