9. cvičení z Matematické analýzy 2

12. března 2021

Věta o substituci: Nechť $U \subseteq \mathbb{R}^2$ je oblast integrace a $\Phi : U \to \mathbb{R}^2$ je zobrazení (nazývané *parametrizace*). Nechť dále platí, že

- Φ je spojité na U,
- Φ je prosté a spojitě diferencovatelné na U° (tj. na vnitřku U)
- $\det \Phi' \neq 0$ všude na U° a
- množina ∂U se skládá ze spojitě diferencovatelných křivek, případně bodů (tj. její příspěvek k hodnotě jakéhokoliv integrálu je nulový)

Nechť f je integrabilní funkce na $\Phi(U)$. Pak

$$\iint\limits_{\Phi(U)} f\; dS = \iint\limits_{U} (f \circ \Phi) \cdot |\det \Phi'|\; d\widetilde{S}.$$

kde pro odlišení značíme integraci podle jiných proměnných jako $d\widetilde{S}$.

9.1 (vyjádření oblasti v polárních souřadnicích)
Vyjádřete integrál

$$\iint\limits_{E} f(x,y)\; dx\; dy$$

v polárních souřadnicích v pořadí $d\varrho\; d\varphi$ pro oblasti

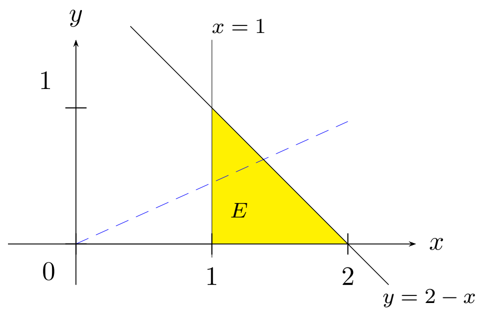
(a) E, která je plochou trojúhelníka s vrcholy $(1,0)$, $(2,0)$ a $(1,1)$.

(b) $E: \quad 0 \le x \le 1 \quad \& \quad x^2 \le y \le 1.$

Řešení:
Pro parametrizaci oblasti E v polárních souřadnicích v pořadí $d\varrho\; d\varphi$ určíme nejdříve rozsah proměnné φ. Pro pevně zvolené φ pak určíme rozsah proměnné ϱ.

(a) Oblast E je trojúhelník ohraničený přímkami $x = 1$, $y = 0$ a $x + y = 2$ a dá se popsat také jako

$$E: \quad 1 \le x \le 2 \quad \& \quad 0 \le y \le 2 - x$$



Pro parametrizaci oblasti E v polárních souřadnicích v pořadí $d\varrho\, d\varphi$ určíme nejdříve rozsah proměnné φ, což je $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$. Pro pevně zvolené φ teď určíme rozsah proměnné ϱ. Ten je ze zdola určený přímkou $x = 1$ a shora přímkou $x + y = 2$. Po dosazení $x = \varrho \cos\varphi$ a $y = \varrho \sin\varphi$ do těchto rovnic pak máme omezení proměnné ϱ shora pomocí

$$\varrho\cos\varphi + \varrho\sin\varphi = x + y = 2 \qquad \Rightarrow \qquad \varrho = \frac{2}{\cos\varphi + \sin\varrho}$$

a zdola pomocí

$$\varrho\cos\varphi = x = 1 \quad \Rightarrow \quad \varrho = \frac{1}{\cos\varphi}$$

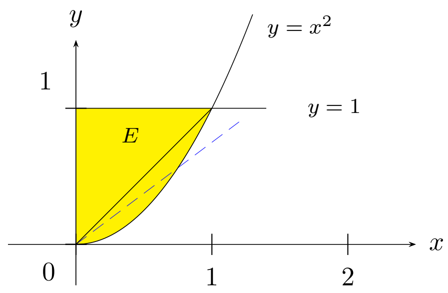
Parametrizace U oblasti E v polárních souřadnicích je tak dána jako

$$U: \qquad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} \qquad \& \qquad \frac{1}{\cos\varphi} \leq \varrho \leq \frac{2}{\cos\varphi + \sin\varphi}$$

takže přepis integrálu je následující

$$\iint\limits_E f(x,y)\; dx\; dy = \int\limits_0^{\pi/4} \int\limits_{\frac{1}{\cos\varphi}}^{\frac{2}{\cos\varphi+\sin\varphi}} \varrho \cdot f(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi)\; d\varrho\; d\varphi\ .$$

(b) Postupujeme podobně jako v (a). Oblast E je potřeba rozdělit na dvě části podle předpisu hraničních křivek - jedna je $y = x^2$ a druhá $y = 1$.



Po dosazení polárních souřadnic pak máme v jedné části omezení proměnné ϱ shora pomocí

$$\varrho\sin\varphi = y = x^2 = \varrho^2\cos^2\varphi \qquad \Rightarrow \qquad \varrho = \frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$$

a v druhé

$$\varrho\sin\varphi = y = 1 \quad \Rightarrow \quad \varrho = \frac{1}{\sin\varphi}$$

Parametrizace U oblasti E v polárních souřadnicích je tak dána jako

$$U: \qquad \left(0 \leq \varphi \leq \tfrac{\pi}{4} \quad \& \quad 0 \leq \varrho \leq \tfrac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}\right) \vee$$
$$\vee \left(\tfrac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \tfrac{\pi}{2} \quad \& \quad 0 \leq \varrho \leq \tfrac{1}{\sin\varphi}\right)$$

takže přepis integrálu je následující

$$\iint\limits_E f(x,y)\ dx\ dy = \int\limits_0^{\pi/4} \int\limits_0^{\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}} \varrho \cdot f(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi)\ d\varrho\ d\varphi + \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \int\limits_0^{\frac{1}{\sin\varphi}} \varrho \cdot f(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi)\ d\varrho\ d\varphi\ .$$

9.2 (vyjádření oblasti v polárních souřadnicích)
Vyjádřete integrál

$$\iint\limits_E f(x,y)\ dx\ dy$$

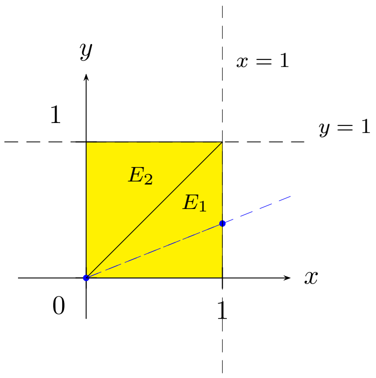
v polárních souřadnicích v pořadí $d\varrho\ d\varphi$ pro oblasti

(a) $E = \langle 0, 1\rangle^2$,

(b) $E:\quad 0 \le y \le 1 - x^2$.

Řešení:
Pro parametrizaci oblasti E v polárních souřadnicích v pořadí $d\varrho\ d\varphi$ určíme nejdříve rozsah proměnné φ. Pro pevně zvolené φ pak určíme rozsah proměnné ϱ.

(a) Rozsah proměnné φ je $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$. Proměnná ϱ pak běží od 0 až po hrany čtverce, které jsou určené různými předpisy $x = 1$ a $y = 1$. Proto je potřeba E rozdělit podle toho na dva trojúhelníky E_1 a E_2 a každý vyjádřit zvlášť.



Po dosazení polárních souřadnic pak máme v části E_1 omezení proměnné ϱ shora pomocí

$$\varrho\cos\varphi = x = 1 \quad\Rightarrow\quad \varrho = \frac{1}{\cos\varphi}$$

a v části E_2 je pak omezení proměnné ϱ shora pomocí

$$\varrho\sin\varphi = y = 1 \quad\Rightarrow\quad \varrho = \frac{1}{\sin\varphi}\ .$$

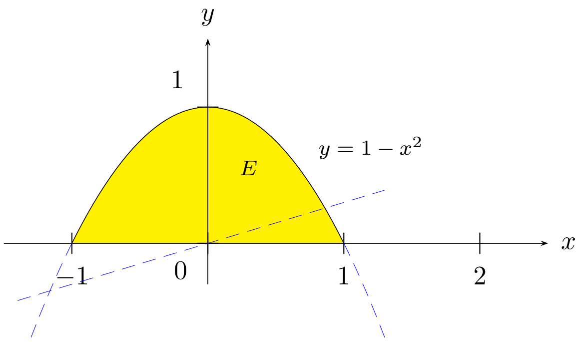
Parametrizace U oblasti E v polárních souřadnicích je tak dána jako

$$U: \qquad \left(0 \le \varphi \le \tfrac{\pi}{4} \quad \& \quad 0 \le \varrho \le \tfrac{1}{\cos\varphi}\right) \vee$$
$$\vee \left(\tfrac{\pi}{4} \le \varphi \le \tfrac{\pi}{2} \quad \& \quad 0 \le \varrho \le \tfrac{1}{\sin\varphi}\right)$$

takže přepis integrálu je následující

$$\iint_E f(x,y)\, dx\, dy = \int_0^{\pi/4} \int_0^{\frac{1}{\cos\varphi}} \varrho \cdot f(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi)\, d\varrho\, d\varphi + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{\frac{1}{\sin\varphi}} \varrho \cdot f(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi)\, d\varrho\, d\varphi\ .$$

(b) Množina E je plocha pod parabolou.



Rozsah proměnné φ tak bude $0 \le \varphi \le \pi$. Proměnná ϱ pak běží od 0 až po parabolu

$$y = 1 - x^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y - 1 = 0\ .$$

Po dosazení polárních souřadnic pak máme omezení proměnné ϱ shora pomocí

$$\varrho^2\cos^2\varphi + \varrho\sin\varphi - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \varrho = \frac{-\sin\varphi \pm \sqrt{\sin^2\varphi + 4\cos^2\varphi}}{2\cos^2\varphi}\ .$$

Protože $\varrho \ge 0$ tak (i z náčrtu) máme, že ten správný kořen je ten s volbou znaménka $+$ a ještě si to můžeme zjednodušit pomocí

$$\sin^2\varphi + 4\cos^2\varphi = (1 - \cos^2\varphi) + 4\cos^2\varphi = 1 + 3\cos^2\varphi$$

Parametrizace U oblasti E v polárních souřadnicích je tak dána jako

$$U: \quad 0 \le \varphi \le \pi \quad \& \quad 0 \le \varrho \le \frac{-\sin\varphi + \sqrt{1 + 3\cos^2\varphi}}{2\cos^2\varphi}$$

takže přepis integrálu je následující

$$\iint_E f(x,y)\, dx\, dy = \int_0^{\pi} \int_0^{\frac{-\sin\varphi+\sqrt{1+3\cos^2\varphi}}{2\cos^2\varphi}} \varrho \cdot f(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi)\, d\varrho\, d\varphi\ .$$

Jak to bude s tím druhým kořenem ϱ, který nám vyšel? Ten bude odpovídat druhému průsečíku přímky s parabolou. Ukažme si to podrobněji. Jestliže máme např. $\varphi \in (0,\pi)$, pak protější bod odpovídá úhlu $\varphi' = \varphi + \pi \in (\pi, 2\pi)$. Pro ten opět dostaneme rovnici

$$\varrho^2 \cos^2 \varphi' + \varrho \sin \varphi' - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \varrho = \frac{-\sin\varphi' \pm \sqrt{1+3\cos^2\varphi'}}{2\cos^2\varphi'} .$$

kde opět pouze pro znaménko " + " vychází $\varrho \geq 0$. To vypadá, že se ten kořen se znaménkem " − " opět někde ztratil. Ve skutečnosti však máme

$$\frac{-\sin\varphi' + \sqrt{1+3\cos^2\varphi'}}{2\cos^2\varphi'} = \frac{-\sin(\varphi+\pi) + \sqrt{1+3\cos^2(\varphi+\pi)}}{2\cos^2(\varphi+\pi)} = \frac{\sin\varphi + \sqrt{1+3\cos^2\varphi}}{2\cos^2\varphi}$$

což je přesně ten druhý případ (až na celkové znaménko) z prvního výpočtu.

9.3 (polární souřadnice)

Použitím polárních souřadnic spočítejte integrály

(a)

$$\int_{-2}^{2} \int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \, dy \, dx,$$

(b)

$$\int_{0}^{1} \int_{x}^{\sqrt{2-x^2}} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \, dy \, dx$$

Řešení:

Polární souřadnice je vhodné používat vzhledem když množina a/nebo funkce vykazují rotační symetrii. Je to transformace s předpisem

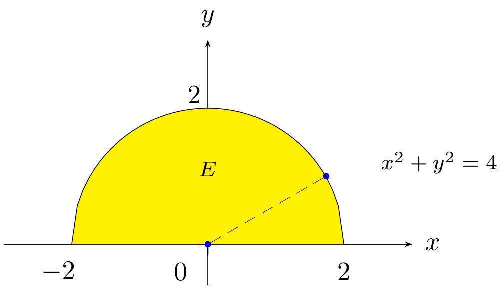
$$\Phi : \quad \begin{array}{rcl} x & = & r\cos\varphi \\ y & = & r\sin\varphi \end{array}$$

jejíž jakobián je $\det \Phi' = r$.

(a) Oblast integrace je

$$E : \qquad -2 \leq x \leq 2 \quad \& \quad 0 \leq y \leq \sqrt{4-x^2}$$

což je půlkruh o poloměru 2 v horní polorovině a se středem v počátku.



Jeho parametrizace $E = \Phi(U)$ pomocí polárních souřadnic Φ je tvaru

$$U: \quad 0 \le \varphi \le \pi \quad \& \quad 0 \le r \le 2 \,.$$

takže máme

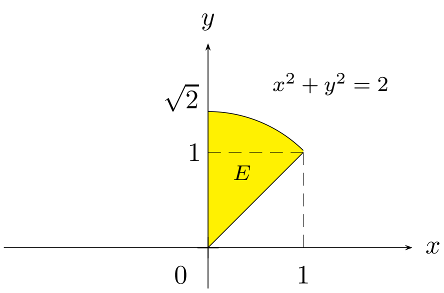
$$\int_{-2}^{2} \int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \, dy \, dx = \iint_{E=\Phi(U)} \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \, dS = \iint_U r^2 \underbrace{(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)}_{=\cos 2\varphi} \, dr \, d\varphi =$$

$$= \left(\int_0^2 r^2 \, dr \right) \cdot \underbrace{\left(\int_0^\pi \cos 2\varphi \, d\varphi \right)}_{=0} = 0 \,.$$

(b) Oblast integrace je

$$E: \quad 0 \le x \le 1 \quad \& \quad x \le y \le \sqrt{2 - x^2}$$

což je kruhová výseč.



Její parametrizace $E = \Psi(U)$ ve sférických souřadnicích je tvaru

$$U: \quad 0 \le r \le \sqrt{2} \quad \& \quad \frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \,.$$

Takže máme

$$\int_0^1 \int_x^{\sqrt{2-x^2}} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \, dy \, dx = \iint_{E=\Psi(U)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \, dS = \iint_U r \cos\varphi \, dr \, d\varphi =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sqrt{2}} r \cos\varphi \, dr \, d\varphi = \left(\int_0^{\sqrt{2}} r \, dr \right) \cdot \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \, d\varphi \right) = 1 \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \,.$$

Poznámka: Použili jsme vztah

$$\iint_{X \times Y} f(x) g(y) \, dV = \left(\int_X f(x) \, dx \right) \cdot \left(\int_Y g(y) \, dy \right)$$

pro integrabilní funkce $f : X \to \mathbb{R}$ a $g : Y \to \mathbb{R}$.

9.4 (plocha zadaná v polárních souřadnicích)

Vypočítejte integrál

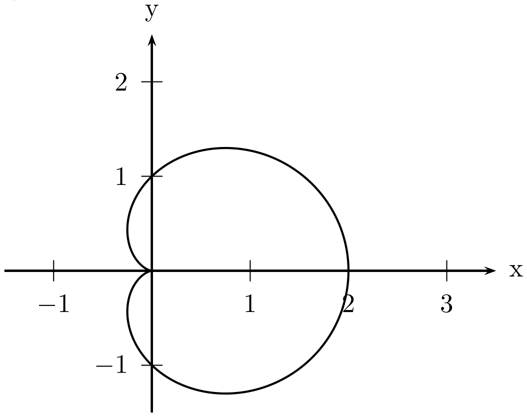
$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\, dS$$

použitím polárních souřadnic, kde D je ohraničeno křivkou $r = 1 + \cos\varphi$.

Řešení:
V polárních souřadnicích (viz předchozí příklad) je oblast dána jako

$$U: \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \quad \& \quad 0 \le r \le 1 + \cos\varphi$$

položíme tedy $D := \Phi(U)$ (což je mimochodem v kartézských souřadnicích plocha ohraničená křivkou nazývanou *kardioida*).



Použitím věty o substituci dostaneme

$$\iint_{D=\Phi(U)} \sqrt{x^2+y^2}\, dS = \iint_U r \cdot r\, dS =$$

$$= \int_0^{2\pi} \Big(\int_0^{1+\cos\varphi} r^2\, dr \Big)\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^3}{3}\right]_{r=0}^{r=1+\cos\varphi} d\varphi = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} (1+\cos\varphi)^3\, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} (\cos^3\varphi + 3\cos^2\varphi + 3\cos\varphi + 1)\, d\varphi = \pi + \frac{2}{3}\pi = \frac{5}{3}\pi.$$

Poznámka: Z periodicity a lichosti funkcí plyne, že $\int_0^{2\pi} \cos^{2n+1}\varphi\, d\varphi = 0$ pro $n \ge 0$.

9.5 (oblast zadaná v polárních souřadnicích)

Určete velikost plochy E (v kartézských souřadnicích), kterou ohraničuje křivka $\varrho = \sin\varphi, \quad \varphi \in \langle 0, \pi \rangle$, zadaná pomocí polárních souřadnic. Načrtněte danou křivku v polárních i kartézských souřadnicích.

Řešení:
V polárních souřadnicích je oblast dána jako

$$U: \quad 0 \le \varphi \le \pi \quad \& \quad 0 \le \varrho \le \sin\varphi$$

položíme tedy $E := \Phi(U)$. Použitím věty o substituci dostaneme pro velikost plochy E (v kartézských souřadnicích!), že

$$\iint_{E=\Phi(U)} 1\ dS = \iint_U r\ dr\ d\varphi = \int_0^\pi \Big(\int_0^{\sin\varphi} r\ dr \Big)\ d\varphi = \int_0^\pi \left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{r=\sin\varphi} d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin^2\varphi\ d\varphi = \frac{\pi}{4}.$$

Trik k výpočtu integrálu: $\int_0^{2\pi} \sin^2\varphi\ d\varphi = \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\ d\varphi$ a současně $\int_0^{2\pi} (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)\ d\varphi = \int_0^{2\pi} 1\ d\varphi = 2\pi$ tedy

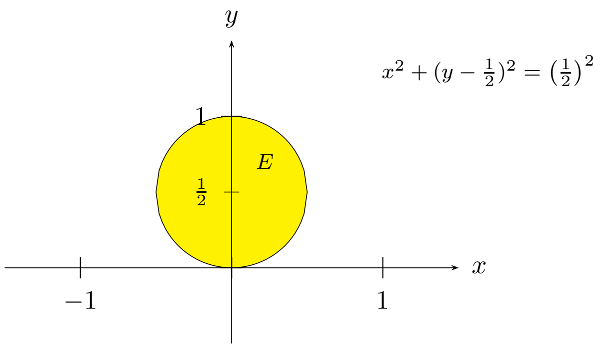
$$\int_0^\pi \sin^2\varphi\ d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin^2\varphi\ d\varphi = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

A co to vlastně máme za křivku: Protože máme $\varrho(\varphi) = \sin\varphi$, můžeme body (x, y) křivky parametrizovat pomocí úhlu φ a pak platí, že

$$x = \rho\cos\varphi = \sin\varphi\cos\varphi$$

$$y = \rho\sin\varphi = \sin^2\varphi$$

Současně máme vztah $x^2 + y^2 = \rho^2 = (\sin\varphi)^2$ a spojením tak dostáváme $x^2 + y^2 = y$, což je rovnice pro danou křivku. Její úpravou máme $x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$, což je prostě kružnice se středem $(0, \frac{1}{2})$ a poloměrem $\frac{1}{2}$.



Protože jsme měli spočítat plochu, kterou kružnice (v kartézských souřadnicích) ohraničuje, není divu, že nám vyšla plocha kruhu o poloměru $\frac{1}{2}$, tedy $\pi/4$.

Fubiniho věta (pro trojný integrál): Nechť $E \subseteq \mathbb{R}^3$ je oblast integrace a $f : E \to \mathbb{R}$ je funkce integrabilní v absolutní hodnotě (např. spojitá a omezená). Pak

$$\iiint\limits_E f\ dV = \iint\limits_{\pi_{1,2}(E)} \Bigg(\int\limits_{\substack{\textit{řez množinou } E \textit{ pomocí} \\ \textit{přímky } \{(x,y)\}\times\mathbb{R}}} f(x,y,z)\ dz \Bigg)\ dx\ dy,$$

kde $\pi_{1,2} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ je projekce, $\pi_{1,2}(x,y,z) = (x,y)$. Případně:

$$\iiint\limits_E f\ dV = \int\limits_{\pi_3(E)} \Bigg(\iint\limits_{\substack{\textit{řez množinou } E \textit{ pomocí} \\ \textit{roviny } \mathbb{R}^2\times\{z\}}} f(x,y,z)\ dx\ dy \Bigg)\ dz$$

kde $\pi_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ je opět projekce, $\pi_3(x,y,z) = z$.

Řezy v prvním případě jsou "vlákna" (která ale nemusí být souvislá). Po zintegrování podél vlákna, pak integrujeme přes příslušný průmět dané množiny (zde přes $\pi_{1,2}(E)$), kde postup dále můžeme opakovat (tj. průmět opět řežeme na vlákna atd.)

Jiná možnost, jak spočítat integrál, pak je ve druhém případě množinu nejdříve nařezat na dvourozměrné "plátky", přes ně integrovat danou funkci a výsledek pak zintegrovat přes jednorozměrný průmět množiny E do směru zbylé souřadnice (zde přes $\pi_3(E)$).

9.6 (trojný integrál - Fubiniho věta)

Vypočtěte

(a)

$$\iiint\limits_E xyz\ dV,$$

kde E je ohraničeno plochami $y = x^2$, $x = y^2$, $z = xy$ a $z = 0$.

(b)

$$\iiint\limits_E y\ dV,$$

kde E je ohraničeno shora rovinou $z = x + 2y$ a leží nad oblastí v rovině $z = 0$ ohraničené křivkami $y = x^2$, $y = 0$, $x = 1$.

Řešení:

(i) Projekce $\pi_{1,2}(E)$ oblasti integrace E do roviny xy je určena množinou omezenou křivkami $y = x^2$ a $x = y^2$. Ty totiž určují omezenou oblast v 1. kvadrantu, tj. tam, kde je $x, y \geq 0$. A proto je pak už (pro $x, y \geq 0$) oblast E určena v tomto kvadrantu grafem funkce $z = xy \geq 0$ shora a grafem funkce $z = 0$ zdola. Oblast integrace je tak

$$E: \quad 0 \leq z \leq xy, \quad \underbrace{x^2 \leq y \leq \sqrt{x}, \quad 0 \leq x \leq 1}_{\text{projekce } E \text{ do roviny } xy}.$$

Máme tedy

$$\iiint\limits_E xyz\ dV = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \int_0^{xy} xyz\ dz\ dy\ dx = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \frac{(xy)^3}{2}\ dy\ dx = \frac{1}{8}\int_0^1 x^5 - x^{11}\ dx =$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{12}\right) = \frac{1}{96}.$$

(ii) Oblast integrace je

$$E: \quad 0 \leq z \leq x + 2y, \quad \underbrace{0 \leq y \leq x^2, \quad 0 \leq x \leq 1}_{\text{projekce } E \text{ do roviny } xy}.$$

I zde platí

$$\iiint\limits_E y\ dV = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{x^2} \int\limits_0^{x+2y} y\ dz\ dy\ dx = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{x^2} y(x+2y)\ dy\ dx = \int\limits_0^1 \left[\frac{y^2}{2}x + \frac{2y^3}{3}\right]_{y=0}^{y=x^2} dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \frac{x^5}{2} + \frac{2x^6}{3}\ dx = \frac{1}{12} + \frac{2}{21} = \frac{5}{28}.$$

9.7 (trojný integrál - Fubiniho věta)
Vypočtěte

$$\iiint\limits_E xy\ dV,$$

kde E je čtyřstěn s vrcholy $(0,0,0)$, $(0,1,0)$, $(1,1,0)$ a $(0,1,1)$.

Řešení:
Oblast integrace E je množina ohraničená rovinami $x=0$, $y=1$, $z=0$ a $z=y-x$. Tedy můžeme psát např.

$$E: \quad 0 \le z \le y-x, \quad 0 \le x \le y, \quad 0 \le y \le 1.$$

Máme tedy

$$\iiint\limits_E xy\ dV = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{y} \int\limits_0^{y-x} xy\ dz\ dx\ dy = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{y} y^2x - x^2y\ dx\ dy = \int\limits_0^1 \left[y^2\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}y\right]_{x=0}^{x=y} dy =$$

$$= \int\limits_0^1 \frac{y^4}{2} - \frac{y^4}{3}\ dy = \left[\frac{y^5}{30}\right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{30}.$$

9.8 (trojný integrál - Fubiniho věta)
Načrtněte oblast integrace:

$$\int\limits_0^1 \int\limits_x^{2x} \int\limits_0^{x+y} dz\, dy\, dx$$

Řešení:
Oblast integrace je

$$E: \quad 0 \le x \le 1 \quad \& \quad x \le y \le 2x \quad \& \quad 0 \le z \le x+y\ .$$

Projekce $\pi_{1,2}(E)$ do roviny xy je dána jako

$$\pi_{1,2}(E): \quad 0 \leq x \leq 1 \quad \& \quad x \leq y \leq 2x$$

což je trojúhelník s vrcholy $(0,0)$, $(1,1)$ a $(1,2)$. Oblast E je pak vše, co je nad trojúhelníkem až po rovinu $z = x + y$. Z polohy této roviny pak plyne, že E je pětistěn s vrcholy $(0,0,0)$, $(1,1,0)$, $(1,2,0)$, $(1,1,2)$ a $(1,2,3)$. Integrál vyjadřuje jeho objem.