

11. cvičení z Matematické analýzy 2

29. listopadu - 3. prosince 2021

11.1 (sférické souřadnice)

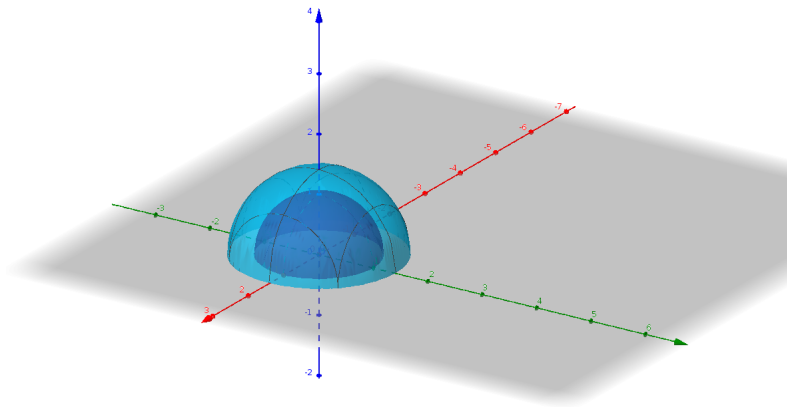
Spočítejte

$$\iiint_E x e^{(x^2+y^2+z^2)^2} dV$$

kde

$$E : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 2 \quad \& \quad z \geq 0 .$$

Řešení:



Pro oblast E použijeme sférické souřadnice

$$\Psi : \begin{aligned} x &= (r \sin \vartheta) \cos \varphi \\ y &= (r \sin \vartheta) \sin \varphi \\ z &= r \cos \vartheta \end{aligned}$$

a parametrizace $E = \Psi(U)$ pak bude

$$U : 1 \leq r \leq 2 \quad \& \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad \& \quad 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2} .$$

Pro jakobián máme

$$\det \Psi' = r^2 \sin \vartheta$$

a můžeme tedy psát

$$\iiint_{E=\Psi(U)} x e^{(x^2+y^2+z^2)^2} dV = \iiint_U r \sin \vartheta \cos \varphi \cdot e^{r^4} \cdot r^2 \sin \vartheta dr d\varphi d\vartheta =$$

$$= \left(\int_1^2 r^3 e^{r^4} dr \right) \cdot \underbrace{\left(\int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi \right)}_0 \cdot \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \vartheta d\vartheta \right) = 0 .$$

Připomenutí: Integrál z funkce f podél křivky \mathcal{C} spočítáme podle vztahu

$$\int_{\mathcal{C}} f ds = \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \|\varphi'(t)\| dt,$$

kde φ je vhodná parametrizace křivky \mathcal{C} , tj. zobrazení $\varphi : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}^n$, které je

- spojitě a po částech spojitě diferencovatelné na intervalu $\langle a, b \rangle$ (tj. křivka může být v některých bodech "zlomená", ale stále to má být souvislá čára),
- až na konečně mnoho výjímek $t_1, \dots, t_n \in \langle a, b \rangle$ platí, že:
 φ je prosté na $\langle a, b \rangle$ a $\|\varphi'(t)\| \neq 0$ pro $t \in \langle a, b \rangle$ (tj. křivka může protínat konečněkrát sama sebe a vektor rychlosti chceme mít nenulový až konečně mnoho výjímek),
- $\varphi(\langle a, b \rangle) = \mathcal{C}$.

Integrál z funkce nezávisí na volbě orientace křivky. Změnu orientace lze vždy provést např. jako

$$\psi(t) := \varphi(a + b - t) \text{ pro } t \in \langle a, b \rangle .$$

11.2 (křivkový integrál z funkce)

Spočítejte $\int_{\mathcal{C}} |y| ds$, kde \mathcal{C} je cykloida s parametrizací

$$\varphi : x = t - \sin t \quad \wedge \quad y = 1 - \cos t$$

kde $0 \leq t \leq 2\pi$. Cykloida je křivka určená dráhou bodu, který je na kružnici (zde s poloměrem $a = 1$), která se valí bez tření po přímce.

Řešení:

Pro parametrizaci máme

$$\varphi'(t) = (1 - \cos t, \sin t)$$

a

$$\|\varphi'(t)\| = \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} = \sqrt{2 - 2 \cos t}.$$

Takže můžeme psát

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} |y| ds &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} |1 - \cos t| \sqrt{1 - \cos t} dt = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} (\sqrt{1 - \cos t})^3 dt = \\ &= \left\{ \cos^2 \frac{t}{2} = \frac{1 - \cos t}{2} \right\} = 4 \int_0^{2\pi} \left| \cos \frac{t}{2} \right|^3 dt = 8 \int_0^{\pi} \underbrace{\cos^3 \frac{t}{2}}_{(1 - \sin^2 \frac{t}{2}) \cos \frac{t}{2}} dt = \left\{ \begin{array}{l} u = \sin \frac{t}{2} \\ du = \frac{1}{2} \cos \frac{t}{2} dt \end{array} \right\} = \\ &= 16 \int_0^1 (1 - u^2) du = \frac{32}{3} . \end{aligned}$$

11.3 (křivkový integrál z funkce)

Spočítejte $\int_C \sqrt{x^2 + y^2} ds$, kde C se skládá postupně z křivek

- C_1 : horní polovina kružnice o poloměru $\frac{1}{2}$ se středem v $(\frac{1}{2}, 0)$ jdoucí v kladném smyslu z bodu $(1, 0)$ do bodu $(0, 0)$;
- C_2 : úsečka jdoucí z bodu $(0, 0)$ do bodu $(-1, 2)$.

Řešení:

• parametrizace C_1 : Křivka splňuje rovnici $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = (\frac{1}{2})^2$, proto použijeme posunuté polární souřadnice.

$$\varphi_1: x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos t, \quad y = \frac{1}{2} \sin t \quad \text{pro } 0 \leq t \leq \pi.$$

$$\varphi_1'(t): x'(t) = -\frac{1}{2} \sin t, \quad y'(t) = \frac{1}{2} \cos t \quad \text{a} \quad \|\varphi_1'(t)\| = \sqrt{(-\frac{1}{2} \sin t)^2 + \frac{1}{4} \cos^2 t} = \frac{1}{2}.$$

Parametrizace má orientaci souhlasnou se zvolenou orientací. Takže

$$\begin{aligned} \int_{C_1} \sqrt{x^2 + y^2} ds &= \int_0^\pi \sqrt{x^2 + y^2}|_{\varphi_1(t)} \cdot \|\varphi_1'(t)\| dt = \int_0^\pi \frac{1}{2} \sqrt{(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos t)^2 + (\frac{1}{2} \sin t)^2} dt = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} \int_0^\pi \sqrt{1 + \cos t} dt = \left[\frac{2u=t}{2du=dt} \right] = \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \cos(2u)} du = \\ &= \left\{ \cos(2u) = \cos^2 u - \sin^2 u \right\} = \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos u du = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

- parametrizace C_2 : $\varphi_2(t) = (0, 0) + t(-1, 2) = (-t, 2t), \quad t \in (0, 1)$

$$\varphi_2'(t) = (-1, 2) \quad \text{a} \quad \|\varphi_2'(t)\| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}.$$

Parametrizace má orientaci souhlasnou se zvolenou orientací. Takže

$$\int_{C_2} \sqrt{x^2 + y^2} ds = \int_0^1 \sqrt{x^2 + y^2}|_{\varphi_2(t)} \cdot \|\varphi_2'(t)\| dt = \int_0^1 5t dt = \frac{5}{2}.$$

Celkem tedy máme

$$\int_C (x + y) ds = \sum_{i=1}^2 \int_{C_i} (x + y) ds = \frac{5 + \sqrt{2}}{2}$$

Připomenutí: Integrál z vektorového pole \vec{F} podél dané orientované křivky C počítáme jako práci síly podél této křivky s normovaným tečným polem \vec{T} (jež určuje orientaci křivky C).

Jestliže parametrizace $\varphi: (a, b) \rightarrow C$ odpovídá zvolené parametrizaci, pak máme

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_C (\vec{F} \cdot \vec{T}) ds = \int_a^b \vec{F}(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt.$$

Pokud parametrizace φ je v **opačném** směru než námi zvolená orientace \mathcal{C} , pak máme

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = - \int_a^b \vec{F}(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt .$$

11.4 (křivkový integrál z vektorového pole)

Určete

$$\int_{\mathcal{C}} 2xy \, dx - x^2 \, dy$$

kde \mathcal{C} se skládá postupně z křivek

- \mathcal{C}_1 : úsečka jdoucí z bodu $(2, -1)$ do bodu $(0, 0)$;
- \mathcal{C}_2 : část paraboly o rovnici $x = 2y^2$ jdoucí z bodu $(0, 0)$ do bodu $(2, 1)$.

Řešení:

Máme pole $\vec{F} = (2xy, -x^2)$.

- parametrizace \mathcal{C}_1 : $\varphi_1(t) = (2, -1) + t(-2, 1) = (\underbrace{2-2t}_x, \underbrace{t-1}_y)$, $t \in \langle 0, 1 \rangle$

$$\varphi_1'(t) = (-2, 1) .$$

Parametrizace má orientaci souhlasnou se zvolenou orientací. Takže

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}_1} \vec{F} \cdot d\vec{s} &= \int_0^1 (2xy, -x^2)|_{\varphi_1(t)} \cdot \varphi_1'(t) dt = \int_0^1 \left(-4(t-1)^2, -4(t-1)^2 \right) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} dt = \\ &= 4 \int_0^1 (t-1)^2 dt = 4 \left[\frac{(t-1)^3}{3} \right]_0^1 = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

- parametrizace \mathcal{C}_2 : Křivku můžeme parametrizovat např. pomocí souřadnice y :

$$\varphi_2 : x = 2t^2, \quad y = t \quad \text{pro } 0 \leq t \leq 1 .$$

$$\varphi_2'(t) : x'(t) = 4t, \quad y'(t) = 1 .$$

Parametrizace má orientaci souhlasnou se zvolenou orientací. Takže

$$\int_{\mathcal{C}_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_0^1 (2xy, -x^2)|_{\varphi_2(t)} \cdot \varphi_2'(t) dt = \int_0^1 (4t^3, -4t^4) \cdot \begin{pmatrix} 4t \\ 1 \end{pmatrix} dt = 12 \int_0^1 t^4 dt = \frac{12}{5}$$

Celkem tedy máme

$$\int_{\mathcal{C}} (x+y) ds = \sum_{i=1}^2 \int_{\mathcal{C}_i} (x+y) ds = \frac{4}{3} + \frac{12}{5} = \frac{56}{15}$$

11.5 (křivkový integrál z vektorového pole)

Určete

$$\int_C (2a - y) dx + x dy$$

pro oblouk cykloidy \mathcal{C} dané parametrizací

$$\varphi : x = a(t - \sin t) \quad \& \quad y = a(1 - \cos t) \quad \& \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

s parametrem $a > 0$ a orientací danou touto parametrizací. (Cykloida je křivka určená dráhou bodu, který je na kružnici s poloměrem a , která se valí bez tření po přímce.)

Řešení:

Máme

$$\varphi'(t) = (a(1 - \cos t), a \sin t)$$

a pole

$$\vec{F} = (2a - y, x).$$

Takže můžeme psát

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} &= \int_0^{2\pi} \vec{F}(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \int_0^{2\pi} (a(1 + \cos t), a(t - \sin t)) \cdot \begin{pmatrix} a(1 - \cos t) \\ a \sin t \end{pmatrix} dt = \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} 1 - \cos^2 t + t \sin t - \sin^2 t dt = a^2 \int_0^{2\pi} t \sin t dt = a^2 \left[-t \cos t \right]_{t=0}^{t=2\pi} + a^2 \int_0^{2\pi} \cos t dt = -2\pi a^2. \end{aligned}$$

11.6 (křivkový integrál z vektorového pole)

Určete

$$\int_C y dx + z dy + x dz$$

kde

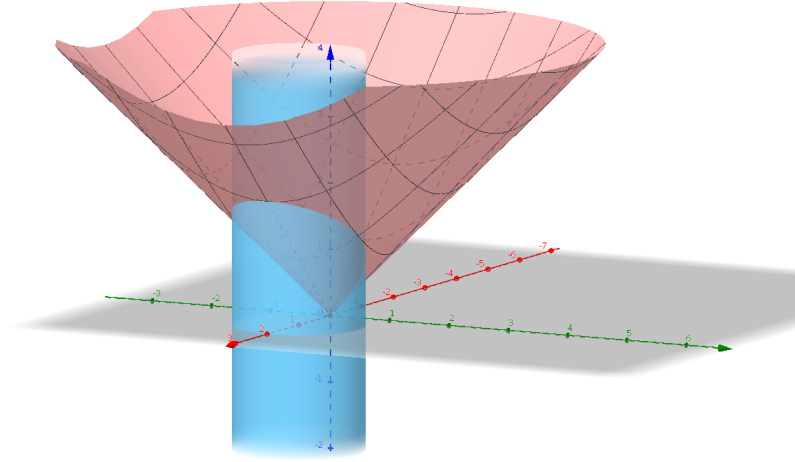
$$\mathcal{C} : x^2 + y^2 = z^2 \quad \& \quad x^2 + y^2 = 2x \quad \& \quad z \geq 0$$

je křivka s orientací v kladném smyslu při pohledu shora.

Řešení:

Máme pole $\vec{F} = (y, z, x)$. Rovnice $x^2 + y^2 = 2x$ je to samé jako $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ (což je válec).

Křivka představuje tedy průnik kuželu s válcem jehož poloměr je 1 a osa kužele leží v plášti válce.



Parametrizaci uděláme pomocí obvyklých válcových souřadnic:

$$\begin{aligned}x &= r \cos \varphi \\y &= r \sin \varphi \\z &= h\end{aligned}$$

Po dosazení do podmínek dostaneme

$$r^2 = h^2 \quad \& \quad r^2 = 2r \cos \varphi \quad \& \quad h \geq 0$$

které splníme (pro všechny možnosti) při volbě $r = 2 \cos \varphi$, $h = r = 2 \cos \varphi$ a $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ (pro lepší pochopení si křivku načrtněte). Tím dostaneme parametrizaci:

$$\mathcal{C}: \quad x(\varphi) = 2 \cos^2 \varphi, \quad y(\varphi) = 2 \cos \varphi \sin \varphi, \quad z(\varphi) = 2 \cos \varphi \quad \text{pro} \quad \varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

která má požadovanou orientaci.

Opět můžeme využít formu, ve které byl integrál zadán:

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} y \, dx + z \, dy + x \, dz &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(y(\varphi) \cdot \frac{dx}{d\varphi} + z(\varphi) \cdot \frac{dy}{d\varphi} + x(\varphi) \cdot \frac{dz}{d\varphi} \right) d\varphi = \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(-2 \cdot \underbrace{4 \sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi}_{=\sin^2(2\varphi) = \frac{1 - \cos(4\varphi)}{2}} + 4 \cos \varphi \cdot \underbrace{(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)}_{=1 - 2 \sin^2 \varphi} - 4 \underbrace{\cos^2 \varphi \cdot \sin \varphi}_{\text{lichá funkce}} \right) d\varphi = \\ &= -2 \left[\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{8} \sin(4\varphi) \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + 4 \left[\sin \varphi - \frac{2}{3} \sin^3 \varphi \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + 0 = \frac{8}{3} - \pi.\end{aligned}$$

Jiná parametrizace pomocí posunutých válcových souřadnic:

$$\begin{aligned}x &= 1 + r \cos \varphi \\y &= r \sin \varphi \\z &= h\end{aligned}$$

Po dosazení do podmínek dostaneme

$$|h| = \sqrt{2r} \sqrt{1 + \cos \varphi} \quad \& \quad r^2 = 1 \quad \& \quad h \geq 0$$

kteře splníme (pro všechny možnosti) při volbě $r = 1$, $h = \sqrt{2}\sqrt{1 + \cos \varphi} = 2|\cos \frac{\varphi}{2}|$ a $-\pi \leq \varphi \leq \pi$. Tím dostaneme parametrizaci:

$$\mathcal{C} : \quad x(\varphi) = 1 + \cos \varphi, \quad y(\varphi) = \sin \varphi, \quad z(\varphi) = 2 \cos \frac{\varphi}{2} \quad \text{pro} \quad \varphi \in \langle -\pi, \pi \rangle$$

kteřá má požadovanou orientaci.

Nyní máme:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} \vec{F} d\vec{s} &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(y(\varphi), z(\varphi), x(\varphi) \right) \cdot \begin{pmatrix} x'(\varphi) \\ y'(\varphi) \\ z'(\varphi) \end{pmatrix} d\varphi = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sin \varphi, 2 \cos \frac{\varphi}{2}, 1 + \cos \varphi \right) \cdot \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ -\sin \frac{\varphi}{2} \end{pmatrix} d\varphi = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} -\sin^2 \varphi + \underbrace{2 \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \varphi}_{\cos(\frac{\varphi}{2} + \varphi) + \cos(\frac{\varphi}{2} - \varphi)} - \sin \frac{\varphi}{2} - \underbrace{\cos \varphi \cdot \sin \frac{\varphi}{2}}_{\frac{1}{2} \sin(\varphi + \frac{\varphi}{2}) - \frac{1}{2} \sin(\varphi - \frac{\varphi}{2})} d\varphi = \\ &= -\pi + \left[\frac{2}{3} \sin(\frac{3}{2}\varphi) + 2 \sin(\frac{\varphi}{2}) + 2 \cos(\frac{\varphi}{2}) + \frac{1}{3} \cos(\frac{3}{2}\varphi) - \cos(\frac{\varphi}{2}) \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{8}{3} - \pi. \end{aligned}$$

Poznámka: Použili jsme vzorce

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

a tedy

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} \left(\cos(x + y) + \cos(x - y) \right)$$

a

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

a tedy

$$\cos x \sin y = \frac{1}{2} \left(\sin(x + y) - \sin(x - y) \right).$$

11.7 (křivkový integrál z vektorového pole)

Určete

$$\int_{\mathcal{C}} y dx + z dy + x dz$$

kde

$$\mathcal{C} : \quad x^2 + y^2 = 1 \quad \& \quad x + z = 1$$

je křivka s kladnou orientací při pohledu shora.

Řešení:

Máme pole $\vec{F} = (y, z, x)$. Křivka představuje průnik válce a šikmé roviny. Je to tedy elipsa a její orientace je určena pomocí průmětu \mathcal{C} do roviny xy , v němž má mít tento průmět kladnou orientaci (tím je myšleno to "při pohledu shora", tj. když se na křivku budeme dívat tak, aby osa z směřovala k nám).

Průmět \mathcal{C} do roviny xy má rovnici $x^2 + y^2 = 1$ a jeho kladná orientace je určena obvyklou parametrizací

$$x(t) = \cos t, \quad y(t) = \sin t \quad \text{pro} \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Tím je určena i poslední složka, tj.

$$z(t) = 1 - x(t) = 1 - \cos t.$$

Pro parametrizaci jsme zde vlastně využili válcové souřadnice, které po dosazení do rovnosti určujících \mathcal{C} poskytnou vztahy mezi jednotlivými parametry (výsledkem musí být jen jeden volný parametr, protože křivka je jednodimenzionální objekt).

Pro výpočet můžeme využít také formu, ve které je integrál zadán:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} y \, dx + z \, dy + x \, dz &= \int_0^{2\pi} \left(y(t) \cdot \frac{dx}{dt} + z(t) \cdot \frac{dy}{dt} + x(t) \cdot \frac{dz}{dt} \right) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\sin t \cdot (-\sin t) + (1 - \cos t) \cdot \cos t + \cos t \cdot \sin t \right) dt = \int_0^{2\pi} (-1 + \cos t + \cos t \cdot \sin t) dt = \\ &= -2\pi + \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos t \, dt}_{=0} + \underbrace{\int_0^{2\pi} \frac{\sin(2t)}{2} dt}_{=0} = -2\pi . \end{aligned}$$

11.8 (křivkový integrál z vektorového pole)

Určete

$$\int_{\mathcal{C}} y^2 \, dx + z^2 \, dy + x^2 \, dz$$

kde

$$\mathcal{C} : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad \& \quad x^2 + y^2 = x \quad \& \quad z \geq 0$$

je tzv. *Vivianiho* křivka (přesněji, jedna její část) s orientací v kladném smyslu při pohledu shora.

Řešení:

Máme pole $\vec{F} = (y^2, z^2, x^2)$. Rovnice $x^2 + y^2 = x$ je to samé jako $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = (\frac{1}{2})^2$ (což je válec).

Křivka představuje tedy průnik horní části sféry (o poloměru 1) s válcem jehož poloměr je $\frac{1}{2}$ a osa sféry leží v plášti válce. Parametrizaci můžeme udělat vícero způsoby:

- pomocí obvyklých válcových souřadnic:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \\ z &= h \end{aligned}$$

Po dosazení do podmínek dostaneme

$$r^2 + h^2 = 1 \quad \& \quad r^2 = r \cos \varphi \quad \& \quad h \geq 0$$

které splníme (pro všechny možnosti) při volbě $r = \cos \varphi$, $h = |\sin \varphi|$ a $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ (pro lepší pochopení si křivku načrtněte). Tím dostaneme parametrizaci:

$$\mathcal{C} : x(\varphi) = \cos^2 \varphi, \quad y(\varphi) = \cos \varphi \sin \varphi, \quad z(\varphi) = |\sin \varphi| \quad \text{pro} \quad \varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

která má požadovanou orientaci.

- pomocí posunutých válcových souřadnic (do osy výše zmíněného válce):

$$\begin{aligned}x &= \frac{1}{2} + r \cos \alpha \\y &= r \sin \alpha \\z &= h\end{aligned}$$

Po dosazení do podmínek dostaneme

$$\frac{1}{4} + r \cos \alpha + r^2 + h^2 = 1 \quad \& \quad r^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad \& \quad h \geq 0$$

které splníme (pro všechny možnosti) při volbě $r = \frac{1}{2}$, $h = \sqrt{\frac{1 - \cos(2 \cdot \frac{\alpha}{2})}{2}} = \sqrt{\sin^2(\frac{\alpha}{2})} = \sin(\frac{\alpha}{2})$ a $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ (pro lepší pochopení si křivku načrtněte). Tím dostaneme parametrizaci:

$$\mathcal{C}: \quad x(\alpha) = \frac{1}{2}(1 + \cos \alpha), \quad y(\alpha) = \frac{1}{2} \sin \alpha, \quad z(\alpha) = \sin(\frac{\alpha}{2}) \quad \text{pro} \quad \alpha \in \langle 0, 2\pi \rangle$$

která má požadovanou orientaci.

Pro výpočet zvolíme třeba tu druhou parametrizaci. Opět můžeme využít formu, ve které byl integrál zadán:

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz &= \int_0^{2\pi} \left(y^2(\alpha) \cdot \frac{dx}{d\alpha} + z^2(\alpha) \cdot \frac{dy}{d\alpha} + x^2(\alpha) \cdot \frac{dz}{d\alpha} \right) d\alpha = \\&= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{8} \sin^2 \alpha \cdot \sin \alpha + \frac{1}{2} \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \cos \alpha + \frac{1}{8}(1 + \cos \alpha)^2 \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right) d\alpha = \\&= -\frac{1}{8} \int_0^{2\pi} (1 - \cos^2 \alpha) \cdot \sin \alpha d\alpha + \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \cos \alpha + \frac{1}{8}(1 + \cos \alpha)^2 \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) d\alpha = \\&= \frac{1}{8} \left[\cos \alpha - \frac{1}{3} \cos^3 \alpha \right]_0^{2\pi} + \left\{ \begin{array}{l} \text{substituce:} \\ 2t = \alpha \\ 2dt = d\alpha \end{array} \right\} = \\&= 0 + \int_0^{\pi} \underbrace{\sin^2 t \cdot \cos(2t)}_{(1 - \cos^2 \alpha)(2 \cos^2 \alpha - 1)} + \underbrace{\left(\frac{1 + \cos(2t)}{2}\right)^2}_{(\cos^2 t)^2} \cdot \cos t dt = \int_0^{\pi} \cos^5 \alpha - 2 \cos^4 \alpha + 3 \cos^2 \alpha - 1 dt = \\&= \{ \text{viz níže} \} = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 0 + (-2) \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi + 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi - \pi = -\frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

Kde jsme pro $n \geq 2$ spočítali integrály

$$\begin{aligned}A_n &:= \int_0^{\pi} \cos t \cdot \cos^{n-1} t dt = \left[\sin t \cdot \cos^{n-1} t \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} (n-1) \cos^{n-2} t \cdot \sin^2 t dt = \\&= (n-1) \int_0^{\pi} \cos^{n-2} t \cdot (1 - \cos^2 t) dt = (n-1)A_{n-2} - (n-1)A_n.\end{aligned}$$

Tedy máme $A_n = \frac{n-1}{n}A_{n-2}$ a $A_1 = 0$ a $A_0 = \pi$. Neboli, pro liché n je $\int_0^{\pi} \cos^n t dt = 0$, což je vidět i z grafu funkce.

Definice konzervativního pole: Spojité vektorové pole \vec{F} na otevřené množině $U \subseteq \mathbb{R}^n$ nazýváme *konzervativní*, pokud práce síly z bodu A do bodu B (v případě že dané body lze propojit alespoň jednou křivkou ležící v U) nezávisí na způsobu, jakým oba body propojíme (na bodech A a B ale záviset může). V tom případě pro tuto práci volíme značení $\int_A^B \vec{F} d\vec{s}$.

Věta (o potenciálu): Následující podmínky jsou ekvivalentní pro spojité vektorové pole \vec{F} na otevřené množině $U \subseteq \mathbb{R}^n$:

- pole \vec{F} je konzervativní na U ,
- práce pole \vec{F} podél jakékoliv uzavřené křivky $C \subseteq U$ je nulová,
- existuje funkce (tzv. *potenciál*) $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, že $\text{grad}(f) = \vec{F}$.

Pak platí, že

$$\int_A^B \vec{F} d\vec{s} = \int_A^B \text{grad}(f) d\vec{s} = f(B) - f(A).$$

Definujeme si tzv. rotaci pole jako

$$\text{rot}(\vec{F}) = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, -\frac{\partial F_3}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial z}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

kde $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ je formálně definovaný vektor složený z operátorů parciálních derivací.

Věta: Pro spojité diferencovatelné vektorové pole \vec{F} na otevřené množině $U \subseteq \mathbb{R}^3$ (tj. v dimenzi 3) platí:

- \vec{F} je konzervativní $\Rightarrow \text{rot}(\vec{F}) = \vec{0}$
(podmínka $\text{rot}(\vec{F}) = \vec{0}$ vlastně znamená záměnnost druhých parciálních derivací potenciálu f)
- Jestliže množina U je *jednoduše souvislá* a $\text{rot}(\vec{F}) = \vec{0}$ (všude na U), pak \vec{F} je konzervativní.

Definice jednoduše souvislé množiny: Množina $U \subseteq \mathbb{R}^n$ se nazývá jednoduše souvislá, jestliže se jakákoliv uzavřená křivka v U dá v rámci U spojitě stáhnout do bodu.

Příkladem jednoduše souvislé množiny je \mathbb{R}^n nebo $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

Příkladem otevřené množiny, která není jednoduše souvislá je $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $\mathbb{R}^3 \setminus \{\text{přímka}\}$ nebo torus (tj. “pneumatika”).

Poznámka: Nulová rotace je obecně opravdu jen nutnou podmínkou pro existenci potenciálu, jak ukazuje příklad vektorového pole

$$\vec{F} = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right)$$

na množině $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \neq 0\}$, která není jednoduše souvislá.

Máme

$$\text{rot}(\vec{F}) = \left(0, 0, -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \right) = \vec{0}$$

ale práce síly \vec{F} podél kružnice $\Gamma : \varphi(\alpha) = (\cos \alpha, \sin \alpha, 0)$, $\alpha \in \langle 0, 2\pi \rangle$ je nenulová:

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} (-\sin \alpha, \cos \alpha, 0) \cdot \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix} d\alpha = \int_0^{2\pi} 1 d\alpha = 2\pi.$$

Pole tedy nemá potenciál na celém U . Na druhé straně, na určitých podmnožinách U lze potenciál pole \vec{F} nalézt, např.

$$f_1(x, y, z) = \arctg\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{na} \quad U_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \neq 0\}$$

nebo

$$f_2(x, y, z) = \text{arccotg}\left(\frac{x}{y}\right) \quad \text{na} \quad U_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y \neq 0\}.$$

11.9 (konzervativní pole, potenciál)

Určete hodnotu parametru α tak, aby následující pole byla konzervativní. Najděte jejich potenciál a hodnotu práce síly z bodu A do B .

(i) $\vec{F}(x, y, z) = (x^2 + y, y^2 + \alpha x, ze^z)$, $A = (0, 1, 0)$, $B = (-1, 1, 0)$.

(ii) $\vec{F}(x, y, z) = (y + z, x + z, x + \alpha y)$, $A = (0, 0, 0)$, $B = (1, 1, 1)$.

$$(iii) \vec{F}(x, y, z) = \left(\frac{\alpha}{z}, -\frac{3}{z}, \frac{3y-x}{z^2} \right), A = (1, 0, 1), B = (-1, 1, 2).$$

Řešení:

(i) Po dosazení máme

$$\text{rot}(\vec{F}) = (0 - 0, 0 - 0, \alpha - 1),$$

tedy rotace je nulová na celém \mathbb{R}^3 právě když $\alpha = 1$ a pole \vec{F} pak má potenciál. Počítání rotace pole nám tedy sice rozhodne o existenci potenciálu, ale neurčí jeho tvar. Ten musíme zjistit dalším výpočtem, jehož postup v sobě také zahrnuje (případně) zjištění neexistence potenciálu (viz dále). Pokud nás tedy zajímá pouze (ne)existence potenciálu, je jednodušší a rychlejší spočítat rotaci a pokud chceme přímo potenciál najít, použijeme následující postup a v tom případě je počítání rotace zbytečné.

Potenciál je funkce $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ taková, že

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x^2 + y \tag{1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = y^2 + \alpha x \tag{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = ze^z. \tag{3}$$

Z první rovnice dostaneme

$$f(x, y, z) = \int (x^2 + y) dx = \frac{x^3}{3} + xy + C(y, z),$$

kde $C : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ je neznámá funkce závislá nyní pouze na y a z . Nalezený tvar funkce f teď dosadíme do druhé rovnice

$$y^2 + \alpha x = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x^3}{3} + xy + C(y, z) \right) = x + \frac{\partial C}{\partial y}$$

tedy

$$\frac{\partial C}{\partial y}(y, z) = y^2 + (\alpha - 1)x.$$

Levá strana rovnice nezávisí na proměnné x , tedy i pravá strana na ní nesmí záviset, takže musí být $\alpha = 1$. Pak máme

$$\frac{\partial C}{\partial y}(y, z) = y^2.$$

Dostáváme $C(y, z) = \int y^2 dy = \frac{y^3}{3} + D(z)$, kde $D : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je opět neznámá funkce závislá pouze na z . Zatím tedy máme

$$f(x, y, z) = \frac{x^3}{3} + xy + \frac{y^3}{3} + D(z)$$

a dosazením do poslední rovnice máme

$$ze^z = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{x^3}{3} + xy + \frac{y^3}{3} + D(z) \right) = \frac{\partial D}{\partial z}.$$

Takže $D(z) = \int ze^z dz = (z - 1)e^z + K$, kde $K \in \mathbb{R}$ je konstanta. Celkově tak máme potenciál

$$f(x, y, z) = \frac{x^3}{3} + xy + \frac{y^3}{3} + (z - 1)e^z + K.$$

Práce pole pak je

$$\int_A^B \vec{F} \, d\vec{s} = f(B) - f(A) = f(-1, 1, 0) - f(0, 1, 0) = -2 - \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{4}{3}.$$

(ii) Pokud se nám podaří najít potenciál, nepotřebujeme počítat rotaci. A naopak, jestliže rovnice pro potenciál nebudou řešitelné, tak pole nemůže být konzervativní.

Pro potenciál f máme

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y + z \quad (4)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x + z \quad (5)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = x + \alpha y. \quad (6)$$

Z první rovnice máme:

$$f(x, y, z) = \int y + z \, dx = xy + xz + C(y, z),$$

kde $C : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ je neznámá funkce závislá nyní pouze na y a z . Nalezený tvar funkce f teď dosadíme do druhé rovnice

$$x + z = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (xy + xz + C(y, z)) = x + \frac{\partial C}{\partial y}$$

tedy

$$\frac{\partial C}{\partial y} = z.$$

Dostáváme $C(y, z) = \int z \, dy = yz + D(z)$, kde $D : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je opět neznámá funkce závislá pouze na z . Dostáváme tedy zatím

$$f(x, y, z) = xy + xz + yz + D(z)$$

a dosazením do poslední rovnice máme

$$x + \alpha y = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} (xy + xz + yz + D(z)) = x + y + \frac{\partial D}{\partial z}.$$

Takže $\frac{\partial D}{\partial z}(z) = (\alpha - 1)y$, a tudíž $\alpha = 1$, jinak by pravá strana závisela na y , zatímco levá ne. Dále máme $\frac{\partial D}{\partial z} = 0$ a tedy $D(z) = K$, kde $K \in \mathbb{R}$ je konstanta. Celkově tak máme potenciál pouze pro $\alpha = 1$ a to

$$f(x, y, z) = xy + xz + yz + K.$$

Práce pole pak je

$$\int_A^B \vec{F} \, d\vec{s} = f(B) - f(A) = f(1, 1, 1) - f(0, 0, 0) = 3 - 0 = 3.$$

(iii) Zde je podstatné podívat se na definiční obor:

$$D(\vec{F}) : z \neq 0$$

Znamená to, že po vyjmutí roviny z \mathbb{R}^3 vzniknou dva poloprostory, které navzájem nejdou propojit křivkou.

Pokud se nám podaří najít potenciál, nepotřebujeme počítat rotaci.

Pro potenciál f musí platit

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\alpha}{z} \quad (7)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{3}{z} \quad (8)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{3y - x}{z^2} \quad (9)$$

Začneme třeba první rovnicí:

$$f(x, y, z) = \int \frac{\alpha}{z} dx = \frac{\alpha x}{z} + C(y, z),$$

kde $C : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ je neznámá funkce závislá nyní pouze na y a z . Nalezený tvar funkce f teď dosadíme do druhé rovnice

$$-\frac{3}{z} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\alpha x}{z} + C(y, z) \right) = \frac{\partial C}{\partial y}$$

tedy

$$\frac{\partial C}{\partial y} = -\frac{3}{z}.$$

Dostáváme $C(y, z) = \int -\frac{3}{z} dy = -\frac{3y}{z} + D(z)$, kde $D : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je opět neznámá funkce závislá pouze na z . Dostáváme tedy zatím

$$f(x, y, z) = \frac{\alpha x - 3y}{z} + D(z)$$

a dosazením do poslední rovnice máme

$$\frac{3y - x}{z^2} = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\alpha x - 3y}{z} + D(z) \right) = -\frac{\alpha x - 3y}{z^2} + \frac{\partial D}{\partial z}.$$

Takže

$$\frac{\partial D}{\partial z}(z) = \frac{(\alpha - 1)x}{z^2}$$

Levá strana rovnice nezávisí na proměnné x a y , tedy i pravá strana na nich nesmí záviset, takže musí být $\alpha = 1$. Pak máme

$$\frac{\partial D}{\partial z}(z) = 0$$

a tedy $D(z) = K$, kde $K \in \mathbb{R}$ je konstanta. Celkově tak máme potenciál

$$f(x, y, z) = \frac{x - 3y}{z} + K.$$

Teď určíme práci pole: Nejdříve zkontrolujeme, jestli body $A = (-1, 1, 2)$ a $B = (1, 0, 1)$ vůbec lze propojit křivkou, tj. jestli leží ve stejném poloprostoru. Ty jsou určeny pomocí hodnoty z , tedy jako

$$P_+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0\}$$

$$P_- = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z < 0\}$$

Zřejmě máme $A, B \in P_+$ a proto má smysl ptát se na práci pole z A do B :

$$\int_A^B \vec{F} \, d\vec{s} = f(B) - f(A) = f(-1, 1, 2) - f(1, 0, 1) = 2 - 1 = 1 .$$