3. cvičení z Matematické analýzy 2

4. - 8. října 2021

Připomenutí:

Jestliže chceme zjišťovat, jak se chová funkce v okolí nějakého bodu ve smyslu limity, pak se k tomuto bodu potřebujeme přiblížit pomocí bodu z definičního oboru dané funkce. Přitom však tyto body chceme mít jiné, než je samotný původní bod, ve kterém limitu zjišťujeme. To vede k následujícím pojmům:

- *Prstencovým okolím $P_\varepsilon(a_0)$* s poloměrem $\varepsilon > 0$ a středem v bodě $a_0 \in \mathbb{R}^n$ označujeme množinu

$$P_\varepsilon(a_0) \overset{\text{def}}{=} U_\varepsilon(a_0) \setminus \{a_0\} = \{a \in \mathbb{R}^n \mid 0 < ||a - a_0|| < \varepsilon\}$$

- bod a_0 je *hromadným bodem množiny M*, jestliže v každém svém okolí má nějaký bod této množiny, ale jiný než a_0, tj.:

$$(\forall\ \varepsilon > 0) \quad P_\varepsilon(a) \cap M \neq \emptyset$$

(hromadný bod je tedy určitě bodem uzávěru množiny M, ale není "osamocený").

Limita funkce je nyní definována takto:

Nechť $f : D \to \mathbb{R}$ je funkce s definičním oborem $D \subseteq \mathbb{R}^n$ a $a_0 \in \mathbb{R}^n$ je hromadný bod tohoto definičního oboru D. Následující definice a značení znamená, že hodnota $c \in \mathbb{R}$ je limitou funkce f v bodě a_0:

$$\lim_{a \to a_0} f(a) = c \overset{\text{def}}{\iff} (\forall\ \varepsilon > 0)(\exists\ \delta > 0)(\forall a \in D) \quad \underbrace{0 < \|a - a_0\| < \delta}_{a \in P_\delta(a_0)} \Rightarrow \underbrace{|f(a) - c| < \varepsilon}_{f(a) \in U_\varepsilon(c)}$$

(tj. když jsme v dostatečně malém prstencovém okolí $P_\delta(a_0)$ bodu a_0, pak se body odsud zobrazují funkcí f do zvoleného malého okolí $U_\varepsilon(c)$ hodnoty c.)

3.1 Vyšetřete existenci limity $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \frac{(x+y)^2}{x-y}$.

Řešení:

Definiční obor funkce $f(x, y) = \frac{(x+y)^2}{x-y}$ je

$$D(f) : \quad x \neq y\ .$$

Bod $(0, 0)$ je zřejmě hromadný bod množiny $D(f)$. Abychom zjistili, jakou hodnotu $c \in \mathbb{R}$ by případná limita měla mít, vyzkoušíme se přiblížit k bodu $a_0 = (0, 0)$ po vhodné křivce. Nejjednodušší jsou obvykle přímky. Vezměme si tedy přímku $y = kx$, kde $k \neq 1$. Pro $x \to 0$ máme $(x, kx) \to (0, 0)$. Takže nás bude zajímat

$$\lim_{x \to 0} f(x, kx) = \lim_{x \to 0} \frac{(x + kx)^2}{x - kx} = \lim_{x \to 0} \frac{(1 + k)^2}{1 - k} x = 0\ .$$

Pokud naše původní limita existuje musí mít tedy hodnotu $c = 0$ (to, že jsme prověřili přímky a dostali stejnou hodnotu, ale ještě NIC o existenci limity NEŘÍKÁ! K tomu bychom museli stejnou hodnotu dostat také pro VŠECHNY možné další křivky, po kterých se můžeme dostat do bodu a_0).

Můžeme se pokusit najít jiná přiblížení (viz níže) anebo můžeme využít jednoduché kritérium pro neexistenci (konečné) limity (viz Poznámky k limitám):

- $f(x, y) = \frac{h(x,y)}{g(x,y)}$, kde $h(x, y) = (x + y)^2$ a $g(x, y) = x - y$ jsou spojité funkce
- položme $M :\ x = y\ \wedge\ (x, y) \neq (0, 0)$

- pro každé $a \in M$ je $g(a) = 0$ a $h(a) \neq 0$
- $a_0 = (0,0)$ je hromadný bod množiny M

Pak NEEXISTUJE (konečná) limita $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

(Vzhledem k už nalezené limitě 0 při nějakém přiblížení z toho vyplývá, že ani případná "nekonečná" limita nemůže existovat.)

Zjistili jsme tedy, že $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)^2}{x-y}$ neexistuje.

Poznámka: Jestliže chceme najít přiblížení, pro které vyjde jiná hodnota než 0, můžeme v tomto případě zkusit "variaci konstanty k" a vzít křivku ve tvaru $y(x) = k(x) \cdot x$, kde $k(x)$ je zatím neznámá funkce a kdy chceme, aby pro $x \to 0$ bylo také $y(x) \to 0$. Křivku dosadíme do funkce:

$$f\big(x, y(x)\big) = \frac{\big(x + k(x)\cdot x\big)^2}{x - k(x)\cdot x} = \frac{\big(1+k(x)\big)^2}{1-k(x)} \cdot x$$

Nyní bude stačit, když se např. $\frac{x}{1-k(x)}$ bude blížit k nenulové hodnotě $d \in \mathbb{R}$ a současně i $\big(1+k(x)\big)^2$ se bude blížit ke konečné nenulové hodnotě.

Stačí položit $\frac{x}{1-k(x)} = d$, tj. $k(x) = 1 - \frac{x}{d}$. Musíme ještě ověřit, že v tomto případě je křivka

$$y(x) = k(x)\cdot x = \left(1 - \frac{x}{d}\right) x$$

stále v definičním oboru $D(f)$ (což by stačilo i jen pro x blízká k 0). To je ale ihned vidět. Dále také zřejmě je $y(x) \to 0$ pro $x \to 0$.

A nakonec vidíme, že

$$f\big(x, y(x)\big) = \cdots = \frac{\big(1+k(x)\big)^2}{1-k(x)} \cdot x = d\left(2 - \frac{x}{d}\right)^2 \quad \overset{x\to 0}{\longrightarrow} \quad 4d$$

což je kýžený výsledek.

Současně si všimněme, že k bodu $(0,0)$ se blížíme v tomto případě po parabole $y(x) = x - \frac{x^2}{d}$ jejíž tečna v bodě $(0,0)$ je právě přímka $y = x$, kterou jsme vyloučili z definičního oboru $D(f)$. Toto je v jistém smyslu i návod pro jiné příklady - hledejme křivky "napodobující" hranici definičního oboru v daném bodě.

3.2 Zjistěte, zda existují následující limity a pokud ano, určete jejich hodnotu:

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y}{y^2+x}$,

(b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{x^2y^2}$.

Řešení:

(a) Definiční obor funkce $f(x,y) = \frac{x^2+y}{y^2+x}$ je

$$D(f): \quad x \neq -y^2 \ .$$

Bod $(0,0)$ je zřejmě hromadný bod množiny $D(f)$. Z tvaru funkce f už snadno vidíme, že na parabole $x = -y^2$ se jmenovatel zlomku vynuluje a čitatel ne (až na bod $(0,0)$). Takže můžeme použít jednoduché kritérium pro neexistenci (konečné) limity (viz Poznámky k limitám):

- $f(x,y) = \frac{h(x,y)}{g(x,y)}$, kde $h(x,y) = x^2 + y$ a $g(x,y) = y^2 + x$ jsou spojité funkce
- položme $M: \ x = -y^2 \ \wedge \ (x,y) \neq (0,0)$

- pro každé $a \in M$ je $g(a) = 0$ a $h(a) \neq 0$
- $a_0 = (0,0)$ je hromadný bod množiny M

Pak NEEXISTUJE (konečná) limita $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Pro pořádek si ještě spočítejme alespoň jedno přiblížení, abychom věděli, že ani případná "nekonečná" limita nemůže existovat:

Vyzkoušíme se přiblížit k bodu $a_0 = (0,0)$ po přímce $y = kx$, kde $k \in \mathbb{R}$. Pro $x \to 0$ máme $(x, kx) \to (0,0)$. Takže nás zajímá

$$\lim_{x\to 0} f(x, kx) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + kx}{k^2x^2 + x} = \lim_{x\to 0} \frac{x + k}{k^2 x + 1} = k\ .$$

I z tohoto výsledku už vidíme, že limita závisí na přiblížení. Takže i toto nám ukazuje, že limita $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y}{y^2+x}$ prostě neexistuje.

- -

(b) Pro funkci $f(x,y) = (x^2 + y^2)^{x^2y^2} = e^{x^2y^2 \ln(x^2+y^2)}$ je její definiční obor

$$D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

Stačí tedy zjistit $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x^2y^2 \ln(x^2 + y^2)$. Zkusíme si přiblížení, např. po ose x (tj. při $y = 0$):

$$\lim_{x\to 0} f(x, 0) = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

Tedy jediný kandidát na limitu je $c = 0$. Ze zkušenosti s limitami můžeme už tušit, že limita bude existovat. Použijeme odhad:

$$|x|, |y| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$$

a z něj máme

$$0 \leq \left| x^2y^2 \ln(x^2 + y^2) \right| \leq (x^2 + y^2)^2 \cdot \left| \ln(x^2 + y^2) \right|.$$

Použitím věty o limitě složené funkce pro předpoklady

- $g(x,y) = x^2 + y^2$ a $h(z) = z^2 \ln z$
- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0\ (= b_0)$
- $\lim\limits_{z\to(b_0)_+} h(z) = \lim\limits_{z\to 0_+} z^2 \ln z = 0 \quad \overset{\mathrm{L'Hospital}}{\Longleftarrow} \quad \lim\limits_{z\to 0_+} \frac{(\ln z)'}{(z^{-2})'} = \lim\limits_{z\to 0_+} \frac{z^{-1}}{-2z^{-3}} = \lim\limits_{z\to 0_+} \frac{z^2}{-2} = 0$
- v prstencovém okolí bodu $(0,0)$ je $g(x,y) \neq b_0$

dostáváme

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2 + y^2)^2 \ln(x^2 + y^2) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} h(g(x,y)) = 0.$$

Z věty o limitě sevřené funkce pak máme

$$0 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 \ \leq \ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| x^2y^2 \ln(x^2 + y^2) \right| \ \leq \ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| (x^2 + y^2)^2 \cdot \ln(x^2 + y^2) \right| \ = 0$$

tedy

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2y^2 \ln(x^2 + y^2) = 0$$

a konečně pak

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{x^2y^2} = e^0 = 1.$$

Ještě pomocí polárních souřadnic: Můžeme opět použít odhad pomocí polárních souřadnic (ale ani zde nedostaneme nic nového): body (x, y) v okolí $a_0 = (0, 0)$ vyjádříme jako

$$x = \varrho \cos\varphi \quad \text{a} \quad y = \varrho \sin\varphi$$

a dosadíme:

$$0 \le \left| x^2y^2 \ln(x^2+y^2) \right| = \varrho^4 \cos^2\varphi \sin^2\varphi \ln(\varrho^2) \le \varrho^4 \ln(\varrho^2) =: g(\varrho)$$

A protože $\lim\limits_{\varrho\to 0_+} g(\varrho) = \lim\limits_{\varrho\to 0_+} 2\varrho^4 \ln\varrho = 0$ (viz výše) vyplývá z toho (viz Poznámky k limitám), že

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2y^2 \ln(x^2+y^2) = 0\ .$$

A zbytek by byl stejný.

3.3 Zjistěte, zda existují následující limity a pokud ano, určete jejich hodnotu:

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^3}$,

(b) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} ((x-1)^2+y) \sin\left(\frac{1}{x}\right) \sin\left(\frac{x-y}{y^2}\right)$.

Řešení:

(a) Definiční obor funkce $f(x, y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^3}$ je

$$D(f): \quad y^3 \neq -x^2\ .$$

Bod $(0, 0)$ je zřejmě hromadný bod množiny $D(f)$. Z tvaru funkce f snadno vidíme, že na křivce $y = -\sqrt[3]{x^2}$ se jmenovatel zlomku vynuluje a čitatel ne (až na bod $(0, 0)$). Takže můžeme použít jednoduché kritérium pro neexistenci (konečné) limity (viz Poznámky k limitám):

- $f(x, y) = \frac{h(x,y)}{g(x,y)}$, kde $h(x, y) = x^2y^2$ a $g(x, y) = x^2 + y^3$ jsou spojité funkce
- položme $M: \ y = -\sqrt[3]{x^2} \ \wedge \ (x, y) \neq (0, 0)$
- pro každé $a \in M$ je $g(a) = 0$ a $h(a) \neq 0$
- $a_0 = (0, 0)$ je hromadný bod množiny M

Pak NEEXISTUJE (konečná) limita $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$.

Pro pořádek si ještě spočítejme alespoň jedno přiblížení, abychom věděli, že ani případná "nekonečná" limita nemůže existovat:

Vyzkoušíme se přiblížit k bodu $a_0 = (0, 0)$ po přímce $y = kx$, kde $k \in \mathbb{R}$. Pro $x \to 0$ máme $(x, kx) \to (0, 0)$. Takže dostaneme

$$\lim_{x\to 0} f(x, kx) = \lim_{x\to 0} \frac{k^2x^4}{x^2 + k^3x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{k^2x^2}{1 + k^3x} = 0\ .$$

Proto ani "nekonečná" limita neexistuje.

Celkově máme, že $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^3}$ neexistuje.

- -

(b) Definiční obor funkce $f(x,y) = ((x-1)^2 + y)\sin\left(\frac{1}{x}\right)\sin\left(\frac{x-y}{y^2}\right)$ je

$$D(f): \quad x \neq 0 \quad \wedge \quad y \neq 0.$$

Máme zde případ, kdy omezená funkce je násobena funkcí, která má limitu nula. Stačí tedy použít odhad pro $(x,y) \in D(f)$:

$$0 \leq \big|f(x,y)\big| = |(x-1)^2 + y| \cdot \underbrace{\left|\sin\left(\tfrac{1}{x}\right)\right|}_{\leq 1} \cdot \underbrace{\left|\sin\left(\tfrac{x-y}{y^2}\right)\right|}_{\leq 1} \leq |(x-1)^2 + y|$$

Z věty o limitě sevřené funkce pak máme, že

$$0 = \lim_{(x,y)\to(1,0)} 0 \quad \leq \quad \lim_{(x,y)\to(1,0)} \big|f(x,y)\big| \quad \leq \quad \lim_{(x,y)\to(1,0)} |(x-1)^2 + y| \quad = 0$$

kde jsme použili to, že funkce $g(x,y) = |(x-1)^2 + y|$ je spojitá, protože je to složení spojitých funkcí (abs. hodnota, polynom).

Nebo-li dokázali jsme, že $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

3.4 Zjistěte, zda existuje limita

$$\lim_{(x,y)\to(4,0)} \frac{\mathrm{tg}(xy)}{y}$$

a pokud ano, určete její hodnotu.

Řešení:

Definiční obor funkce $f(x,y) = \frac{\mathrm{tg}(xy)}{y}$ je

$$D(f): \quad xy \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \quad \wedge \quad y \neq 0.$$

Bod $a_0 := (4,0)$ je zřejmě hromadný bod množiny $D(f)$. Protože nás zajímá $(x,y) \to (4,0)$, tak hodnoty x v nějakém okolí bodu $(4,0)$ jsou nenulové. Proto (pro body z $D(f)$ v nějakém okolí a_0) můžeme psát

$$f(x,y) = \frac{\mathrm{tg}(xy)}{y} = \frac{\mathrm{tg}(xy)}{xy} \cdot x$$

což jsme takto udělali proto, abychom mohli vyšetřit $\lim\limits_{(x,y)\to(4,0)} \underbrace{\frac{\mathrm{tg}(xy)}{xy}}_{=F(x,y)}$ pomocí věty o limitě složené funkce. Ta nám říká, že pokud

- $F(x,y) = h(g(x,y))$, kde $g(x,y) = xy$ a $h(z) = \frac{\mathrm{tg}(z)}{z}$.
- $\lim\limits_{(x,y)\to a_0} g(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(4,0)} xy = 0 \ (=: b_0)$ (neboť g je součin spojitých funkcí)
- $\lim\limits_{z\to b_0} h(z) = \lim\limits_{z\to 0} \underbrace{\frac{\sin(z)}{z}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{\cos(z)}}_{\to 1} = 1 \ (=: c)$

- a pokud (pro korektní použití) máme ještě zajištěno,
  - že buď v prstencovém okolí $P_\varepsilon(a_0)$ bodu $a_0 = (4,0)$ je $g(a) \neq b_0$ pro $a \in P_\varepsilon(a_0) \cap D(g)$ (což snadno zajistíme tím, že omezíme definiční obor funkce g z celého $\mathbb{R}^2$ jen na $D(g) : y \neq 0$, a i potom stále ještě budeme mít $D(g) \supseteq D(F)$)
  - nebo že funkce h je spojitá v $b_0 = 0$ (což zajistíme tím, že funkci h spojitě dodefinujeme v $b_0 = 0$).

pak $\lim\limits_{(x,y)\to a_0} F(x,y) = c$.

Zjistili jsme tedy, že

$$\lim_{(x,y)\to(4,0)} \tfrac{\operatorname{tg}(xy)}{xy} = 1$$

a tudíž

$$\lim_{(x,y)\to(4,0)} \tfrac{\operatorname{tg}(xy)}{y} = \lim_{(x,y)\to(4,0)} \underbrace{\tfrac{\operatorname{tg}(xy)}{xy}}_{\to 1} \cdot \underbrace{x}_{\to 4} = 4\ .$$

3.5 Je možné najít hodnotu $c \in \mathbb{R}$ tak, aby funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{|x|^3+|y|^3}, & \text{pro } (x,y) \neq (0,0), \\ c, & \text{pro } (x,y) = (0,0)\ . \end{cases}$$

byla spojitá v bodě $a_0 = (0,0)$?

Řešení:
Podle zadání hledáme $c \in \mathbb{R}$ tak, aby

$$c = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{|x|^3+|y|^3}\ .$$

Nejdříve najdeme, jakou c musí mít hodnotu. Pokud limita existuje, pak musí být nabyta např. při přiblížení k bodu $(0,0)$ po ose x (tj. při $y = 0$):

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

Tedy jediný kandidát je $c = 0$. Teď ukážeme, že to skutečně limita je. K tomu se používají obvykle odhady. Hlavní trik v tomto případě je odhadnout jmenovatel výrazem, který se zkrátí s čitatelem. V čitateli je polynom stupně $2+2=4$, ve jmenovateli je "v podstatě" také polynom a to stupně 3. Oba jsou nulové v počátku, takže můžeme očekávat, že vršek převáží spodek.

Využijeme tento odhad:

$$|x|^3, |y|^3 \leq |x|^3 + |y|^3 \qquad \Rightarrow \qquad |x|, |y| \leq \sqrt[3]{|x|^3+|y|^3}$$

Pro $(x,y) \neq (0,0)$ tak dostaneme

$$0 \leq \left| f(x,y) - \underbrace{c}_{0} \right| = \frac{|x|^2 \cdot |y|^2}{|x|^3+|y|^3} \leq \frac{\left(\sqrt[3]{|x|^3+|y|^3}\right)^{2+2}}{|x|^3+|y|^3} = \left(|x|^3+|y|^3\right)^{\frac{4}{3}-1} = \sqrt[3]{|x|^3+|y|^3}$$

Z věty o limitě sevřené funkce pak máme, že

$$0 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 \ \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| f(x,y) - c \right| \ \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt[3]{|x|^3+|y|^3} \ = 0$$

kde jsme použili to, že funkce $g(x,y) = \sqrt[3]{|x|^3 + |y|^3}$ je spojitá, protože je to složení spojitých funkcí (polynom, absolutní hodnota, odmocnina).

Nebo-li dokázali jsme, že $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = c = 0$.

Ještě pomocí polárních souřadnic: Můžeme ještě použít odhad pomocí polárních souřadnic (který ale vlastně nepřináší v tomto případě nic nového): body (x,y) v okolí $a_0 = (0,0)$ vyjádříme jako

$$x = \varrho\cos\varphi \quad \text{a} \quad y = \varrho\sin\varphi$$

a dosadíme:

$$0 \leq \big|f(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi) - \underbrace{c}_{=0}\big| = \frac{|\varrho\sin\varphi|^2 \cdot |\varrho\cos\varphi|^2}{|\varrho\sin\varphi|^3 + |\varrho\cos\varphi|^3} = \varrho \cdot \frac{|\sin\varphi|^2 \cdot |\cos\varphi|^2}{|\sin\varphi|^3 + |\cos\varphi|^3} \leq \frac{\varrho}{|\sin\varphi|^3 + |\cos\varphi|^3}$$

Zde jsme použili odhad $|\sin\varphi| \leq 1$ a $|\cos\varphi| \leq 1$. Protože chceme dostat odhad nezávislý na φ, musíme ještě odhadnout *zespodu* jmenovatel posledního výrazu. To lze udělat díky tomu, že funkce $h(\varphi) := |\sin\varphi|^3 + |\cos\varphi|^3$ je *kladná a spojitá na omezeném a uzavřeném intervalu* $\langle 0, 2\pi\rangle$. Musí tedy existovat $\varepsilon_0 > 0$, že $h(\varphi) \geq \varepsilon_0$ pro všechna $\varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle$. Proto můžeme dále použít odhad

$$0 \leq \big|f(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi) - c\big| = \dots \leq \frac{\varrho}{|\sin\varphi|^3 + |\cos\varphi|^3} \leq \frac{\varrho}{\varepsilon_0} =: g(\varrho)$$

Nyní, protože $\lim\limits_{\varrho\to 0_+} g(\varrho) = 0$ vyplývá z toho (viz Poznámky k limitám), že $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = c = 0$.

Ještě si můžeme procvičit definici limity: Podle definice limity má tedy platit, že

$$\forall\,\varepsilon > 0 \;\; \exists\,\delta > 0 \;\; \forall\,a \in D(f) \quad 0 < \|a - a_0\| < \delta \;\Rightarrow\; |f(a) - c| < \varepsilon\,.$$

Pro $a_0 = (0,0)$ a $a = (x,y)$ je $\|a - a_0\| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Využijeme odhad, co už máme

$$\big|f(x,y) - c\big| \leq \dots \leq \sqrt[3]{|x|^3 + |y|^3}$$

a rádi bychom dostali odhad, který bude využívat hodnotu $\|a - a_0\|$. Toho lze snadno dosáhnout pomocí dalšího odhadu

$$|x|, |y| \leq \|a - a_0\| \qquad \Rightarrow \qquad \sqrt[3]{|x|^3 + |y|^3} \leq \sqrt[3]{\|a - a_0\|^3 + \|a - a_0\|^3} = \sqrt[3]{2} \cdot \|a - a_0\|$$

Tudíž máme

$$\big|f(x,y) - c\big| \leq \dots \leq \sqrt[3]{|x|^3 + |y|^3} \leq \sqrt[3]{2} \cdot \|a - a_0\|$$

pro $\varepsilon > 0$ teď stačí vzít $\delta := \frac{\varepsilon}{\sqrt[3]{2}}$ a pro a takové, že $0 < \|a - a_0\| < \delta$ tudíž máme

$$|f(a) - c| \leq \dots \leq \sqrt[3]{2} \cdot \|a - a_0\| < \sqrt[3]{2} \cdot \delta = \varepsilon\,.$$

Nebo-li dokázali jsme z definice, že $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

Připomenutí:

Nechť f je funkce z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$ a nechť a_0 je vnitřní bod jejího definičního oboru. *Derivace podle vektoru* $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$ funkce f v bodě a_0 je definována jako následující (konečná) hodnota

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{h}}(a_0) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(a_0 + t\vec{h})|_{t=0} = \lim_{t\to 0} \frac{f(a_0 + t\vec{h}) - f(a_0)}{t}$$

Neboli: Definiční obor $D(f)$ "projíždíme" po přímce $\varphi(t) = a_0 + t\vec{h}$, kde t představuje čas a $\vec{h}$ tím pádem vektor rychlosti pohybu po dané přímce. A ptáme se, jak se rychle se přitom budou měnit hodnoty funkce f při průchodu bodem a_0. Je zřejmé, že čím větší bude rychlost průchodu $\vec{h}$, tím rychlejší budou i změny hodnot funkce f.

Speciálně definujeme tzv. *parciální derivaci podle i-té proměnné* (dejme tomu, že se bude jmenovat x_i) jako

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_0) := \frac{\partial f}{\partial \vec{e}_i}(a_0)$$

kde $\vec{e}_i = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{i-\text{tá pozice}}, 0, \dots, 0)$ je vektor standardní báze.

Konkrétně pro funkci $f : D \to \mathbb{R}$, kde $D \subseteq \mathbb{R}^2$ a vnitřní bod $a_0 = (x_0, y_0)$ definičního oboru $D(f) = D$ je

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x, y_0)_{|x=x_0}$$

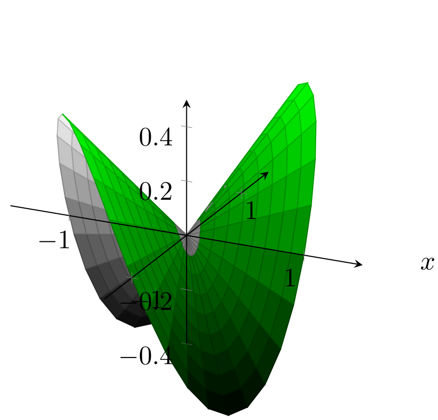
tedy funkci f stačí "obyčejně"derivovat podle proměnné x, kde druhou proměnnou y bereme na chvíli jako konstantu.

3.6 Najděte parciální derivaci $\frac{\partial f}{\partial x}$ funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{pro } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{pro } (x, y) = (0, 0) \ . \end{cases}$$

ve všech bodech $a = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Je funkce $\frac{\partial f}{\partial x}$ spojitá v bodě $a_0 = (0, 0)$?

Řešení:
Graf funkce f:



V bodech $a = (x, y) \neq (0, 0)$ je předpis funkce f v nějakém okolí $U_\varepsilon(a)$ ve tvaru $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Můžeme tak standardně použít postupy o derivování funkcí:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)(a) = \frac{y\sqrt{x^2+y^2} - xy\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-1/2}2x}{(\sqrt{x^2+y^2})^2} =$$

$$= \frac{y(x^2+y^2) - yx^2}{(\sqrt{x^2+y^2})^3} = \frac{y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

Pro bod $a = (0,0)$, který nemá v žádném svém okolí "jednotný" předpis funkce f, musíme použít (explicitní) definici:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} 0 = 0 \ .$$

Celkem jsme tedy dostali, že

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}, & \text{pro } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{pro } (x,y) = (0,0) \ . \end{cases}$$

a podíváme se, jestli je tato funkce spojitá v bodě $(0,0)$. Když si vezmeme např. přiblížení po ose y (tj. $x = 0$) dostaneme, že

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \frac{y^3}{(y^2)^{3/2}} = \begin{cases} 1, & \text{pro } y > 0, \\ -1, & \text{pro } y < 0 \ . \end{cases}$$

Tedy nejenže $\lim\limits_{y\to 0} \frac{\partial f}{\partial x}(0,y)$ není rovna 0 (což je hodnota $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$), ale dokonce tato limita vůbec neexistuje. Tedy ani limita

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$

neexistuje a funkce $\frac{\partial f}{\partial x}$ není spojitá v bodě $(0,0)$.

Na druhou stranu, jak je snadno vidět díky předpisu a spojitosti funkcí, v bodech $a = (x,y) \neq (0,0)$ funkce $\frac{\partial f}{\partial x}$ spojitá je.

Důležitá poznámka: Hodnotu $\frac{\partial f}{\partial x}(a_0)$ nelze obecně počítat jako $\lim\limits_{a\to a_0} \frac{\partial f}{\partial x}(a)$! Často ale ano, a to ovšem právě tehdy, jestliže funkce $\frac{\partial f}{\partial x}$ je spojitá v bodě a_0.

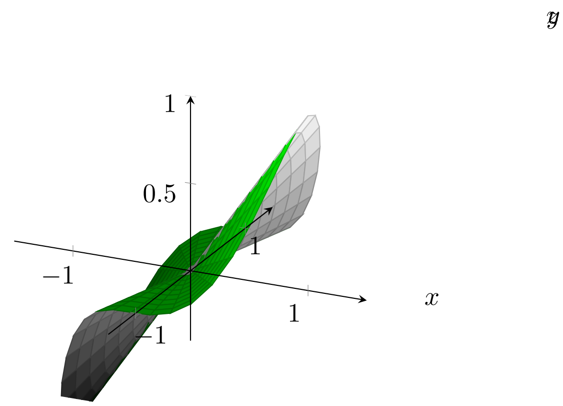
3.7 Najděte parciální derivaci $\frac{\partial f}{\partial x}$ funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & , \ (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & , \ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

ve všech bodech $a = (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Je funkce $\frac{\partial f}{\partial x}$ spojitá v bodě $a_0 = (0,0)$?

Řešení:

Graf funkce f:



V bodech $a = (x, y) \neq (0,0)$ je předpis funkce f v nějakém okolí $U_\varepsilon(a)$ ve tvaru $f(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2}$. Můžeme tak standardně použít postupy o derivování funkcí:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^3}{x^2+y^2}\right)(a) = \frac{3x^2(x^2+y^2) - 2x \cdot x^3}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

Pro bod $a = (0,0)$, který nemá v žádném svém okolí “jednotný” předpis funkce f, musíme použít (explicitní) definici:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\frac{t^3}{t^2+0} - 0}{t} = 1 \ .$$

Celkem jsme tedy dostali, že

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2}, & \text{pro } (x,y) \neq (0,0), \\ 1, & \text{pro } (x,y) = (0,0) \ . \end{cases}$$

a podíváme se, jestli je tato funkce spojitá v bodě $(0,0)$. Když si vezmeme např. přiblížení po ose y (tj. $x = 0$) dostaneme, že

$$\lim_{y\to 0} \frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \lim_{y \to 0} 0 = 0 \ .$$

Tedy limita

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$

nemůže být rovna 1, což je hodnota $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, a tedy funkce $\frac{\partial f}{\partial x}$ *není spojitá v bodě* $(0,0)$.

Na druhou stranu, jak je snadno vidět díky předpisu a spojitosti funkcí, v bodech $a = (x,y) \neq (0,0)$ funkce $\frac{\partial f}{\partial x}$ spojitá je.

3.8 Pro funkci $f(x,y) = (xy)^{\sqrt{x^2+y^2}}$ najděte parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}$ a $\frac{\partial f}{\partial y}$ a obory jejich existence.

Řešení:

Definiční obor $D(f) : xy \geq 0 \ \wedge \ (x,y) \neq (0,0)$. Jeho vnitřek (tj. množina, kde se můžeme ptát na parciální derivace) je otevřená množina $D(f)^\circ : xy > 0$. Ve všech bodech vnitřku můžeme použít pravidla o derivování součinu funkcí, složené funkce atd. Parciální derivace jsou

Funkci si pro $(x, y) \in D(f)^\circ$ vhodně přepíšeme jako $f(x, y) = (xy)^{\sqrt{x^2+y^2}} = e^{\ln(xy)\sqrt{x^2+y^2}}$. Protože funkce je symetrická v proměnných x a y, stačí spočítat jen jednu z derivaci a druhou pak příslušně přepsat:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{\ln(xy)\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \left[\frac{1}{x}\sqrt{x^2+y^2} + \ln(xy)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right] = e^{\ln(xy)\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{y^2 + x^2(1+\ln(xy))}{x\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{\ln(xy)\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{x^2 + y^2(1+\ln(xy))}{y\sqrt{x^2+y^2}}$$

Obě parciální derivace opět existují na $D(f)$.