10. cvičení z Matematické analýzy 2

22. - 27. listopadu 2021

Fubiniho věta (pro trojný integrál): Nechť $E \subseteq \mathbb{R}^3$ je oblast integrace a $f : E \to \mathbb{R}$ je funkce integrabilní v absolutní hodnotě (např. spojitá a omezená). Pak

$$\iiint_E f\ dV = \iint_{\pi_{1,2}(E)} \Big(\int_{\substack{\text{řez množinou } E \text{ pomocí} \\ \text{přímky } \{(x,y)\}\times\mathbb{R}}} f(x,y,z)\ dz \Big)\ dx\ dy,$$

kde $\pi_{1,2} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ je projekce, $\pi_{1,2}(x,y,z) = (x,y)$. Případně:

$$\iiint_E f\ dV = \int_{\pi_3(E)} \Big(\iint_{\substack{\text{řez množinou } E \text{ pomocí} \\ \text{roviny } \mathbb{R}^2\times\{z\}}} f(x,y,z)\ dx\ dy \Big)\ dz$$

kde $\pi_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ je opět projekce, $\pi_3(x,y,z) = z$.

Řezy v prvním případě jsou "vlákna" (která ale nemusí být souvislá). Po zintegrování podél vlákna, pak integrujeme přes příslušný průmět dané množiny (zde přes $\pi_{1,2}(E)$), kde postup dále můžeme opakovat (tj. průmět opět řežeme na vlákna atd.)

Jiná možnost, jak spočítat integrál, pak je ve druhém případě množinu nejdříve nařezat na dvourozměrné "plátky", přes ně integrovat danou funkci a výsledek pak zintegrovat přes jednorozměrný průmět množiny E do směru zbylé souřadnice (zde přes $\pi_3(E)$).

10.1 (trojný integrál - Fubiniho věta)

Vypočtěte

(a)

$$\iiint_E xyz\ dV,$$

kde E je ohraničeno plochami $y = x^2$, $x = y^2$, $z = xy$ a $z = 0$.

(b)

$$\iiint_E y\ dV,$$

kde E je ohraničeno shora rovinou $z = x + 2y$ a leží nad oblastí v rovině $z = 0$ ohraničené křivkami $y = x^2$, $y = 0$, $x = 1$.

Řešení:

(i) Projekce $\pi_{1,2}(E)$ oblasti integrace E do roviny xy je určena množinou omezenou křivkami $y = x^2$ a $x = y^2$. Ty totiž určují omezenou oblast v 1. kvadrantu, tj. tam, kde je $x, y \geq 0$. A proto je pak už (pro $x, y \geq 0$) oblast E určena v tomto kvadrantu grafem funkce $z = xy \geq 0$ shora a grafem funkce $z = 0$ zdola. Oblast integrace je tak

$$E: \quad 0 \leq z \leq xy, \quad \underbrace{x^2 \leq y \leq \sqrt{x}, \quad 0 \leq x \leq 1}_{\text{projekce } E \text{ do roviny } xy}.$$

Máme tedy

$$\iiint_E xyz\ dV = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \int_0^{xy} xyz\ dz\ dy\ dx = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \frac{(xy)^3}{2}\ dy\ dx = \frac{1}{8} \int_0^1 x^5 - x^{11}\ dx =$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{12}\right) = \frac{1}{96}.$$

(ii) Oblast integrace je

$$E: \quad 0 \le z \le x + 2y, \quad \underbrace{0 \le y \le x^2, \quad 0 \le x \le 1}_{\text{projekce } E \text{ do roviny } xy}.$$

I zde platí

$$\iiint\limits_E y\ dV = \int_0^1 \int_0^{x^2} \int_0^{x+2y} y\ dz\ dy\ dx = \int_0^1 \int_0^{x^2} y(x+2y)\ dy\ dx = \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2}x + \frac{2y^3}{3}\right]_{y=0}^{y=x^2} dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{x^5}{2} + \frac{2x^6}{3}\ dx = \frac{1}{12} + \frac{2}{21} = \frac{5}{28}.$$

10.2 (trojný integrál - Fubiniho věta)

Vypočtěte

$$\iiint\limits_E xy\ dV,$$

kde E je čtyřstěn s vrcholy $(0,0,0)$, $(0,1,0)$, $(1,1,0)$ a $(0,1,1)$.

Řešení:

Oblast integrace E je množina ohraničená rovinami $x = 0$, $y = 1$, $z = 0$ a $z = y - x$. Tedy můžeme psát např.

$$E: \quad 0 \le z \le y - x, \quad 0 \le x \le y, \quad 0 \le y \le 1.$$

Máme tedy

$$\iiint\limits_E xy\ dV = \int_0^1 \int_0^{y} \int_0^{y-x} xy\ dz\ dx\ dy = \int_0^1 \int_0^{y} y^2x - x^2y\ dx\ dy = \int_0^1 \left[y^2\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}y\right]_{x=0}^{x=y} dy =$$

$$= \int_0^1 \frac{y^4}{2} - \frac{y^4}{3}\ dy = \left[\frac{y^5}{30}\right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{30}.$$

10.3 (trojný integrál - Fubiniho věta)

Načrtněte oblast integrace:

(a)

$$\int_0^1 \int_x^{2x} \int_0^{x+y} dz\, dy\, dx$$

(b)

$$\int_0^1 \int_{x^2}^{2x} \int_0^{x+y} dz\, dy\, dx$$

Řešení:

(i) Oblast integrace je

$$E: \quad 0 \le x \le 1 \quad \& \quad x \le y \le 2x \quad \& \quad 0 \le z \le x + y\ .$$

Projekce $\pi_{1,2}(E)$ do roviny xy je dána jako

$$\pi_{1,2}(E): \quad 0 \le x \le 1 \quad \& \quad x \le y \le 2x$$

což je trojúhelník s vrcholy $(0,0)$, $(1,1)$ a $(1,2)$. Oblast E je pak vše, co je nad trojúhelníkem až po rovinu $z = x + y$. Z polohy této roviny pak plyne, že E je pětistěn s vrcholy $(0,0,0)$, $(1,1,0)$, $(1,2,0)$, $(1,1,2)$ a $(1,2,3)$. Integrál vyjadřuje jeho objem.

(ii) Postupujeme podobně jako v (i). Oblast integrace je

$$E: \quad 0 \le x \le 1 \quad \& \quad x2^{\le} y \le 2x \quad \& \quad 0 \le z \le x + y\ .$$

Projekce $\pi_{1,2}(E)$ do roviny xy je dána jako

$$\pi_{1,2}(E): \quad 0 \le x \le 1 \quad \& \quad x^2 \le y \le 2x$$

Oblast E je pak vše, co je nad touto projekcí až po rovinu $z = x+y$ (liší se od části (i) jen zakulaceným okrajem). Integrál vyjadřuje objem E.

Věta o substituci (trojný integrál): Nechť $U \subseteq \mathbb{R}^3$ je oblast integrace a $\Phi : U \to \mathbb{R}^3$ je zobrazení (nazývané *parametrizace*). Nechť dále platí, že

- Φ je spojité na U,
- Φ je prosté a spojitě diferencovatelné na U° (tj. na vnitřku U)
- $\det \Phi' \neq 0$ všude na U° a
- množina ∂U se skládá ze spojitě diferencovatelných ploch, křivek, případně bodů (tj. její příspěvek k hodnotě jakéhokoliv trojného integrálu je nulový)

Nechť f je integrabilní funkce na $\Phi(U)$. Pak

$$\iiint_{\Phi(U)} f\ dV = \iiint_U (f \circ \Phi) \cdot |\det \Phi'|\ d\widetilde{V}.$$

kde pro odlišení značíme integraci podle jiných proměnných jako $d\widetilde{V}$.

Cylindrické souřadnice mají předpis:

$$\Phi: \begin{array}{rcl} x &=& r\cos\varphi \\ y &=& r\sin\varphi \\ z &=& h \end{array}$$

kde $(r,\varphi,h) \in \langle 0,+\infty) \times \langle 0, 2\pi\rangle \times \mathbb{R}$. Dále je

$$\Phi' = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \det\Phi' = r \ .$$

Moment setrvačnosti: Moment setrvačnosti J tělesa $E \subseteq \mathbb{R}^3$ s hustotou $\varrho(x,y,z)$ vzhledem k ose otáčení p je definován jako

$$J = \iiint\limits_E v^2(x,y,z)\cdot\varrho(x,y,z)\ dV$$

kde funkce $v(x,y,z)$ je vzdálenost bodu (x,y,z) od osy p. Tělesa s velkým momentem setrvačnosti jsou např. setrvačníky, které je těžké roztočit a pak i zastavit.

10.4 (cylindrické souřadnice)

Zapište integrály pomocí cylindrických souřadnic a pak je spočítejte:

(a)

$$\int\limits_{-2}^{2}\int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} (x^2+y^2)\ dz\ dy\ dx.$$

(b)

$$\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int\limits_{x^2+y^2}^{2-x^2-y^2} (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\ dz\ dy\ dx\ .$$

Řešení:

(a) Oblast integrace je

$$E: \quad |x|\le 2 \quad \& \quad |y| \le \sqrt{4-x^2} \quad \& \quad \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 2$$

neboli

$$E: \quad x^2 \le 4 \quad \& \quad x^2+y^2 \le 4 \quad \& \quad \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 2$$

a tedy

$$E: \quad \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 2,$$

což je kužel s výškou 2 a poloměrem podstavy také 2, který stojí na svém vrcholu v počátku. Jako parametrizaci E si vezmeme

$$U: \quad 0 \le r \le h \le 2 \quad \& \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \ .$$

Můžeme tedy psát

$$\int\limits_{-2}^{2}\int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} (x^2+y^2)\ dz\ dy\ dx = \iiint\limits_{E=\Phi(U)} (x^2+y^2)\ dV =$$

$$= \iiint\limits_U r^2\cdot r\ dV = \int\limits_0^2\int\limits_0^h\int\limits_0^{2\pi} r^3\ d\varphi\ dr\ dh = 2\pi\int\limits_0^2\int\limits_0^h r^3\ \ dr\ dh =$$

$$= \frac{\pi}{2}\int\limits_0^2 h^4\ \ dh = \frac{\pi}{10}\cdot 2^5 = \frac{16}{5}\pi.$$

Všimněme si, že spočítaný integrál vyjadřuje moment setrvačnosti kužele E s hustotou $\varrho(x,y,z)=1$ vzhledem k jeho ose symetrie (což je osa z).

(b) Oblast E je popsána jako

$$E: \quad -1 \le x \le 1 \quad \& \quad -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2} \quad \& \quad x^2+y^2 \le z \le 2-x^2-y^2$$

neboli

$$E: \quad |x| \le 1 \quad \& \quad |y| \le \sqrt{1-x^2} \quad \& \quad x^2+y^2 \le z \le 2-x^2-y^2$$

a ekvivalentně

$$E: \quad x^2+y^2 \le 1 \quad \& \quad x^2+y^2 \le z \le 2-x^2-y^2$$

což je prostě oblast ležící nad kruhem o poloměru 1 v rovině xy a je sevřena mezi grafy dvou funkcí (celkově vypadá jako "čočka"). Ještě si pro pořádek ověříme, že průmět oblasti do roviny xy je skutečně kruh o průměru 1 (jinak by totiž zadání nemělo smysl). Zřejmě ale je

$$x^2+y^2 \le 2-x^2-y^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2+y^2 \le 1$$

takže je to v pořádku.

V cylindrických souřadnicích Φ je parametrizací $E=\Phi(U)$ množina

$$U: \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \quad \& \quad 0 \le r \le 1 \quad \& \quad r^2 \le h \le 2-r^2 \ .$$

Pak můžeme psát

$$\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{2-x^2-y^2} (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} \ dz \ dy \ dx = \iiint\limits_{E=\Phi(U)} (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} \ dV =$$

$$= \iiint\limits_{U} r^3 \cdot r \ d\varphi \ dh \ dr = \int_0^1 \int_{r^2}^{2-r^2} \int_0^{2\pi} r^4 \ d\varphi \ dh \ dr = 2\pi \int_0^1 \int_{r^2}^{2-r^2} r^4 \ dh \ dr =$$

$$= 4\pi \int_0^1 r^4(1-r^2) \ \ dr = 4\pi \left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right) = \frac{8}{35}\pi \ .$$

Všimněme si, že spočítaný integrál vyjadřuje moment setrvačnosti "čočky" E s hustotou $\varrho(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2}$ vzhledem k ose z.

10.5 (cylindrické souřadnice)
Určete moment setrvačnosti J tělesa

$$E: \quad x^2+y^2+z^2 \le 2 \ \ \& \ \ x^2+y^2 \le 1 \ \ \& \ \ x,y,z \ge 0.$$

vzhledem k ose otáčení z.

Řešení:
Těleso E je průnik koule o poloměru $\sqrt{2}$, válce o průměru 1, jehož osa prochází středem koule a 1. oktantu (tj. osminy prostoru se všemi souřadnicemi nezápornými). Použijeme proto cylindrické souřadnice:

$$\Phi: \quad x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi \qquad z = h\ .$$

Po dosazení do nerovností máme

$$r^2 + h^2 \leq 2, \quad r^2 \leq 1, \quad h \geq 0$$

přičemž rozsah úhlu je $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Oblast parametrizace U tak bude

$$U: \ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \quad \& \quad 0 \leq r \leq 1 \quad \& \quad 0 \leq h \leq \sqrt{2-r^2}\ .$$

Pak dostáváme

$$J = \iiint\limits_{E=\Phi(U)} x^2 + y^2 \ \mathrm{d}V = \iiint\limits_{U} r^2 \cdot r \ \mathrm{d}h \ \mathrm{d}r \ \mathrm{d}\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{2-r^2}} r^2 \cdot r \ \mathrm{d}h \ \mathrm{d}r \ \mathrm{d}\varphi =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 r^3 \sqrt{2-r^2} \ \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi = \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \ \mathrm{d}\varphi \right) \cdot \left(\int_0^1 r^3 \sqrt{2-r^2} \ \mathrm{d}r \right) = \left\{ \begin{smallmatrix} u=2-r^2 \\ du=-2rdr \end{smallmatrix} \right\} =$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_2^1 -\tfrac{1}{2}(2-u)\sqrt{u} \ \mathrm{d}u = \frac{\pi}{2} \int_1^2 u^{1/2} - \tfrac{1}{2}u^{3/2} \ \mathrm{d}u = \frac{\pi}{2} \left[\tfrac{2}{3}u^{3/2} - \tfrac{1}{5}u^{5/2} \right]_1^2 =$$

$$= \frac{\pi}{2} \left(\frac{4}{3}\sqrt{2} - \frac{4}{5}\sqrt{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \right) = \pi \left(\frac{4}{15}\sqrt{2} - \frac{7}{30} \right)\ .$$

10.6 (cylindrické souřadnice)

(a) Určete hmotnost tělesa E omezeného plochami $x^2 + z^2 = 1$, $x + \frac{y}{2} + z = 2$ a prostorem $x, y, z \geq 0$. Hustota tělesa je $\varrho(x, y, z) = |y|$.

(b) Určete objem tělesa E omezeného zdola plochou $x^2 + y^2 = z$ a shora plochou $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.

Řešení:
(a) Těleso E je část válce seříznuta šikmo rovinou $x + \frac{y}{2} + z = 2$ a ležící v části prostoru $x, y, z \geq 0$. Tedy:

$$E: \quad x^2 + z^2 \leq 1, \quad x \geq 0, \quad z \geq 0, \quad 0 \leq y \leq 4 - 2x - 2z.$$

Použijeme proto cylindrické souřadnice ve tvaru

$$\Phi: \begin{array}{rcl} x & = & r\cos\varphi \\ y & = & h \\ z & = & r\sin\varphi \end{array}$$

s absolutní hodnotou jakobiánu opět rovnou r.

Po dosazení této parametrizace do podmínek pro E a především pomocí geometrické představy E získáme oblast U parametrizace množiny E jako:

$$U: \ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \quad \& \quad 0 \leq r \leq 1 \quad \& \quad 0 \leq h \leq 4 - 2r(\cos\varphi + \sin\varphi)\ .$$

Pak můžeme psát

$$\text{hmotnost}(E) = \iiint\limits_E \varrho(x,y,z)\ dV = \iiint\limits_E |y|\ dV = \iiint\limits_U hr\ d\varphi\ dh\ dr =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \int_0^{4-2r(\cos\varphi+\sin\varphi)} hr\ dh\ dr\ d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r \cdot \frac{(4-2r(\cos\varphi+\sin\varphi))^2}{2}\ dr\ d\varphi =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 8r - 8r^2(\cos\varphi+\sin\varphi) + 2r^3(1+2\cos\varphi\sin\varphi)\ dr\ d\varphi =$$

$$= \underbrace{\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 8\ d\varphi\right)}_{=4\pi} \cdot \underbrace{\left(\int_0^1 r\ dr\right)}_{=\frac{1}{2}} - \underbrace{\left(\int_0^1 8r^2\ dr\right)}_{\frac{8}{3}} \cdot \underbrace{\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi + \sin\varphi\ d\varphi\right)}_{=2} + \underbrace{\left(\int_0^1 2r^3\ dr\right)}_{\frac{2}{4}} \cdot \underbrace{\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1+\sin(2\varphi)\ d\varphi\right)}_{=\frac{\pi}{2}+1} =$$

$$= \tfrac{27\pi-58}{12}$$

(b) Těleso E je určeno zdola paraboloidem a shora sférou, tedy jako

$$E: \quad x^2+y^2 \le z \le \sqrt{2-x^2-y^2}.$$

K její parametrizaci použijeme (obvyklé) válcové souřadnice. Průmět E do roviny xy bude kružnice jejíž poloměr r_0 bude dán průnikem obou ploch, tj. v nerovnostech pro E nastane rovnost $r_0^2 = \sqrt{2-r_0^2}$. Tedy $0 = r_0^4 + r_0^2 - 2 = (r_0^2+2)(r_0^2-1)$ a proto $r_0 = 1$. Odpovídající množina U parametrizující E tak bude (opět např. z náčrtu nebo po dosazení $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = h$ do nerovností pro E):

$$U: \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \quad \& \quad 0 \le r \le 1 \quad \& \quad r^2 \le h \le \sqrt{2-r^2}\ .$$

Pak můžeme psát

$$\text{objem}(E) = \iiint\limits_{E=\Phi(U)} 1\ \mathrm{d}V = \iiint\limits_U r\ \mathrm{d}h\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{r^2}^{\sqrt{2-r^2}} r\ \mathrm{d}h\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r(\sqrt{2-r^2} - r^2)\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\varphi$$

$$= \underbrace{\left(\int_0^{2\pi} 1\ \mathrm{d}\varphi\right)}_{=2\pi} \cdot \underbrace{\left(\int_0^1 r\sqrt{2-r^2} - r^3\ \mathrm{d}r\right)}_{=\frac{2\sqrt{2}-1}{3}-\frac{1}{4}} = \pi \cdot \frac{8\sqrt{2}-7}{6}\ ,$$

kde jsme spočítali integrál

$$\int_0^1 r\sqrt{2-r^2}\ \mathrm{d}r = \left\{ \begin{smallmatrix} t=2-r^2 \\ dt=-2rdr \end{smallmatrix} \right\} = -\frac{1}{2}\int_2^1 \sqrt{t}\ \mathrm{d}t = -\frac{1}{3}\left[t^{\frac{3}{2}}\right]_2^1 = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}\ .$$

Sférické souřadnice mají předpis:

$$\Psi: \begin{array}{rcl} x &=& (r\sin\vartheta)\cos\varphi \\ y &=& (r\sin\vartheta)\sin\varphi \\ z &=& r\cos\vartheta \end{array}$$

kde $(r,\varphi,\vartheta) \in \langle 0,+\infty) \times \langle 0,2\pi\rangle \times \langle 0,\pi\rangle$.

Poznámka: Sférické souřadnice jsou složením dvou (upravených) cylindrických souřadnic a sice:

$$\Psi = \Phi_2 \circ \Phi_1$$

$$\Phi_2: \begin{array}{rcl} x &=& \tilde r\cos\tilde\varphi \\ y &=& \tilde r\sin\tilde\varphi \\ z &=& \tilde z \end{array}, \quad \Phi_1: \begin{array}{rcl} \tilde r &=& r\sin\vartheta \\ \tilde\varphi &=& \varphi \\ \tilde z &=& r\cos\vartheta \end{array}$$

takže pro determinant máme

$$\det\Psi' = \det(\Phi_2)'_{|\Phi_1} \cdot \det(\Phi_1)' = \tilde r_{|\Phi_1} \cdot r = (r\sin\vartheta)\cdot r = r^2\sin\vartheta.$$

10.7 (sférické souřadnice)

Zapište integrál pomocí sférických souřadnic a pak ho spočítejte:

(a)

$$\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{0}\int_{0}^{\sqrt{9-x^2-z^2}} y\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dydzdx,$$

(b)

$$\int_{0}^{3}\int_{0}^{\sqrt{9-y^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{18-x^2-y^2}} (x^2+y^2+z^2)\,dzdxdy.$$

Řešení:

(a) Oblast integrace je

$$E: \quad |x| \le 3 \quad \& \quad -\sqrt{9-x^2} \le z \le 0 \quad \& \quad 0 \le y \le \sqrt{9-x^2-z^2}$$

neboli

$$E: \quad \underbrace{x^2 \le 9 \quad \& \quad x^2+z^2 \le 9 \quad \& \quad z \le 0}_{\text{průmět } E \text{ do roviny } xz} \quad \& \quad 0 \le y \quad \& \quad x^2+y^2+z^2 \le 9$$

a tedy

$$E: \quad z \le 0 \quad \& \quad 0 \le y \quad \& \quad x^2+y^2+z^2 \le 9,$$

což je čtvrtina koule o poloměru 3 a středem v počátku. Jako parametrizaci E si vezmeme sférické souřadnice

$$\Psi: \begin{array}{rcl} x &=& (r\sin\vartheta)\cos\varphi \\ y &=& (r\sin\vartheta)\sin\varphi \\ z &=& r\cos\vartheta \end{array}$$

a oblast

$$U: \quad 0 \le r \le 3 \quad \& \quad 0 \le \varphi \le \pi \quad \& \quad \frac{\pi}{2} \le \vartheta \le \pi\ .$$

Můžeme tedy psát

$$\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{0}\int_{0}^{\sqrt{9-x^2-z^2}} y\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dydzdx = \iiint\limits_{E=\Phi(U)} y\sqrt{x^2+y^2+z^2}\ dV =$$

$$= \iiint_U r^2 \sin\vartheta \sin\varphi \cdot r^2 |\sin\vartheta|\, dV = \int_0^3 \int_0^\pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} r^4 \sin^2\vartheta \sin\varphi \; dr\; d\varphi\; d\vartheta \;=$$

$$= \underbrace{\left(\int_0^3 r^4 \,\mathrm{d}r\right)}_{=\frac{3^5}{5}} \cdot \underbrace{\left(\int_0^\pi \sin\varphi \,\mathrm{d}\varphi\right)}_{2} \cdot \underbrace{\left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^2\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta\right)}_{=\frac{\pi}{4}} = \frac{3^5}{10}\pi \;.$$

(b) Oblast integrace je

$$E: \quad 0 \le y \le 3 \quad \& \quad 0 \le x \le \sqrt{9-y^2} \quad \& \quad \sqrt{x^2+y^2} \le z \le \sqrt{18-x^2-y^2}$$

neboli

$$E: \quad \underbrace{0 \le y \le 3 \quad \& \quad x^2+y^2 \le 9 \quad \& \quad 0 \le x}_{\text{průmět } E \text{ do roviny } xy \text{ (čtvrtkruh)}} \quad \& \quad \underbrace{\sqrt{x^2+y^2} \le z}_{\text{kužel}} \quad \& \quad \underbrace{x^2+y^2+z^2 \le 18}_{\text{koule}}$$

Podíváme se, kde plášť kuželu protne se sférou, tj. kdy nastává $z = \sqrt{x^2+y^2}$ a $x^2+y^2+z^2 = 18$. Po dosazení dostaneme

$$18 = x^2+y^2+\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 = 2(x^2+y^2) \quad \Leftrightarrow \quad x^2+y^2 = 9$$

Jako parametrizaci E si vezmeme sférické souřadnice

$$\Psi: \begin{array}{ccc} x & = & (r\sin\vartheta)\cos\varphi \\ y & = & (r\sin\vartheta)\sin\varphi \\ z & = & r\cos\vartheta \end{array}$$

a oblast

$$U: \quad 0 \le r \le \sqrt{18} \quad \& \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \quad \& \quad 0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{4} \;.$$

Tuto oblast můžeme získat i po dosazení parametrizace do podmínek E, tj.

$$E: \quad 0 \le r\sin\vartheta\sin\varphi \quad \& \quad r^2\sin^2\vartheta \le 9 \quad \& \quad 0 \le r\sin\vartheta\cos\varphi \quad \& \quad r|\sin\vartheta| \le r\cos\vartheta \quad \& \quad r^2 \le 18$$

odkud máme např. $r^2 \le \min\{\frac{9}{\sin^2\vartheta}, 18\} = 18$ protoze

$$18 \le \frac{9}{\sin^2\vartheta} \quad \Leftrightarrow \quad \sin^2\vartheta \le \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad |\sin\vartheta| \le \frac{\sqrt{2}}{2}$$

což je právě pro $\vartheta \in \langle 0, \frac{\pi}{4}\rangle$ splněno. Tento postup je ale náročnější než získat totéž z náčrtu.

Můžeme tedy psát

$$\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-y^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{18-x^2-y^2}} (x^2+y^2+z^2)\, dzdxdy = \iiint_{E=\Phi(U)} (x^2+y^2+z^2)\; dV =$$

$$= \iiint_U r^2 \cdot r^2|\sin\vartheta|\; dV = \int_0^{\sqrt{18}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} r^4 \sin\vartheta\; d\vartheta\; d\varphi\; dr \;=$$

$$= \underbrace{\left(\int_0^{\sqrt{18}} r^4 \,\mathrm{d}r\right)}_{=\frac{18^2\sqrt{18}}{5}} \cdot \underbrace{\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \,\mathrm{d}\varphi\right)}_{=\frac{\pi}{2}} \cdot \underbrace{\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta\right)}_{=1-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2\cdot 3^5}{5}\pi(\sqrt{2}-1) \;.$$