7. cvičení z Matematické analýzy 2

29. března 2021

7.1 (vázané extrémy - vzdálenost)
Vypočtěte vzdálenost nejbližšího bodu hyperboly $M: \ x^2 + 5xy + y^2 = 9$ od počátku $(0,0)$.

Řešení:
Hyperbole je uzavřená množina, ale NENÍ omezená. Ke zjištění vzdálenosti od počátku $(0,0)$ si vezmeme funkci

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

protože se čtvercem vzdálenosti se lépe pracuje. Tato funkce "v nekonečnu roste do nekonečna" (tj. splňuje podmínky o nabytí globálního minima na M). Kandidáta na minimum můžeme opět najít metodou Lagr. multiplikátorů.

Máme tedy $f(x,y) = x^2 + y^2$ a vazbovou funkci $g(x,y) = x^2 + 5xy + y^2 - 9$. Pro bod $a = (x,y) \in M$ lokálního extrému f na M existuje $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$\big(2x, 2y\big) = f'(a) = \lambda \cdot g'(a) = \lambda\Big(2x + 5y, 5x + 2y\Big)$$

a

$$x^2 + 5xy + y^2 = 9.$$

Z prvního vztahu dostaneme

$$\begin{pmatrix} 2(\lambda-1) & 5\lambda \\ 5\lambda & 2(\lambda-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Protože pro bod $(x,y) \in M$ je $(x,y) \neq (0,0)$, tak vektorová rovnice je řešitelná právě když determinant čtvercové matice je nula. Neboli

$$0 = (2(\lambda-1))^2 - (5\lambda)^2 = (2\lambda - 2 - 5\lambda) \cdot (2\lambda - 2 + 5\lambda) = (-3\lambda - 2) \cdot (7\lambda - 2)$$

tedy $\lambda = -\frac{2}{3}$ nebo $\lambda = \frac{2}{7}$. Dosazením dostaneme $x = \pm y$ a z rovnice $x^2 + 5xy + y^2 = 9$ pak máme podezřelé body

$$a_0 = (x,y) = \pm\left(\tfrac{3}{\sqrt{7}}, \tfrac{3}{\sqrt{7}}\right)$$

s hodnotou $f(a_0) = \frac{18}{7}$. Podle věty o nabývání minima je tato hodnota skutečně minimální, takže vzdálenost bodu $(0,0)$ od hyperboly je $\sqrt{\frac{18}{7}}$.

Na úlohu lze také nahlížet geometricky: hledáme takový bod $(x,y) \in M$, aby jeho průvodič z počátku $(0,0)$, tj. vektor $\vec{h} = (x,y) - (0,0)$ byl kolmý na tečnou přímku k M v bodě (x,y). Tato tečná přímka má za normálový vektor $\operatorname{grad} g(x,y)$. Musíme tedy vyřešit systém podmínek $\vec{h} = \lambda \cdot \operatorname{grad} g(x,y)$ pro nějaké $\lambda \in \mathbb{R}$ a $(x,y) \in M$. A to už je totéž jako výše.

7.2 (vázané extrémy - vzdálenost)
Najděte vzdálenost paraboly $M: \ y = x^2$ od přímky $p: \ y = x - 2$.

Řešení:
Musíme si uvědomit, že parabola NENÍ omezená množina (i když je uzavřená a má tečny ve všech svých bodech). Naštěstí ale funkce vzdálenosti bodů paraboly M od přímky p “v nekonečnu roste do nekonečna.” Minimum vzdálenosti tedy musí být nabyto v nějakém bodě M a v něm musí být tečna rovnoběžná s přímkou p.

Příklad můžeme řešit dvěma způsoby:

(1) Funkce vyjadřující vzdálenost bodu $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ od přímky dané rovnicí $\alpha x' + \beta y' + \gamma = 0$ je dána hodnotou $\frac{|\alpha x+\beta y+\gamma|}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$.

Budeme tedy hledat globální extrémy funkce

$$f(x, y) = \frac{|x - y - 2|}{\sqrt{2}}$$

Protože absolutní hodnota není diferencovatelná v nule, musíme úlohu rozdělit na takové případy, abychom mohli využít známé věty k vyšetřování extrémů.

Úlohu tedy rozdělíme na vyšetření funkce f na množině

$M_1 : y = x^2 \ \& \ x - y - 2 \neq 0$

která je tudíž zadaná jako

$$M_1 = \{(x, y) \in U \mid g(x, y) = 0\}$$

kde $g(x, y) = x^2 - y$ je vazbová funkce a $U : x - y - 2 \neq 0$ je otevřená množina v $\mathbb{R}^2$ (je to totiž doplněk uzavřené množiny dané příslušnou rovností),

a dále na množině

$M_2 : y = x^2 \ \& \ x - y - 2 = 0$.

která je ovšem prázdná, tj. $M_2 = \emptyset$.

Nyní můžeme postupovat opět metodou Langrangeových multiplikátorů (kde použijeme, že při derivování absolutní hodnoty dostaneme $\mathrm{d}f(x, y) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$ a toto plus/minus znaménko lze pak ”zapomenout”díky vhodné volbě Lagrange. multiplikátoru λ) nebo můžeme využít parametrizaci $y = x^2$ a hledat minimum funkce $h(x) := f(x, x^2) = \frac{|x-x^2-2|}{\sqrt{2}}$ pro $x \in \mathbb{R}$. Dále už výpočet provádět nebudeme (výsledek dává stejný jako postup níže).

(2) Jestliže přímka nebude protínat parabolu (což zde skutečně nastává), můžeme použít ”intuitivní”náhled, který je ale vlastně pouze jinou verzí prvního postupu (díky němuž je také korektnost druhého postupu zaručena).

Hledáme bod na parabole M, kde tečná přímka je rovnoběžná s přímkou p:

Směrnici $\alpha \in \mathbb{R}$ tečny v bodě $a \in M$, který je grafem funkce $g(x) = x^2$, můžeme získat také právě pomocí derivace této funkce jedné proměnné, tj. $\alpha = \frac{d}{dx}(x^2) = 2x$. Směrnice přímky p je zřejmě 1. Takže z $2x = 1$ plyne $x = \frac{1}{2}$ a tedy $y = x^2 = \frac{1}{4}$.

Vzdálenost ρ bodu $(x, y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) \in M$ od přímky $p :\ x' - y' - 2 = 0$ je tedy

$$\varrho = \frac{|x - y - 2|}{\sqrt{2}} = \frac{|\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - 2|}{\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{8}.$$

Derivace složeného zobrazení: Nechť $U \subseteq \mathbb{R}^n$ a $V \subseteq \mathbb{R}^m$ jsou otevřené množiny (v příslušných prostorech). A mějme zobrazení

$$\begin{array}{ccccc} U & \xrightarrow{\Phi} & V & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ \cap\!\!| & & \cap\!\!| & & \\ \mathbb{R}^n & & \mathbb{R}^m & & \end{array}$$

se složkami $\Phi = (g_1, \ldots, g_m)$.

Jestliže existuje derivace $\mathrm{d}\Phi(a)$ v bodě $a \in U$ a derivace $\mathrm{d}f(b)$ v bodě $b = \Phi(a) \in V$, pak existuje derivace $\mathrm{d}\Big(f \circ \Phi\Big)(a)$ a platí:

$$\mathrm{d}\Big(f \circ \Phi\Big)(a) = \mathrm{d}f(b) \circ \mathrm{d}\Phi(a) = \mathrm{d}f\Big(\Phi(a)\Big) \circ \mathrm{d}\Phi(a)$$

a maticově zapsáno je to:

$$\mathrm{d}\Big(f \circ \Phi\Big)(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial y_1}(b) & \ldots & \frac{\partial f}{\partial y_m}(b) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(a) & \ldots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1}(a) & \ldots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

kde opět ztotožňujeme lineární zobrazení s jeho maticí.

Konkrétně, pro

$$(f \circ \Phi)(x_1, \ldots, x_n) = f\Big(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_n)\Big)$$

z tohoto vyplývá tzv. řetězové pravidlo (což je jen přepis maticového násobení) a to ve tvaru

$$\frac{\partial (f \circ \Phi)}{\partial x_j}(a) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial y_k}(b) \cdot \frac{\partial g_k}{\partial x_j}(a)$$

7.3 Najděte derivaci složené funkce $f \circ \Phi$, kde $f = f(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je spojitě diferencovatelná funkce a

$$\Phi : x = \frac{s}{t}, \quad y = s^2 - t\ .$$

Řešení:
Definiční obor zobrazení Φ je $D(\Phi) = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid t \neq 0\}$. Položíme $F = f \circ \Phi$ a tedy

$$F(s, t) = f\big(x(s, t),\ y(s, t)\big) = f\big(\tfrac{s}{t},\ s^2 - t\big)$$

kde složky zobrazení Φ (tj. funkce) jsou označeny stejnými symboly jako proměnné funkce f, jak často bývá zvykem. (Zpřehledňuje to zápis, pokud rozumíme tomu, co je jeho smysl).

Podle řetězového pravidla dostáváme

$$\frac{\partial F}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} = \frac{1}{t} \cdot \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{s}{t},\ s^2 - t\right) + 2s \cdot \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{s}{t},\ s^2 - t\right)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} = \left(-\frac{s}{t^2}\right) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{s}{t},\ s^2 - t\right) - \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{s}{t},\ s^2 - t\right)$$

Pro větší přehlednost neuvádíme všude konkrétní body, ve kterých se derivace počítá (tj. píšeme např. jen $\frac{\partial f}{\partial x}$ namísto $\frac{\partial f}{\partial x}(x(s, t), y(s, t))$ apod.)

Fubiniho věta: Nechť

- $E \subseteq \mathbb{R}^2$ je oblast integrace (tj. množina, na které má vůbec smysl se o integrál nějaké funkce zajímat, např. určená grafy nějakých spojitých funkcí),

- $f : E \to \mathbb{R}$ je funkce spojitá na vnitřku E° oblasti E a
- dvojný integrál z absolutní hodnoty funkce f je konečný, tj. $\iint\limits_E |f|\ dS < \infty$ (např. pokud funkce je omezená a oblast E je také omezená).

Pak existuje dvojný integrál $\iint\limits_E f\ dS$ a platí

$$\iint\limits_E f\ dS = \int\limits_{\pi_2(E)} \left(\int\limits_{\substack{\text{(vodorovný) řez množinou } E \\ \text{pomocí přímky } \mathbb{R}\times\{y\}}} f(x,y)\ dx \right) dy$$

$$\iint\limits_E f\ dS = \int\limits_{\pi_1(E)} \left(\int\limits_{\substack{\text{(svislý) řez množinou } E \\ \text{pomocí přímky } \{x\}\times\mathbb{R}}} f(x,y)\ dy \right) dx,$$

kde $\pi_1, \pi_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jsou projekce na jednotlivé osy, tedy $\pi_1(x,y) = x$ a $\pi_2(x,y) = y$.

Poznámka: Předpoklad konečnosti integrálu z absolutní hodnoty funkce je podstatný! Např. pro funkci

$$f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

na $E = \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle \setminus \{(0,0)\}$ je

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\, dy \right) dx = \int_0^1 \left[\frac{y}{x^2+y^2} \right]_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\, dx = \Big[\arctan(x) \Big]_{x=0}^{x=1} = \frac{\pi}{4}$$

zatímco

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\, dx \right) dy = \int_0^1 \left[\frac{-x}{x^2+y^2} \right]_{x=0}^{x=1} dy = \int_0^1 \frac{-1}{y^2+1}\, dy = \Big[-\arctan(y) \Big]_{y=0}^{y=1} = -\frac{\pi}{4}$$

což mimo jiné ukazuje na to, že

$$\int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \right| dx\, dy = \infty.$$

7.4 (dvojný integrál - Fubiniho věta)
Změňte pořadí integrace v integrálu

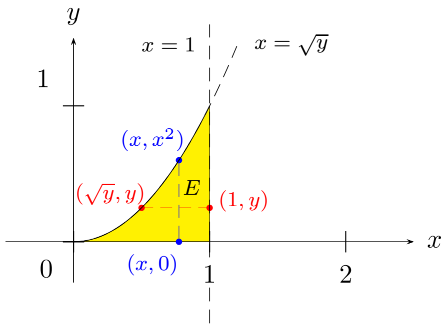
(i) $\int\limits_0^1 \int\limits_{\sqrt{y}}^1 f(x,y)\ dx\ dy,$

(ii) $\int\limits_0^{\pi} \int\limits_0^{\sin x} f(x,y)\ dy\ dx.$

Řešení:
V těchto příkladech procvičujeme jen záměnu integrace, takže předpokládáme, že funkce f předpoklady Fubiniho věty splňuje.

(a) Základní oblast integrace je

$$E: \quad 0 \le y \le 1 \quad \& \quad \sqrt{y} \le x \le 1.$$



Po rozřezání oblasti E ve směru osy y máme

$$E: \quad 0 \leq x \leq 1 \quad \& \quad 0 \leq y \leq x^2.$$

Záměna integrace pak vyjde jako:

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 f(x,y)\ dx\ dy = \int_0^1 \int_0^{x^2} f(x,y)\ dy\ dx.$$

(b) Základní oblast integrace je

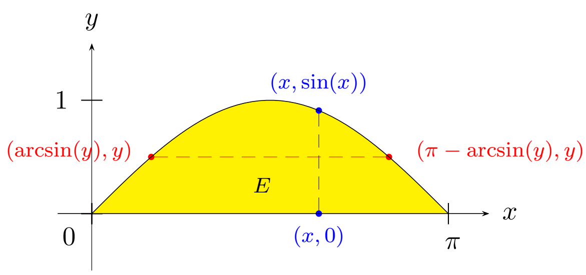
$$E: \quad 0 \leq x \leq \pi \quad \& \quad 0 \leq y \leq \sin x.$$

Máme

$$\pi_1(E) = \langle 0, \pi \rangle$$

a

$$(\{x\} \times \mathbb{R}) \cap E = \{x\} \times \langle 0, \sin x \rangle.$$



Po výměně pořadí integrace máme

$$\pi_2(E) = \langle 0, 1 \rangle$$

a pro řezy ve směru osy x vidíme, že pro $y \in \langle 0, 1 \rangle$ protíná přímka $\mathbb{R} \times \{y\}$ křivku $y = \sin(x)$ pro hodnoty $x_1 = \arcsin(y)$ (tj. $x_1 \in (0, \frac{\pi}{2})$) a pro $x_2 = \pi - x_1 = \pi - \arcsin(y)$.

Záměna integrace pak vyjde jako:

$$\int_0^\pi \int_0^{\sin x} f(x,y)\ dy\ dx = \int_0^1 \int_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} f(x,y)\ dx\ dy.$$

7.5 Určete těžiště

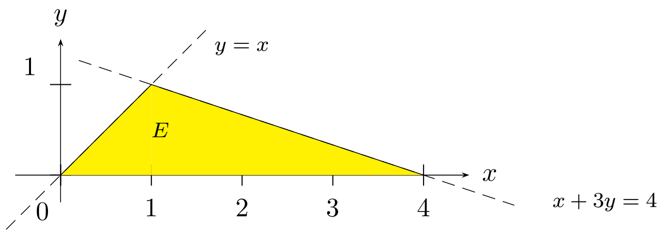
(i) trojúhelníku s vrcholy $(0,0)$, $(1,1)$, $(4,0)$, jehož plošná hustota je $\varrho(x,y)=x$.

(ii) útvaru omezeného křivkami $xy=1$ a $x+y=\frac{5}{2}$, jehož plošná hustota je $\varrho(x,y)=1$.

Řešení:
Oblast E je ve všech případech konvexní, takže těžiště bude ležet v E. Je dobré si vždy u výsledků tuto vlastnost v případě konvexních množin zkontrolovat.

(a) Oblast integrace je

$$E: \quad 0\le y\le 1, \qquad y\le x\le 4-3y.$$



Jednotlivé integrály tedy jsou
hmotnost:

$$m=\iint_E \varrho\; dS=\int_0^1\Big(\int_y^{4-3y} x\; dx\Big)\; dy=\int_0^1\Big[\frac{x^2}{2}\Big]_{x=y}^{x=4-3y}\; dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 (3y-4)^2-y^2\; dy=\frac{1}{2}\Big[\frac{(3y-4)^3}{9}-\frac{y^3}{3}\Big]_0^1=\frac{10}{3}$$

x-ová souřadnice těžiště:

$$T_1=\frac{1}{m}\iint_E x\varrho(x,y)\; dS=\frac{3}{10}\int_0^1\Big(\int_y^{4-3y} x^2\; dx\Big)\; dy=\frac{1}{10}\int_0^1\Big[x^3\Big]_{x=y}^{x=4-3y}\; dy=$$

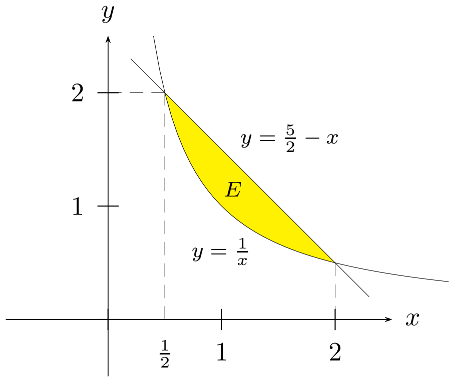
$$=\frac{1}{10}\int_0^1 (4-3y)^3-y^3\; dy=\Big[-\frac{(4-3y)^4}{120}-\frac{y^4}{40}\Big]_0^1=\frac{21}{10}$$

y-ová souřadnice těžiště:

$$T_2=\frac{1}{m}\iint_E y\varrho(x,y)\; dS=\frac{3}{10}\int_0^1\Big(\int_y^{4-3y} xy\; dx\Big)\; dy=\frac{3}{20}\int_0^1\Big[x^2y\Big]_{x=y}^{x=4-3y}\; dy=$$

$$=\frac{3}{20}\int_0^1 y(4-3y)^2-y^3\; dy=\frac{6}{5}\int_0^1 y^3-3y^2+2y\; dy=\frac{6}{5}\Big[\frac{y^4}{4}-y^3+y^2\Big]_0^1=\frac{3}{10}.$$

(b) Oblast E je vnitřní část hyperboly $xy=1$ která je oříznutá přímkou $x+y=\frac{5}{2}$.



Potřebujeme zjistit rozsah proměnných neboli průniky hyperboly s přímkou:

$$\left(xy = 1 \quad \wedge \quad x + y = \frac{5}{2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \left((x,y) = \left(\tfrac{1}{2}, 2\right) \quad \vee \quad (x,y) = \left(2, \tfrac{1}{2}\right)\right)$$

Množinu E tedy zapíšeme jako

$$E: \quad \tfrac{1}{2} \leq x \leq 2 \ \ \& \ \ \tfrac{1}{x} \leq y \leq \tfrac{5}{2} - x$$

Vzhledem k symetrii E budeme mít $T_1 = T_2$.
hmotnost:

$$m = \iint_E \varrho \, dS = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \Big(\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{5}{2}-x} 1 \, dy \Big) \, dx = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{5}{2} - x - \frac{1}{x} \, dx = \frac{15}{4} - \left[\frac{x^2}{2} + \ln x\right]_{\frac{1}{2}}^{2} = \frac{15}{8} - 2\ln 2$$

$$T_1 = T_2 = \frac{1}{m} \iint_E x\varrho(x,y) \, dS = \frac{1}{m} \int_{\frac{1}{2}}^{2} \Big(\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{5}{2}-x} x \, dy \Big) \, dx = \frac{1}{m} \int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{5}{2}x - x^2 - 1 \, dx =$$

$$= \frac{1}{m}\left[\frac{5x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + x\right]_{\frac{1}{2}}^{2} = \frac{1}{m}\frac{9}{16} = \frac{9}{30 - 32\ln 2} \doteq 1.151 \ .$$

7.6 (dvojný integrál - Fubiniho věta)
Načrtněte oblast integrace a vyčíslete integrál:

(i)
$$\iint_E \frac{1}{y^4 + 1} \, dS$$

kde oblast E je omezena křivkami $x = y^3$, $y = 2$ a $x = 0$.

(ii)
$$\iint_E e^{\frac{x}{y}} \, dS,$$

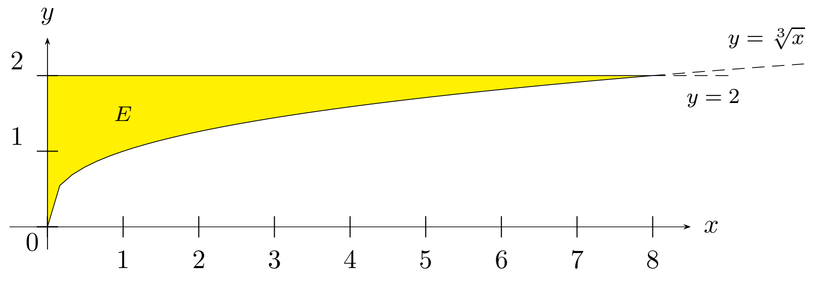
kde oblast E je trojúhelník s vrcholy $(0,0)$, $(1,1)$ a $(10,1)$.

(iii)

$$\iint_E e^{\max\{x^2,y^2\}}\, dx\, dy\ ,$$

kde $E = \langle 0,1\rangle^2 \subseteq \mathbb{R}^2$.

Řešení:
(a) Oblast je tvaru (viz obrázek).



Výhodnější bude funkci nejdříve integrovat podle proměnné x. Takže

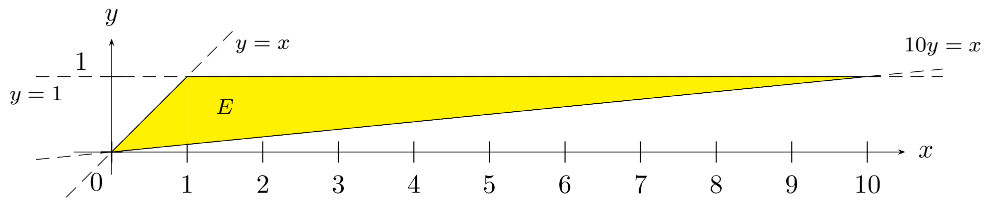
$$E: \quad 0 \leq y \leq 2 \quad \& \quad 0 \leq x \leq y^3,$$

a dostáváme tak

$$\iint_E \frac{1}{y^4+1}\, dy\, dx = \int_0^2 \Big(\int_0^{y^3} \frac{1}{y^4+1}\, dx \Big)\, dy = \int_0^2 \frac{y^3}{y^4+1} dy =$$

$$= \Big[\frac{\ln(y^4+1)}{4} \Big]_{y=0}^{y=2} = \frac{\ln 17}{4}.$$

(b) Oblast E je omezená přímkami $y = x$, $x = 10y$ a $y = 1$.



Na první pohled je jednodušší zkusit integrovat nejdříve podle x.

$$E: \ 0 \leq y \leq 1 \quad \& \quad y \leq x \leq 10y$$

$$\iint_E e^{\frac{x}{y}}\, dS = \int_0^1 \int_y^{10y} e^{\frac{x}{y}}\, dx\, dy = \int_0^1 \Big[y e^{\frac{x}{y}} \Big]_{x=y}^{x=10y}\, dy = \int_0^1 y\left(e^{10} - e\right)\, dy = \frac{1}{2}\left(e^{10} - e\right)\ .$$

Poznámka: Vyšetříme si ještě pro pořádek chování f na E v bodě $(0,0)$. Protože pro $(x,y) \in E$ máme $y \leq x \leq 10y$ a $0 < y$, tak $1 \leq \frac{x}{y} \leq 10$ a tedy $e^1 \leq e^{\frac{x}{y}} \leq e^{10}$. Funkce f je proto na $E \setminus \{(0,0)\}$ omezená, kladná a spojitá a integrál na celé E tedy existuje a je konečný.

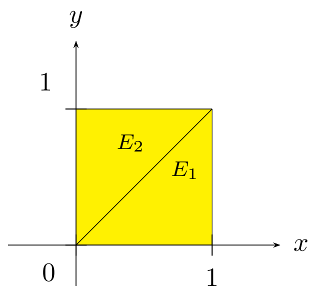
(c) Zjistíme si hodnoty funkce na množině E:

$$e^{\max\{x^2,y^2\}} = \begin{cases} e^{x^2} & \text{pro } 0 \leq y \leq x \leq 1, \\ e^{y^2} & \text{pro } 0 \leq x \leq y \leq 1. \end{cases}$$

Množinu E si tedy rozdělíme na příslušné dvě části (trojúhelníky)

$$E_1: \quad 0 \leq y \leq x \leq 1$$

$$E_2: \quad 0 \leq x \leq y \leq 1$$



Pak máme

$$\iint\limits_E e^{\max\{x^2,y^2\}}\ dx\ dy = \iint\limits_{E_1} e^{x^2}\ dx\ dy + \iint\limits_{E_2} e^{y^2}\ dx\ dy =$$

$$= \int\limits_0^1 \int\limits_0^x e^{x^2}\ dy\ dx + \int\limits_0^1 \int\limits_0^y e^{y^2}\ dx\ dy = \int\limits_0^1 xe^{x^2}\ dx + \int\limits_0^1 ye^{y^2}\ dy =$$

$$= \left[\frac{e^{x^2}}{2}\right]_{x=0}^{x=1} + \left[\frac{e^{y^2}}{2}\right]_{y=0}^{y=1} = e - 1\ .$$