2. cvičení z Matematické analýzy 2

27. září - 1. října 2021

2.1 Pro následující funkce f vždy načrtněte graf a popište vrstevnice:

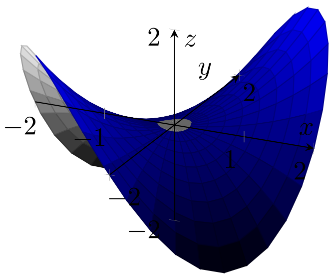
(a) $f_1(x,y) = xy$,

(b) $f_2(x,y) = x^2 - y^2$.

Řešení:
Zde se hodí všimnout si, že grafy funkcí jsou navzájem otočené o $\frac{\pi}{4}$ (a současně přenásobené hodnotou $\frac{1}{2}$). To zjistíme, když si zavedeme nové proměnné $x' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x-y)$ a $y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)$ neboli použijeme ortogonální transformaci

$$\Phi : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{4}) & -\sin(\frac{\pi}{4}) \\ \cos(\frac{\pi}{4}) & \sin(\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Pak $(f_1 \circ \Phi)(x,y) = \frac{1}{2}(x-y)(x+y) = \frac{1}{2}(x^2-y^2) = \frac{1}{2}f_2(x,y)$. Stačí si tedy rozmyslet graf jen pro jeden z případů. Vrstevnice jsou opět zřejmě (soustředné) hyperboly a jejich asymptoty. A výsledný graf se nazývá hyperbolický paraboloid (nebo také sedlová plocha) a je to příklad plochy s tzv. zápornou křivostí (stejně jako předchozí jednodílný hyperboloid).



Motivace:
Pojem *otevřené* množiny intuitivně zavádíme jako množinu, která s každým bodem obsahuje ještě dost prostoru kolem něj (je to kvůli pozdějšímu použití pro derivování - potřebujeme se k bodu přiblížit "odkudkoliv").

Pojmem *uzavřené* množiny zase intuitivně myslíme takovou množinu, ze které nemůžeme vypadnout při "limitách posloupností," tj. taková množina obsahuje všechny body, ke kterým se můžeme z této množiny přiblížit libovolně blízko.

Kupodivu, tyto dva pojmy jsou nakonec navzájem doplňkové (viz níže).

Definice:
Okolím $U_\varepsilon(a_0)$ (tzv. otevřenou koulí) s poloměrem $\varepsilon > 0$ a středem v bodě $a_0 \in \mathbb{R}^n$ označujeme množinu

$$U_\varepsilon(a_0) \overset{\text{def}}{=} \{a \in \mathbb{R}^n \mid ||a - a_0|| < \varepsilon\}$$

kde $||a - a_0||$ je *eukleidovská vzdálenost* bodů a a a_0, tj. pro

$$a_0 = (x_1, \ldots, x_n) \quad \text{a} \quad a = (y_1, \ldots, y_n)$$

je

$$||a - a_0|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}\ .$$

Připomeňme si, že pro množinu $A \subseteq \mathbb{R}^n$ si

- *vnitřek* A° množiny A definujeme jako množinu všech bodů $a \in A$, které jsou v A i s nějakým okolím:

$$a \in A^\circ \overset{\text{def}}{\iff} (\exists\ \varepsilon > 0)\ \ U_\varepsilon(a) \subseteq A$$

- *hranice* ∂A množiny A je množina všech bodů $a \in \mathbb{R}^n$, jejichž libovolná okolí zasahují jak do samotné množiny A, tak do jejího doplňku $\mathbb{R}^n \setminus A$:

$$a \in \partial A \overset{\text{def}}{\iff} (\forall\ \varepsilon > 0)\ \ U_\varepsilon(a) \cap A \neq \emptyset \ \ \wedge \ \ U_\varepsilon(a) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \neq \emptyset$$

- *uzávěr* $\overline{A}$ množiny A si definujeme jako množinu

$$\overline{A} \overset{\text{def}}{=} A \cup \partial A$$

  neboli (jak se dá snadno ověřit) jako množinu všech bodů $a \in \mathbb{R}^n$, jejichž libovolná okolí zasahují do množiny A:

$$a \in \overline{A} \iff (\forall\ \varepsilon > 0)\ \ U_\varepsilon(a) \cap A \neq \emptyset$$

Kromě toho ještě platí, že

$$\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ$$

a tedy

$$\overline{A} = A^\circ \ \uplus\ \partial A$$

kde "$\uplus$" znamená disjunktní sjednocení. Pro libovolnou množinu A se dále celý prostor $\mathbb{R}^n$ vždy disjunktně rozloží na vnitřek A°, hranici ∂A a *vnějšek* $(\mathbb{R}^n \setminus A)^\circ$:

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{A^\circ}_{\text{vnitřek}} \ \uplus\ \underbrace{\partial A}_{\text{hranice}} \ \uplus\ \underbrace{(\mathbb{R}^n \setminus A)^\circ}_{\text{vnějšek}}$$

A nakonec si ještě (teď už skutečně) definujme, že

- množina A je *otevřená* $\overset{\text{def}}{\iff} A = A^\circ$ (tj. A je rovna svému vnitřku)
- množina A je *uzavřená* $\overset{\text{def}}{\iff} A = \overline{A}$ (tj. A je rovna svému uzávěru).

A platí, že

$$A \text{ je otevřená} \iff \mathbb{R}^n \setminus A \text{ je uzavřená}$$

(tj. otevřenost a uzavřenost jsou vzájemně doplňkové pojmy).

Poznámka: Při zdůvodnění toho, že nějaká množina je otevřená, případně uzavřená, se dá využít následující věta:

Jestliže $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce (tento pojem bude sice definován později, ale např. polynom určitě spojitá funkce bude), pak

- množina $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid f(x_1, \ldots, x_n) > 0\}$ je otevřená,
- množina $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid f(x_1, \ldots, x_n) \geq 0\}$ je uzavřená.

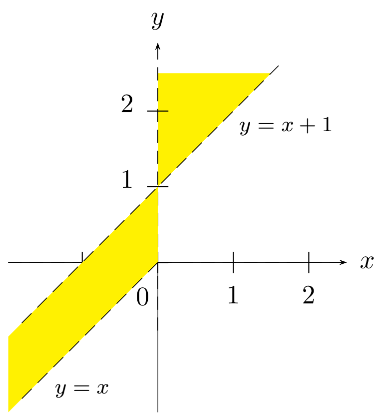
2.2 Určete vnitřek, hranici a uzávěr definičních oborů následujících množin (z příkladu **1.3**):

(a) $M:\ (x>0\ \wedge\ x+1<y)\ \vee\ (x<0\ \wedge\ x<y<x+1)$,

(b) $M:\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2\geq\frac{1}{4}\ \wedge\ (x-1)^2+y^2<1$.

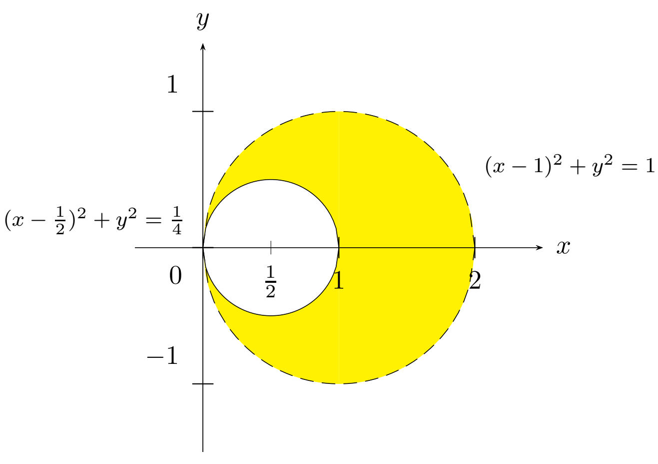
Řešení:
Tento příklad je určený pro "intuitivní" řešení pomocí náčrtů daných množin.

(a) Náčrtek množiny M:



- (***vnitřek***): Množina M je zadána ostrými nerovnostmi, je tedy otevřená a proto $M^\circ = M$.
- (***uzávěr***) $\overline{M}:\quad (x\geq 0\ \wedge\ y-x\geq 1)\ \vee\ (x\leq 0\ \wedge\ 0\leq y-x\leq 1)$
- (***hranice***) $\partial M:\quad y=x+1\ \vee\ (y=x\ \wedge\ x\leq 0)\ \vee\ (x=0\ \wedge\ y\geq 0)$
  (Hranice jsou části přímek.)

(b) Množina M představuje oblasti vně a uvnitř kružnic.



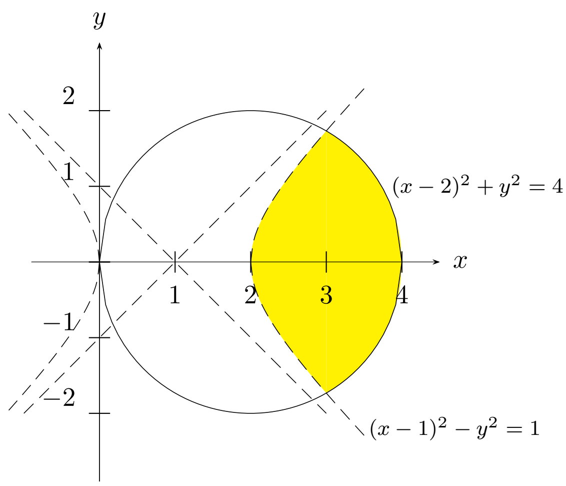
- (***vnitřek***) $M^\circ:\quad \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2>\frac{1}{4}\ \wedge\ (x-1)^2+y^2<1.$

- (***uzávěr***) $\overline{M}$: $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \geq \frac{1}{4} \ \wedge \ (x-1)^2 + y^2 \leq 1.$
- (***hranice***) $\partial M = \overline{M} \setminus M^\circ$: $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4} \ \vee \ (x-1)^2 + y^2 = 1$
  (POZOR: je tu jiná logická spojka!)

2.3 Určete vnitřek, hranici a uzávěr množiny z příkladu **1.4**:

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 2x - y^2 > 0 \ \wedge \ x^2 - 4x + y^2 \leq 0\} \ .$$

Řešení:
Tento příklad je určený pro "intuitivní" řešení pomocí náčrtů daných množin.



- (***vnitřek***) M° : $(x-1)^2 - y^2 > 1 \ \wedge \ (x-2)^2 + y^2 < 4.$
- (***uzávěr***): Musíme si dát pozor na zápis, protože bod $(0,0)$ v uzávěru naší množiny M není, ačkoliv je průnikem hyperboly a kružnice.

$$\overline{M} : \quad (x-1)^2 - y^2 \geq 1 \ \wedge \ (x-2)^2 + y^2 \leq 4 \ \wedge \ (x,y) \neq (0,0) \ .$$

- (***hranice***): Hranice je jeden oblouk kružnice a jeden oblouk hyperboly. Opět si musíme dát pozor na zápis, protože bod $(0,0)$ na hranici naší množiny M není.

$$\partial M : \Big((x-1)^2 - y^2 = 1 \ \wedge \ (x-2)^2 + y^2 \leq 4 \ \wedge \ (x,y) \neq (0,0)\Big) \ \vee$$
$$\vee \ \Big((x-1)^2 - y^2 \geq 1 \ \wedge \ (x-2)^2 + y^2 = 4 \ \wedge \ (x,y) \neq (0,0)\Big)$$

Poznámka: Můžeme si všimnout, že vnitřek (uzávěr, resp.) jsme v předchozích příkladech často získali tak, že jsme z neostrých nerovnosti udělali ostré (z ostrých neostré, resp.). Ale POZOR, takhle to obecně nefunguje, jak ukázal příklad **2.3** a jak je také vidět z následujícího příkladu:

Lze zvolit spojitou funkci $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tak, aby pro

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) > 0\}$$

a

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) \geq 0\}$$

bylo

$$\overline{A} \subsetneqq B \quad \text{a} \quad A \subsetneqq B^\circ$$

(neboli: po přidání neostré nerovnosti je uzávěr obecně MENŠÍ a po ubrání neostré nerovnosti je vnitřek obecně VĚTŠÍ.)

Taková funkce je např.

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2, & x < 0, \\ 0, & x \in \langle 0, 1 \rangle, \\ -(x-1)^2, & x > 1\ . \end{cases}$$

kde je pak $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0\}$ a $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 1\}$.

Problém vzniká proto, že zatímco vrstevnice

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = c\}$$

pro hladiny $c \neq 0$ jsou křivky (objekty s dimenzí 1), tak pro $c = 0$ je vrstevnice plocha (objekt s dimenzí 2).

2.4 Určete vnitřek, hranici, vnějšek a uzávěr množiny $\mathbb{Q}^2 \subseteq \mathbb{R}^2$, kde $\mathbb{Q}$ je množina všech racionálních čísel.

Řešení:
Uvědomíme si, že v libovolném okolí (na reálné přímce) libovolného $r \in \mathbb{R}$ leží jak nějaké racionální číslo, tak také nějaké iracionální číslo. Dále pokud máme $|r_i - s_i| < \frac{\varepsilon}{2}$ pro $i = 1, 2$ (kde $r_i, s_i \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$) pak

$$||(r_1, r_2) - (s_1, s_2)|| = \sqrt{(r_1 - s_2)^2 + (r_2 - s_2)^2} \leq \sqrt{\left(\tfrac{\varepsilon}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{\varepsilon}{2}\right)^2} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} < \varepsilon\ .$$

Jestliže si nyní vezmeme libovolný bod $a = (r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2$ a zvolíme $\varepsilon > 0$, pak

- existují racionální čísla $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ tak, že $|r_i - q_i| < \frac{\varepsilon}{2}$
- a také iracionální čísla $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tak, že $|r_i - \alpha_i| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Speciálně tedy v libovolném ε-okolí $U_\varepsilon(a)$ bodu $a \in \mathbb{R}^2$ leží jak nějaký prvek z $(q_1, q_2) \in \mathbb{Q}^2$, tak nějaký prvek $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$. Proto můžeme ihned napsat, že

$$\overline{\mathbb{Q}^2} = \mathbb{R}^2, \quad (\mathbb{Q}^2)^\circ = \emptyset \quad \text{a} \quad \partial\mathbb{Q}^2 = \overline{\mathbb{Q}^2} \setminus (\mathbb{Q}^2)^\circ = \mathbb{R}^2 \setminus \emptyset = \mathbb{R}^2.$$

2.5 Najděte příklady neprázdných množin M v $\mathbb{R}^2$, že

(a) M nemá žádný vnitřní ani vnější bod (= vnitřní bod doplňku množiny M),

(b) M nemá žádný hraniční bod,

(c) M nemá žádný vnější bod a je uzavřená.

Řešení:
(a) Např. $M = \mathbb{Q}^2$ (jak je vidět z postupu v příkladu **2.4**, tak ani $\mathbb{Q}^2$ ani $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$ nemají vnitřní body).

(b) Žádný hraniční bod nemá určitě celá rovina, tj. $M = \mathbb{R}^2$ (protože její doplněk je prázdný).

Dokonce je to jediná taková množina: Nechť M nemá hraniční bod, tj. $\partial M = \emptyset$. Pak

$$M \subseteq \overline{M} = M^\circ \cup \underbrace{\partial M}_{=\emptyset} = M^\circ \subseteq M$$

tedy dostáváme, že $M = \overline{M}$ a $M = M^\circ$. Množina M je tak současně otevřená a uzavřená. Dá se ukázat (s trochou práce), že jediná taková neprázdná množina v $\mathbb{R}^2$ je jen $M = \mathbb{R}^2$. Je to důsledek tzv. *souvislosti* prostoru $\mathbb{R}^2$.

(c) Opět můžeme zvolit $M = \mathbb{R}^2$.

Opět je to jediná takováto množina, což zjistíme takto: Použijeme rozklad $\mathbb{R}^2$ pomocí M, pro kterou předpokládáme $(\mathbb{R}^2 \setminus M)^\circ = \emptyset$ a $M = \overline{M}$:

$$\mathbb{R}^2 = \underbrace{M^\circ \ \uplus \ \partial M}_{=\overline{M}} \ \uplus \ \underbrace{(\mathbb{R}^n \setminus M)^\circ}_{=\emptyset} = \overline{M} = M$$

tedy $M = \mathbb{R}^2$.