14. cvičení z Matematické analýzy 2

3. - 7. ledna 2022

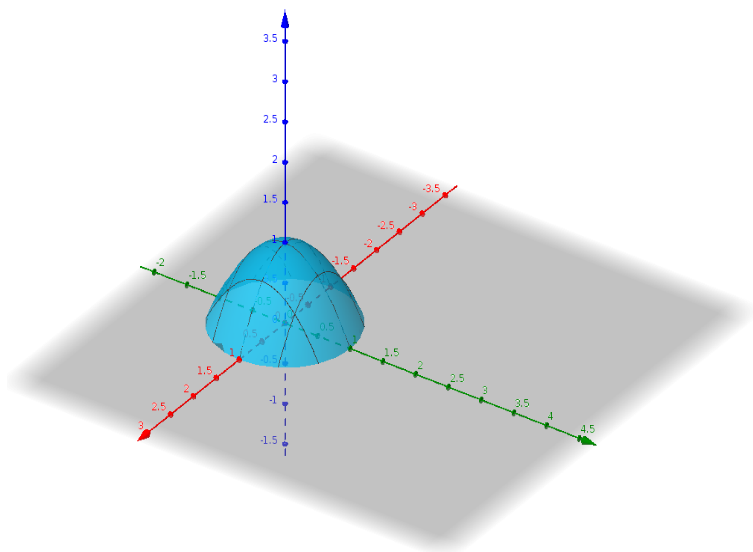
14.1 (Gaussova věta)

Pomocí Gaussovy věty určete

$$\iint\limits_M \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

kde $\vec{F}(x, y, z) = (x,\ y,\ z)$ a M je část paraboloidu $z = 1 - x^2 - y^2$ pro $z \geq 0$ s orientací danou vektorovým polem směřujícím vzhůru.

Řešení:



Budeme postupovat podobně jako v příkladu **14.11**. Plocha M spolu s kruhem

$$K: \quad x^2 + y^2 \leq 1 \quad \& \quad z = 0$$

(jehož orientace je směrem dolů) tvoří hranici ∂E (s vnější orientací) pro těleso

$$E: \quad 0 \leq z \leq 1 - (x^2 + y^2)\ .$$

Pole na kruhu K má tvar $\vec{F}(x, y, 0) = (x,\ y,\ 0)$ a je tedy rovnoběžné z plochou kruhu. Proto je

$$\iint\limits_K \vec{F} \cdot d\vec{S} = 0\ .$$

Tudíž díky Gaussově větě pak budeme mít:

$$\iint\limits_M \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint\limits_M \vec{F} \cdot d\vec{S} + \underbrace{\iint\limits_K \vec{F} \cdot d\vec{S}}_{=0} = \iint\limits_{\partial E} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint\limits_E \underbrace{\operatorname{div}(\vec{F})}_{=1+1+1=3}\ dV = \iiint\limits_E 3\ dV =$$

$$= \begin{bmatrix} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \\ z=h \\ \\ 0\le\varphi\le 2\pi \\ 0\le r\le 1 \\ 0\le z\le 1-r^2 \end{bmatrix} = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{1-r^2} 3r\ dh\ dr\ d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^1 3r(1-r^2)\ dr\ d\varphi =$$

$$= \left(\int_0^1 (r-r^3)\ dr\right)\cdot\left(\int_0^{2\pi} 3\ d\varphi\right) = \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)6\pi = \frac{3}{2}\pi\ .$$

Stokesova věta je zobecnění Greenovy věty z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^3$ (orientovaná plocha, jejímž okrajem je křivka $\mathcal{C}$, už může být různě zakřivená v prostoru):

$$\int_{\mathcal{C}=\partial M} \vec{F}\cdot d\vec{s} = \iint_M \operatorname{rot}(\vec{F})\cdot d\vec{S}\ ,$$

kde

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) := \nabla\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y}-\frac{\partial F_2}{\partial z},\ -\left(\frac{\partial F_3}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial z}\right),\ \frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\ .$$

Orientace plochy a jejího okraje musí být v souladu a to pomocí pravidla pravé ruky (ruku položíme na plochu poblíž okraje tak, aby vektor její orientace mířil do dlaně a palec ukazoval směrem dovnitř plochy - pak zbylé prsty ukazují směr orientace okraje), nebo jednodušeji - když obcházíme plochu podél okraje, musíme ji aktuálně mít vždy po levé straně.

14.2 (Stokesova věta)

Pomocí Stokesovy věty spočítejte

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{s},$$

kde $\vec{F}(x,y,z) = (x,y,xy)$ a

(i) křivka $\mathcal{C}$ je hranicí plochy $M:\quad z=x^2+y^2,\quad 0\le x\le 1,\quad 0\le y\le 1.$

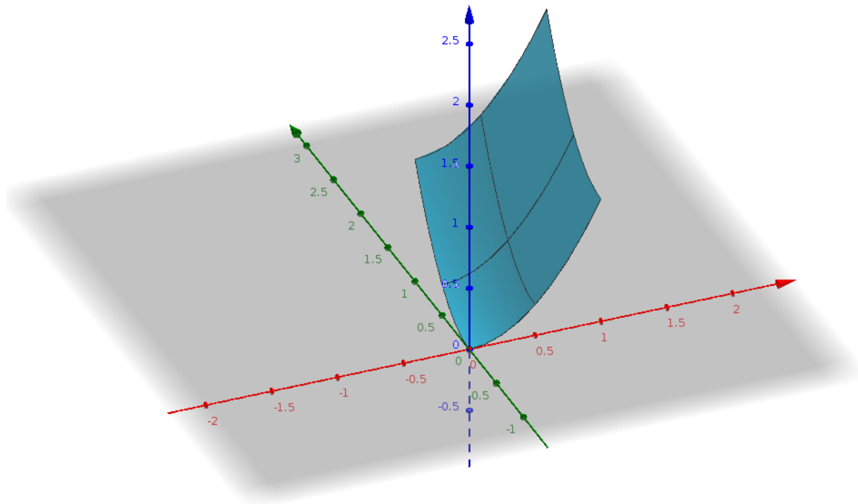
(ii) křivka $\mathcal{C}$ je průnikem ploch $z=x^2+y^2$ a $x^2+y^2=x$.

Křivka $\mathcal{C}$ je orientována kladně při pohledu seshora (neboli: jestliže křivku, která tvoří okraj zprojektujeme do roviny xy, bude mít tento její obraz kladnou orientaci).

Řešení:
Abychom mohli použít Stokesovu větu, musíme si zvolit správnou orientaci příslušné plochy M tak, aby byla v souladu s orientací křivky $\mathcal{C}$, která tvoří její okraj. Rotace pole $\vec{F}$ je:

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & xy \end{vmatrix} = \big(x,\ -y,\ 0\big)\ .$$

(i)



Plocha M je grafem funkce $f(x,y) = x^2+y^2$, takže ji budeme orientovat směrem nahoru a přirozeněji zparametrizujeme pomocí

$$\Phi(x,y) = \Big(x, y, f(x,y)\Big) = (x, y, x^2+y^2)$$

s definičním oborem

$$U: \quad 0 \le x \le 1 \;\;\&\;\; 0 \le y \le 1\ .$$

Máme

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = (1, 0, 2x)$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = (0, 1, 2y)$$

a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y} = (-2x, -2y, 1)$$

Třetí složka vektoru $\frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y}$ je kladná, tedy tento normálový vektor odpovídá zadané orientaci plochy "nahoru."

Máme tak

$$\int\limits_C \vec{F}\cdot d\vec{s} = \iint\limits_M \operatorname{rot}(\vec{F})\cdot d\vec{S} = \iint\limits_U \operatorname{rot}(\vec{F})(\Phi(x,y))\cdot\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) dS = \iint\limits_U (x, -y, 0)\cdot\begin{pmatrix} -2x \\ -2y \\ 1 \end{pmatrix} dS =$$

$$= \int\limits_0^1\int\limits_0^1 \left(2y^2 - 2x^2\right)\ dx\ dy = \int\limits_0^1\int\limits_0^1 2y^2\ dx\ dy - \int\limits_0^1\int\limits_0^1 2x^2\ dy\ dx = 0\ .$$

(ii) Křivka $\mathcal{C}$ je průnikem paraboloidu $z = x^2+y^2$ a válce $x^2+y^2 = x$ ($\Leftrightarrow (x-\frac{1}{2})^2 + y^2 = (\frac{1}{2})^2$). Plochu, jejímž bude křivka $\mathcal{C}$ okrajem si proto zvolíme jako

$$M: \quad x^2+y^2 = z,\ (x-\tfrac{1}{2})^2 + y^2 \le (\tfrac{1}{2})^2$$

s orientací nahoru.

Plochu M opět přirozeně zparametrizujeme pomocí

$$\Phi(x,y) = \Big(x, y, f(x,y)\Big) = (x, y, x^2+y^2)$$

s definičním oborem

$$U: \quad (x-\tfrac{1}{2})^2 + y^2 \le (\tfrac{1}{2})^2 \ .$$

Jako v části (i) máme, že vektor

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} \times \frac{\partial\Phi}{\partial y} = (-2x, -2y, 1)$$

odpovídá zadané orientaci plochy "nahoru." Máme tak

$$\int\limits_C \vec{F}\cdot d\vec{s} = \iint\limits_M \operatorname{rot}(\vec{F})\cdot d\vec{S} = \iint\limits_U \operatorname{rot}(\vec{F})(\Phi(x,y))\cdot\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\times\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) dS = \iint\limits_U (x,-y,0)\cdot\begin{pmatrix}-2x\\-2y\\1\end{pmatrix} dS =$$

$$= 2\iint\limits_U \left(y^2 - x^2\right)\ dx\ dy = \left\{\begin{array}{l} x = \frac{1}{2} + r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ 0 \le r \le \frac{1}{2} \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ jakobian = r \end{array}\right\} =$$

$$= 2\int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^{2\pi} (r^2\sin^2\varphi - \underbrace{(\tfrac{1}{2} + r\cos\varphi)^2}_{\frac{1}{4}+r\sin\varphi + r^2\cos^2\varphi})r\ d\varphi\ dr = 2\int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^{2\pi} r^3\underbrace{(\sin^2\varphi - \cos^2\varphi)}_{-\cos(2\varphi)} - r^2\sin\varphi - \tfrac{r}{4}\ d\varphi\ dr =$$

$$= 0 + 0 - 2\int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^{2\pi} \tfrac{r}{4}\ d\varphi\ dr = -\frac{\pi}{8}.$$

Zde jsme využili nulovost integrálu přes periodu funkcí $\sin\varphi$ a $\cos(2\varphi)$.

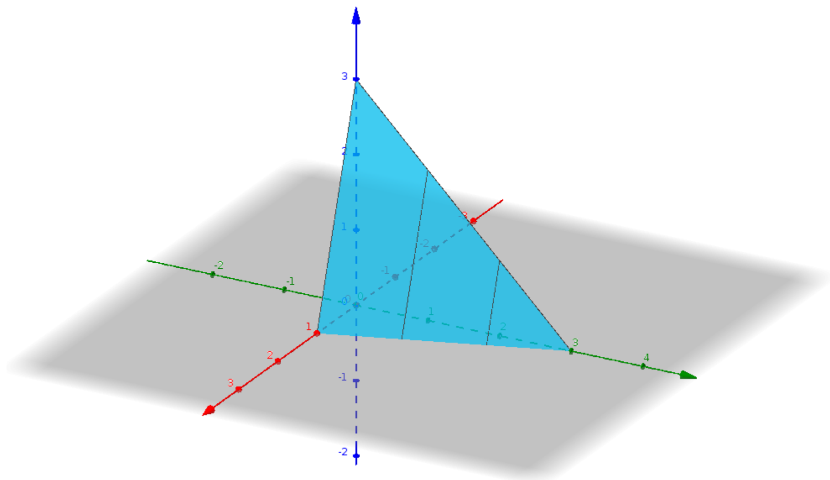
14.3 (Stokesova věta)

Pomocí Stokesovy věty spočítejte

$$\int\limits_{\partial M} \vec{F}\cdot d\vec{s},$$

kde $\vec{F}(x,y,z) = (xz, 2xy, 3xy)$ a $\mathcal{C}$ je hranice části roviny $3x+y+z=3$, která je v prvním oktantu. Okraj plochy je orientovaný v záporném smyslu při pohledu seshora (neboli: jestliže křivku, která tvoří okraj zprojektujeme do roviny xy, bude mít tento její obraz zápornou orientaci).

Řešení:
Plocha M je trojúhelník.



Orientace plochy v souladu s orientací okraje je tedy směrem dolů (při pohledu zdola bude okraj orientovaný v “kladném” smyslu). Normované normálové pole je tak dané směrem vektoru

$$\vec{n} = -(3,1,1) \ .$$

Dále máme

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz & 2xy & 3xy \end{vmatrix} = \big(3x,\ x-3y,\ 2y\big) \ .$$

Plochu zparametrizujeme jako graf funkce $z = 3 - 3x - y$, tedy

$$\Phi(x,y) = (x, y, 3-3x-y)$$

pomocí množiny

$$U: \quad 0 \le x \le 1 \ \ \& \ \ 0 \le y \le 3 - 3x \ .$$

(U je jen projekcí M do roviny xy). Pro tečné vektory máme

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial \Phi}{\partial x} &= \big(1, \quad 0, \quad -3\big) \\ \tfrac{\partial \Phi}{\partial y} &= \big(0, \quad 1, \quad -1\big) \end{aligned}$$

a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \big(3,1,1\big).$$

Protože tento vektorový součin má opačný směr než zadaná orientace $\vec{n}$, musíme ho do integrálu dosadit s opačným znaménkem (nebo prostě změnit pořadí vektorů v součinu, tj. dosadit $\frac{\partial \Phi}{\partial y} \times \frac{\partial \Phi}{\partial x}$ namísto $\frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y}$). Takže máme

$$\int\limits_{\partial M} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint\limits_{M=\Phi(U)} \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{S} = \iint\limits_{U} \Big(\operatorname{rot}(\vec{F}) \circ \Phi\Big) \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \times \frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) dS =$$

$$= \iint\limits_{U} (3x,\ x-3y,\ 2y) \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} dS = \iint\limits_{U} (-10x + y)\ dS = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{3(1-x)} y - 10x \ dy \ dx =$$

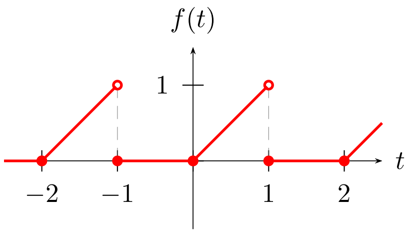
$$= \int\limits_0^1 \frac{9}{2}(1-x)^2 - 30x(1-x)\ dx = \frac{3}{2} - 30 \cdot \frac{1}{6} = -\frac{7}{2} \ .$$

Viz Poznámky k Fourierovým řadám.

14.4 Nalezněte Fourierovu řadu pro periodické rozšíření funkce

$$f(t) = \begin{cases} t & , t \in [0,1), \\ 0 & , t \in [1,2). \end{cases}$$

(tj. funkci s periodou $T = 2$) a určete její součet.



Řešení:

Pro Fourierovu řadu funkce f máme: $T = 2$, $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$ a $\frac{2}{T} = 1$.

$$a_0 = \tfrac{2}{2} \int_0^2 f(t)\,dt = \int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}$$

$$a_k = \tfrac{2}{2} \int_0^1 t\cos(k\pi t)\,dt = \underbrace{\left[t \cdot \tfrac{\sin(k\pi t)}{k\pi}\right]_{t=0}^{t=1}}_{=0} - \int_0^1 \tfrac{\sin(k\pi t)}{k\pi}\,dt = \left[\tfrac{\cos(k\pi t)}{(k\pi)^2}\right]_{t=0}^{t=1} = \tfrac{(-1)^k - 1}{(k\pi)^2}$$

$$b_k = \tfrac{2}{2} \int_0^1 t\sin(k\pi t)\,dt = -\left[t \cdot \tfrac{\cos(k\pi t)}{k\pi}\right]_{t=0}^{t=1} + \int_0^1 \tfrac{\cos(k\pi t)}{k\pi}\,dt = \tfrac{(-1)^{k+1}}{k\pi} + \underbrace{\left[\tfrac{\sin(k\pi t)}{(k\pi)^2}\right]_{t=0}^{t=1}}_{=0} = \tfrac{(-1)^{k+1}}{k\pi}$$

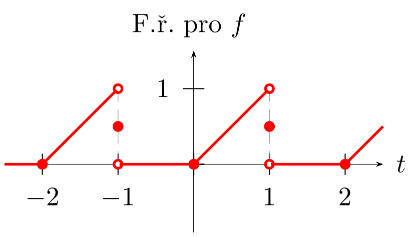
Takže

$$f \sim \tfrac{1}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{(-1)^k - 1}{(k\pi)^2} \cos(k\pi t) + \tfrac{(-1)^{k+1}}{k\pi} \sin(k\pi t)$$

a podle Jordanova kritéria je

$$\tfrac{1}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{(-1)^k - 1}{(k\pi)^2} \cos(k\pi t) + \tfrac{(-1)^{k+1}}{k\pi} \sin(k\pi t) = \begin{cases} \frac{1}{2} & , t \in 2\mathbb{Z} + 1 \\ f(t) & , t \in \mathbb{R} \setminus (2\mathbb{Z} + 1) \end{cases} .$$

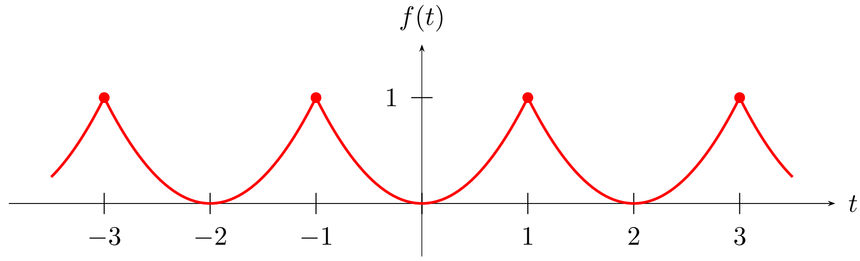
s grafem



14.5 Určete Fourierovu řadu periodického rozšíření funkce

$$f(t) = t^2, \quad t \in [-1, 1)$$

(tj. s periodou $T = 2$) a určete její součet.



Řešení:
Pro naši funkci f máme $T = 2$, takže $\omega = \pi$. Dostáváme tak

$$a_0 = \tfrac{2}{2}\int\limits_0^2 f(t)\,dt = \int\limits_{-1}^1 f(t)\,dt = \int\limits_{-1}^1 t^2 dt = \frac{2}{3},$$

$$a_k = \tfrac{2}{2}\int\limits_{-1}^1 \underbrace{t^2\cos(k\pi t)}_{\text{sudá}}\,dt = 2\int\limits_0^1 t^2\cos(k\pi t)\,dt = \underbrace{\left[2t^2\tfrac{\sin(k\pi t)}{k\pi}\right]_{t=0}^{t=1}}_{=0} - \int\limits_0^1 4t\tfrac{\sin(k\pi t)}{k\pi}\,dt =$$

$$= \left[4t\tfrac{\cos(k\pi t)}{(k\pi)^2}\right]_{t=0}^{t=1} - \int\limits_0^1 4\tfrac{\cos(k\pi t)}{(k\pi)^2}\,dt = \frac{4\cos(k\pi)}{\pi^2k^2} - \underbrace{\left[4\tfrac{\sin(k\pi t)}{(k\pi)^3}\right]_{t=0}^{t=1}}_{=0} = \frac{4(-1)^k}{\pi^2k^2},$$

$$b_k = \tfrac{2}{2}\int\limits_{-1}^1 \underbrace{t^2\sin(k\pi t)}_{\text{lichá}}\,dt = 0.$$

Periodické rozšíření funkce f je všude spojité a podle Jordanova kritéria konverguje všude k původní funkci, tj.

$$f = \tfrac{1}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{4(-1)^k}{\pi^2k^2}\cos(k\pi t).$$

pro všechna $t \in \mathbb{R}$, neboli speciálně

$$t^2 = \tfrac{1}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{4(-1)^k}{\pi^2k^2}\cos(k\pi t)$$

pro $t \in [-1, 1]$.

Poznámka:

Konkrétní volbou pro $t = 0$ pak takto získáme vztah

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

a pro $t = 1$ pak podobně

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Parsevalova rovnost $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \int_{-1}^{1} f^2(t)\, dt$ nám pak dává další vzorec

$$\tfrac{2}{9} + \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{16}{\pi^4 k^4} = \int_{-1}^{1} t^4\, dt = \tfrac{2}{5}$$

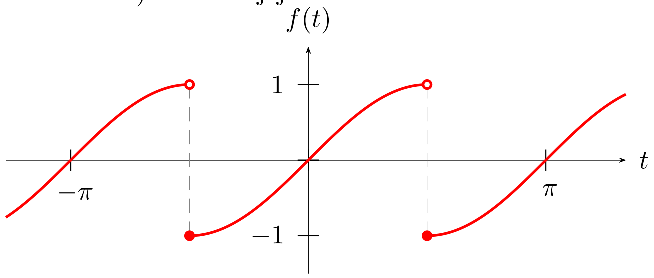
a tedy

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}\ .$$

14.6 Nalezněte Fourierovu řadu pro periodické rozšíření funkce

$$f(t) = \sin t, \qquad t \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2})$$

(tj. s periodou $T = \pi$) a určete její součet.



Řešení:
Pro Fourierovu řadu funkce f máme: $T = \pi$, $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2$ a $\frac{2}{T} = \frac{2}{\pi}$. Z lichosti f plyne, že všechny koeficienty a_k jsou nulové. Pro koeficienty b_k (opět z lichosti) máme

$$b_k = 2 \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cdot \sin(2kt)\, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\cos(2k-1)t - \cos(2k+1)t \Big)\, dt =$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[\frac{\sin(2k-1)t}{2k-1} - \frac{\sin(2k+1)t}{2k+1} \right]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} \left(\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} - \frac{(-1)^k}{2k+1} \right) = \frac{8k(-1)^{k+1}}{\pi(4k^2-1)}$$

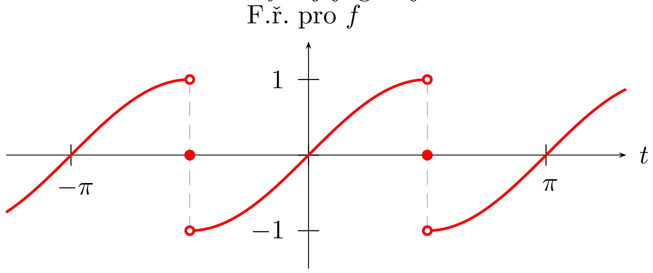
protože

$$\sin\Big((2k+1)\tfrac{\pi}{2}\Big) = (-1)^k \text{ pro } k \in \mathbb{Z}\ .$$

Dostáváme tak

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8k(-1)^{k+1}}{\pi(4k^2-1)} \sin 2kt,\ t \in \mathbb{R}.$$

Periodické rozšíření funkce f není spojité v bodech $t = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. V těchto bodech konverguje Fourierova řada k hodnotě $\frac{1}{2}[f(t^-) + f(t^+)] = 0$. Ve všech ostatních bodech konverguje Fourierova řada k periodickému rozšíření funkce f a její graf je:



Poznámka: Použili jsme vzorce

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$
$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

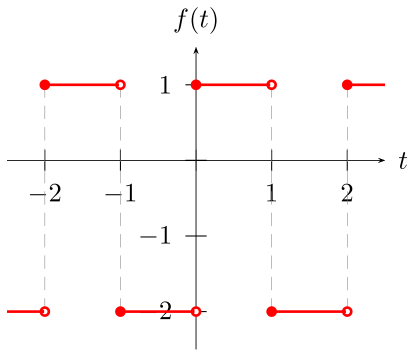
a tedy

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}\Big(\cos(x-y) - \cos(x+y)\Big) .$$

14.7 Nalezněte Fourierovu řadu pro periodické rozšíření funkce

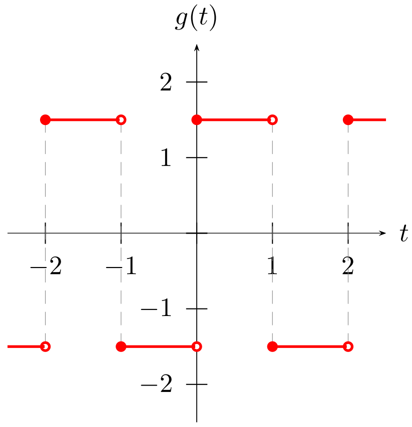
$$f(t) = \begin{cases} 1 & , \ t \in [0,1), \\ -2 & , \ t \in [1,2). \end{cases}$$

(tj. s periodou $T = 2$) a určete její součet.



Řešení:
Pro Fourierovu řadu funkce f máme: $T = 2$, $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$ a $\frac{2}{T} = 1$. Funkce není ani sudá ani lichá, ale vhodným posunutím získáme funkci g, která (téměř) lichá je (alespoň z hlediska integrálu), a sice:

$$g(t) := f(t) + \frac{1}{2} = \begin{cases} \frac{3}{2} & , \ t \in [0,1), \\ -\frac{3}{2} & , \ t \in [-1,0). \end{cases}$$



Najdeme teď Fourierovu řadu pro funkci g (s periodou $T = 2$ a frekvenci $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$). Z lichosti g dostáváme $a_i = 0$ pro $i = 0, 1, \dots$ a pro zbylé koeficienty máme

$$b_k = \tfrac{4}{T} \int\limits_0^{T/2} g(t) \sin(k\omega t)\, dt = 2 \int\limits_0^1 \tfrac{3}{2} \sin(k\pi t)\, dt = -3 \left[\tfrac{\cos(k\pi t)}{k\pi}\right]_{t=0}^{t=1} =$$

$$= 3 \cdot \tfrac{1-(-1)^k}{k\pi} = \begin{cases} 0 & , k \text{ sudé} \\ \frac{6}{\pi(2n-1)} & , k = 2n-1,\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

pro $k \in \mathbb{N}$.

Takže

$$f + \tfrac{1}{2} = g \sim \sum_{k=1}^{\infty} 3 \cdot \tfrac{1-(-1)^k}{k\pi} \sin(k\pi t) = \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{6}{\pi(2n-1)} \sin\big((2n-1)\pi t\big)$$

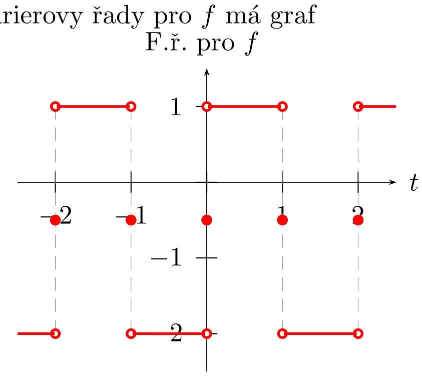
a podle Jordanova kritéria je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{6}{\pi(2n-1)} \sin\big((2n-1)\pi t\big) = \begin{cases} 0 & , t \in \mathbb{Z} \\ g(t) & , t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\ . \end{cases}$$

Úpravou pak získáme:

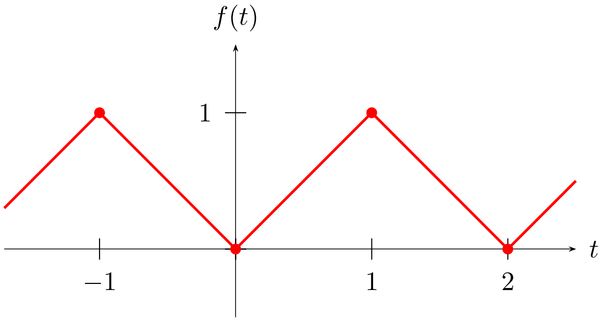
$$f \sim -\tfrac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{6}{\pi(2n-1)} \sin\big((2n-1)\pi t\big) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & , t \in \mathbb{Z} \\ f(t) & , t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\ . \end{cases}$$

kde součet Fourierovy řady pro f má graf



To, že jsme takto získali skutečně Fourierovu řadu pro f, plyne z její jednoznačnosti (nebo snadno z linearity výpočtu koeficientů).

14.8 Určete Fourierovu řadu periodického rozšíření funkce $f(t) = |t|$, $-1 \le t < 1$.



Řešení:
Perioda rozšíření bude $T = 2$, takže $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$. Rozšíření funkce f je sudé, takže $b_k = 0$. Zbylé koeficienty Fourierovy řady jsou tyto:

$$a_0 = 2 \cdot \frac{2}{2} \int_0^1 t\,dt = 2 \left[\frac{t^2}{2} \right]_{t=0}^{t=1} dt = 1;$$

pro $k \ge 1$:

$$a_k = 2 \cdot \frac{2}{2} \int_0^1 t \cos k\pi t\,dt = 2 \left[t \cdot \frac{\sin k\pi t}{k\pi} + \frac{\cos k\pi t}{k^2\pi^2} \right]_{t=0}^{t=1} = \frac{2}{k^2\pi^2}(\cos k\pi - 1) = \begin{cases} 0, & \text{pro } k = 2n \\ -\frac{4}{k^2\pi^2}, & \text{pro } k = 2n+1 \end{cases}$$

pro $n \in \mathbb{N}$.

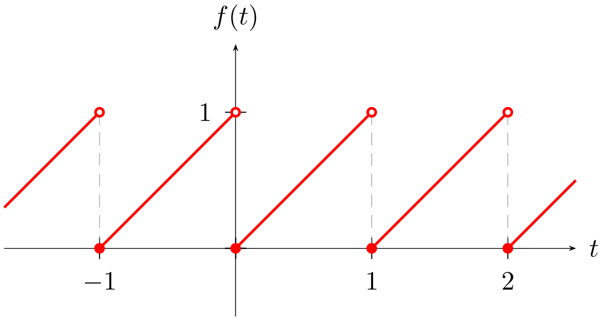
Protože periodické rozšíření funkce f je spojité, tak Fourierova řada k němu konverguje stejnoměrně na celém $\mathbb{R}$. Proto můžeme napsat dokonce

$$|t| = \frac{1}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\pi^2(2n+1)^2} \cos(2n+1)\pi t, \qquad t \in [-1, 1].$$

14.9 Nalezněte Fourierovu řadu pro periodické rozšíření funkce

$$f(t) = t, \qquad t \in [0, 1)$$

(tj. s periodou $T = 1$) a určete její součet.

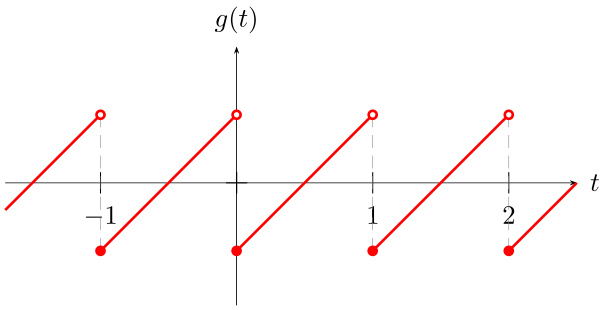


Řešení:
Pro Fourierovu řadu funkce f máme: $T = 1$, $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi$ a $\frac{2}{T} = 2$. Funkce není ani sudá ani lichá, ale vhodným posunutím získáme funkci g, která (téměř) lichá je (alespoň z hlediska integrálu), a sice:

$$g(t) := f(t) - \frac{1}{2}$$

s periodou $T = 1$, která na intervalu $\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ má předpis

$$g(t) = \begin{cases} t - \frac{1}{2} & , \ t \in \langle 0, \frac{1}{2}), \\ t + \frac{1}{2} & , \ t \in \langle -\frac{1}{2}, 0). \end{cases}$$



Najdeme teď Fourierovu řadu pro funkci g (s periodou $T = 1$ a frekvenci $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi$). Z lichosti g dostáváme $a_i = 0$ pro $i = 0, 1, \ldots$ a pro zbylé koeficienty máme

$$b_k = \frac{4}{T} \int\limits_0^{T/2} g(t) \sin(k\omega t)\, dt = 4 \int\limits_0^{1/2} (t - \tfrac{1}{2}) \sin(2k\pi t)\, dt = -4 \left[(t - \tfrac{1}{2}) \frac{\cos(2k\pi t)}{2k\pi} \right]_{t=0}^{t=1/2} + 4 \int\limits_0^{1/2} \frac{\cos(2k\pi t)}{2k\pi}\, dt =$$

$$= -\frac{1}{k\pi} + 4 \underbrace{\left[\frac{\sin(2k\pi t)}{(2k\pi)^2} \right]_{t=0}^{t=1/2}}_{=0} = -\frac{1}{k\pi}$$

pro $k \in \mathbb{N}$.
Takže

$$f - \tfrac{1}{2} = g \sim -\sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{1}{k\pi} \sin(2k\pi t)$$

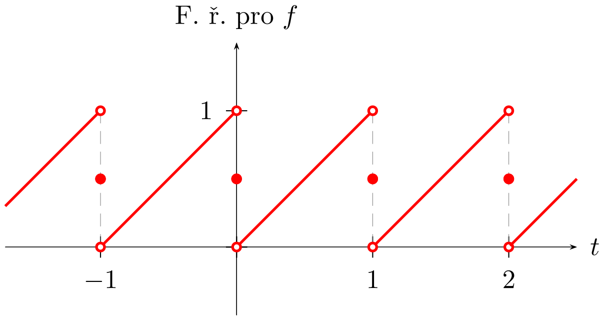
a podle Jordanova kritéria je

$$-\sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{1}{k\pi} \sin(2k\pi t) = \begin{cases} 0 & , t \in \mathbb{Z} \\ g(t) & , t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\ . \end{cases}$$

Úpravou pak získáme:

$$f \sim \tfrac{1}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{1}{k\pi} \sin(2k\pi t) = \begin{cases} \frac{1}{2} & , t \in \mathbb{Z} \\ f(t) & , t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\ . \end{cases}$$

kde součet Fourierovy řady pro f má graf

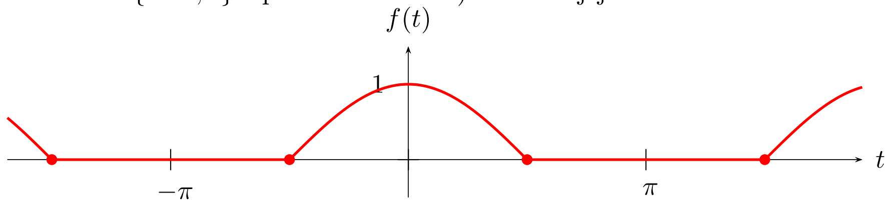


To, že jsme takto získali skutečně Fourierovu řadu pro f, plyne z její jednoznačnosti (nebo snadno z linearity výpočtu koeficientů).

14.10 Nalezněte Fourierovu řadu pro periodické rozšíření funkce

$$f(t) = \begin{cases} \cos t & , \ t \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ 0 & , \ t \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) \end{cases}$$

(neboli funkci $\max\{\cos t, 0\}$ s periodou $T = 2\pi$) a určete její součet.



Řešení:

Perioda naší funkce je $T = 2\pi$, frekvence je $\omega = \frac{2\pi}{T} = 1$ a $\frac{2}{T} = \frac{1}{\pi}$. Funkce f je sudá. Proto $b_k = 0$ pro $k = 1, 2, \ldots$ a dále ze sudosti f máme pro zbyle koeficienty Fourierovy řady funkce f, ze:

$$a_0 = 2 \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t)\, dt = 2 \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos t\, dt = \frac{2}{\pi} \Big[\sin t \Big]_{t=0}^{t=\pi/2} = \frac{2}{\pi}.$$

$$a_k = 2 \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos(kt)\, dt = 2 \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos t \cos(kt)\, dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \big(\cos(k+1)t + \cos(k-1)t \big)\, dt =$$

$$= \{\text{dále platí pro } k \geq 2\} = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(k+1)t}{k+1} + \frac{\sin(k-1)t}{k-1} \right]_{t=0}^{t=\pi/2} =$$

$$= \begin{cases} 0 & , k \text{ liché} \\ \frac{1}{\pi} \left(\frac{(-1)^n}{2n+1} + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \right) = -\frac{2(-1)^n}{\pi(4n^2-1)} & , k = 2n, \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

protože

$$\sin\Big((2n+1)\tfrac{\pi}{2} \Big) = (-1)^n \text{ pro } n \in \mathbb{Z} \,.$$

Pro $k = 1$ máme

$$a_1 = \cdots = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \big(\cos 2t + 1\big)\, dt = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin 2t}{2} + t \right]_{t=0}^{t=\pi/2} = \frac{1}{2}\,.$$

Takže dostáváme

$$f \sim \tfrac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \big[a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)\big] =$$

$$= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \cos t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2 - 1} \cos 2nt$$

($a_k = 0$ pro lichá k a pro sudá jsme to přepsali pomocí $k = 2n$)

Periodické rozšíření funkce f je všude spojité a podle Jordanova kritéria konverguje všude k původní funkci, tj.

$$f(t) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \cos t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2 - 1} \cos 2nt$$

pro všechna $t \in \mathbb{R}$.

Poznámka: Použili jsme vzorce

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$
$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

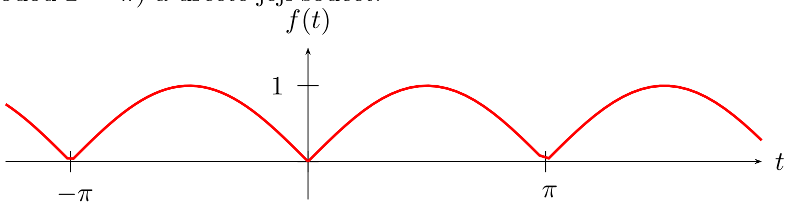
a tedy

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}\Big(\cos(x + y) + \cos(x - y) \Big)\,.$$

14.11 Nalezněte Fourierovu řadu pro periodické rozšíření funkce

$$f(t) = \sin t, \qquad t \in [0, \pi)$$

(tj. s periodou $T = \pi$) a určete její součet.



Řešení:

Perioda naší funkce je $T = \pi$, frekvence je $\omega = \frac{2\pi}{\pi} = 2$ a $\frac{2}{T} = \frac{2}{\pi}$. Funkce f je sudá, tedy $b_k = 0$ pro $k \in \mathbb{N}$. Spočítáme zbylé koeficienty Fourierovy řady funkce f, kde opět využijeme sudosti a periodičnosti funkcí $f(t)\cos(k\omega t)$ pro $k = 0, 1, \ldots$:

$$a_0 = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin t \, dt = \frac{4}{\pi} \Big[-\cos t \Big]_{t=0}^{t=\pi/2} = \frac{4}{\pi}.$$

$$a_k = \frac{4}{T}\int\limits_0^{T/2} f(t)\cos(k\omega t)\,dt = \frac{4}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2} \sin t\cos(2kt)\,dt = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2} \big(\sin(2k+1)t - \sin(2k-1)t\big)\,dt =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos(2k+1)t}{2k+1} + \frac{\cos(2k-1)t}{2k-1}\right]_{t=0}^{t=\pi/2} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k-1}\right) =$$

$$= \frac{-4}{\pi(4k^2-1)} \quad \text{pro } k \geq 1.$$

Poznámka: Použili jsme vzorce

$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$$
$$\sin(x-y) = \sin x\cos y - \cos x\sin y$$

a tedy

$$\sin x\cos y = \frac{1}{2}\Big(\sin(x+y) + \sin(x-y)\Big)\ .$$

Takže dostáváme

$$f \sim \tfrac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\big[a_k\cos(2kt) + b_k\sin(2kt)\big] =$$

$$= \frac{2}{\pi} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(4k^2-1)}\cos 2kt\ .$$

Periodické rozšíření funkce f je všude spojité a podle Jordanova kritéria konverguje všude k původní funkci, tj.

$$\sin t = \frac{2}{\pi} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(4k^2-1)}\cos 2kt$$

pro všechna $t \in \langle 0, \pi\rangle$.

Pro náš příklad z Parsevalovy rovnosti dostáváme, že

$$\frac{8}{\pi^2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{16}{\pi^2(4k^2-1)^2} = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\sin^2 t\,dt = 1$$

a tedy máme takovouto rovnost

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(4k^2-1)^2} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}\ .$$