4. cvičení z Matematické analýzy 2

11. - 15. října 2021

4.1 Pro funkci $f(x,y) = \sqrt{y^2+x} \cdot \sin\frac{y}{x}$ najděte parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}$ a $\frac{\partial f}{\partial y}$ a obory jejich existence.

Řešení:
Definiční obor je $D(f) : y^2 + x \geq 0 \ \wedge \ x \neq 0$. Jeho vnitřek (tj. množina, kde se můžeme ptát na parciální derivace) je otevřená množina $D(f)^\circ : y^2 + x > 0 \ \wedge \ x \neq 0$. Ve všech bodech vnitřku můžeme použít pravidla o derivování součinu funkcí, složené funkce atd. Parciální derivace jsou

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{y^2+x} \cdot \sin\frac{y}{x}\right) = \frac{x}{2\sqrt{y^2+x}} \cdot \sin\frac{y}{x} + \sqrt{y^2+x} \cdot \left(\cos\frac{y}{x}\right) \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{y^2+x} \cdot \sin\frac{y}{x}\right) = \frac{y}{\sqrt{y^2+x}} \cdot \sin\frac{y}{x} + \sqrt{y^2+x} \cdot \left(\cos\frac{y}{x}\right) \cdot \frac{1}{x}$$

Obě parciální derivace evidentně existují na $D(f)^\circ$.

Připomenutí: *Derivace (totální diferenciál)* funkce f z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$ ve vnitřním bodě $a_0 \in D(f)$ definičního oboru $D(f) \subseteq \mathbb{R}^n$ je takové lineární zobrazení (označené jako $df(a_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$), které je nejlepší aproximací funkce f v bodě a_0 v tomto smyslu:

Rozdíl hodnot funkcí $f(a)$ a

$$g(a) := f(a_0) + df(a_0)[a - a_0]$$

klesá v okolí bodu a_0 rychleji než $\|a - a_0\|$, tj.

$$\lim_{a \to a_0} \tfrac{f(a) - g(a)}{\|a - a_0\|} = \lim_{a \to a_0} \tfrac{f(a) - f(a_0) - df(a_0)[a - a_0]}{\|a - a_0\|} = 0 \ .$$

Funkce g se nazývá *linearizací* funkce f v bodě a_0.

Poznámka:

- Pokud existuje derivace $df(a_0)$, pak také existují derivace $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a_0)$ podle vektoru pro každý vektor $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ a platí, že

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a_0) = df(a_0)[\vec{u}] \ .$$

  Speciálně, existují pak všechny parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a_0)$ a matice zobrazeni $df(a_0)$ ve standardní bázi má tvar

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_0) \ , \ldots , \ \frac{\partial f}{\partial x_n}(a_0)\right) \ .$$

  (Pro jednoduchost zápisu, budeme ztotožňovat zobrazení a jeho matici ve standardní bázi.)

  POZOR: Pouhá existence parciálních derivací ještě nezaručuje existenci (úplné) derivace! Ta je mnohem komplikovanější objekt. Máme ale tuto postačující podmínku:

- Nechť všechny parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ existují a *jsou spojité* na otevřené množině $G \subseteq \mathbb{R}^n$. Pak derivace $df(a)$ existuje v každém bodě $a \in G$.

Definice tečné roviny:
Tečnou rovinu ke grafu funkce f v bodě definujeme jako graf linearizace funkce f v tomto bodě, tj. jako graf funkce $g(a) = f(a_0) + df(a_0)[a - a_0]$. Tečna rovina má tedy předpis

$$z = f(a_0) + df(a_0)[a - a_0]$$

Pro případ dvou proměnných a bodů $a_0 = (x_0, y_0)$ má tečná rovina rovnici

$$z = f(a_0) + \tfrac{\partial f}{\partial x}(a_0) \cdot (x - x_0) + \tfrac{\partial f}{\partial y}(a_0) \cdot (y - y_0) \ .$$

Definice: Nechť existuje $df(a_0)$. *Gradient funkce* f v bode a_0 je takový vektor $\mathrm{grad} f(a_0) \in \mathbb{R}^n$, že pro každé $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$ je

$$df(a_0)[\vec{h}] = \mathrm{grad} f(a_0) \cdot \vec{h}$$

(kde $\cdot$ je standardní skalární součin). Tedy ve standardní bázi máme

$$\mathrm{grad} f(a_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

a proto gradient i derivaci budeme ztotožňovat.

- -

4.2 Pro funkci $f(x,y) = xy + \sin(x-y)$ v bodě $a_0 = (2,2)$ určete derivaci, tečnou rovinu a přímku, která je k ní kolmá a prochází bodem $B = (0,-1,3)$.

Ve kterém ze směrů $\vec{u}_1 = (0,1)$ a $\vec{u}_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ má funkce větší růst?

Řešení:

Parciální derivace jsou

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y + \cos(x-y)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = y - \cos(x-y) \ .$$

Z jejich spojitosti v okolí bodu $a_0 = (x_0, y_0) = (2,2)$ (spojité jsou dokonce všude na $\mathbb{R}^2$) vidíme, že derivace $df(a_0)$ skutečně existuje. Máme tedy

$$\left(\tfrac{\partial f}{\partial x}(a_0), \tfrac{\partial f}{\partial y}(a_0)\right) = \Big(y + \cos(x-y),\ x - \cos(x-y)\Big)(a_0) = (3,1)$$

a tudíž

$$df(a_0)[\vec{h}] = \left(\tfrac{\partial f}{\partial x}(a_0), \tfrac{\partial f}{\partial y}(a_0)\right) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = (3,1) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 3h_1 + h_2 \ .$$

Tečná rovina má rovnici:

$$z = f(a_0) + df(a_0)[a - a_0] = f(a_0) + \tfrac{\partial f}{\partial x}(a_0) \cdot (x - x_0) + \tfrac{\partial f}{\partial y}(a_0) \cdot (y - y_0) =$$
$$= 4 + 3(x-2) + y - 2$$

neboli

$$3x + y - z = 4$$

Vektor kolmý k tečné rovině má tedy vždy tvar $\vec{n} = (\frac{\partial f}{\partial x}(a_0), \frac{\partial f}{\partial x}(a_0), -1) = (3,1,-1)$. Rovnice hledané přímky pak je

$$p : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Oba vektory $\vec{u}_1$ a $\vec{u}_2$ jsou skutečně směry (tj. $\|\vec{u}_1\| = 1 = \|\vec{u}_2\|$), takže z hlediska růstu funkce stačí spočítat derivace v těchto směrech (kdyby vektory měly obecně různou délku, pak bychom je měli nejdříve znormovat a pak teprve počítat derivaci ve směru). Máme

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}_1}(a_0) = df(a_0)[\vec{u}_1] = (3,\ 1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

a

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}_2}(a_0) = df(a_0)[\vec{u}_2] = (3,\ 1) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \sqrt{2}$$

takže větší růst je v $\vec{u}_2$.

Poznámka: Nechť pro funkci $f(x,y)$ existuje grad$f(a_0) \in \mathbb{R}^3$ v bodě $a_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Pak vektor $\vec{U} \in \mathbb{R}^3$ leží ve vektorovém prostoru příslušnému tečné rovině v bodě a_0 právě když je

$$(\mathrm{grad}f(a_0), -1) \cdot \vec{U} = 0 \ ,$$

kde $(\mathrm{grad}f(a_0), -1) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a_0), \frac{\partial f}{\partial y}(a_0), -1\right)$

Je to proto, ze rovnice tečné roviny má tvar $z = f(a_0) + \mathrm{grad}f(a_0)[a - a_0]$ neboli

$$(\mathrm{grad}f(a_0), -1) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - f(a_0) \end{pmatrix} = 0 \ .$$

Neboli $(\mathrm{grad}f(a_0), -1)$ je normálový vektor tečné roviny (a jejího přidruženého vektorového prostoru).

Nechť je nyní $\vec{U} = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$. Nechť $\vec{u} = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ představuje vektor z jeho prvních dvou souřadnic (neboli $\vec{u}$ je projekce $\vec{U}$ do základny). Pak $\vec{U}$ leží v tečné rovině právě když

$$0 = (\mathrm{grad}f(a_0), -1) \cdot \vec{U} = \alpha \cdot \tfrac{\partial f}{\partial x}(a_0) + \beta \cdot \tfrac{\partial f}{\partial y}(a_0) + \gamma \cdot (-1) = df(a_0)[\vec{u}] - \gamma = \tfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a_0) - \gamma$$

neboli když

$$\gamma = \tfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a_0), \quad \text{pro} \ \ \vec{u} = (\alpha, \beta)$$

tudíž vektor $\vec{U}$ je prostě tvaru

$$\vec{U} = \left(\vec{u}, \tfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a_0)\right) \ .$$

Současně si všimněme, že úhel $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$, který svírá vektor $\vec{U} = (\alpha, \beta, \gamma) = \left(\vec{u}, \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a_0)\right)$ se základnou je dán jako

$$\mathrm{tg}(\varphi) = \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = \frac{1}{\|\vec{u}\|} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a_0) = \frac{df(a_0)[\vec{u}]}{\|\vec{u}\|} \ .$$

4.3 Pro funkci $f(x,y) = \mathrm{arctg}(xy^2)$ v bodě $a_0 = (1,1)$ určete totální diferenciál, tečnou rovinu a derivaci ve směru $\vec{u} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Určete vektory $\vec{U}_1 = (0, 1, ?)$ a $\vec{U}_2 = (2, 1, ?)$ tak, aby ležely ve vektorovém prostoru odpovídajícímu tečné rovině. Který z vektoru ukazuje směrem většího stoupání v tečné rovině?

Řešení:
Budeme postupovat podobně jako v příkladu **3.7**. Pro jednoduchost zápisu, budeme ztotožňovat zobrazení $df(a)$ a jeho matici ve standardní bázi.

Pro $a_0 = (1,1)$ tedy máme

$$df(a_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a_0), \frac{\partial f}{\partial y}(a_0)\right) = \left(\frac{y^2}{1 + (xy^2)^2}, \frac{2xy}{1 + (xy^2)^2}\right)(a_0) = \left(\tfrac{1}{2}, 1\right) \ .$$

Existence $f'(a_0)$ plyne ze spojitosti parciálních derivací v obecném bodě - viz řádek výše.

Tečná rovina je graf linearizace funkce f v daném bodě $a_0 = (x_0, y_0)$. Má tedy rovnici:

$$z = f(a_0) + df(a_0)[a - a_0]$$

neboli

$$z = f(a_0) + \left(\tfrac{\partial f}{\partial x}(a_0), \tfrac{\partial f}{\partial y}(a_0)\right)\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = \tfrac{\pi}{4} + \left(\tfrac{1}{2}, \ 1\right)\begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 1 \end{pmatrix} = \tfrac{\pi}{4} + \tfrac{1}{2}(x - 1) + y - 1$$

což se dá přepsat také jako

$$\tfrac{1}{2}x + y - z = \tfrac{3}{2} - \tfrac{\pi}{4} \ .$$

Derivace ve směru $\vec{u}$ je

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a_0) = df(a_0)[\vec{u}] = \left(\tfrac{1}{2}, \ 1\right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \tfrac{3\sqrt{2}}{2}.$$

A nakonec, podle poznámky výše, potřebujeme zjistit derivace podle vektorů $\vec{u}_1 = (0,1)$ a $\vec{u}_2 = (2,1)$:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}_1}(a_0) = df(a_0)[\vec{u}_1] = \left(\tfrac{1}{2}, 1\right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

a

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}_2}(a_0) = df(a_0)[\vec{u}_2] = \left(\tfrac{1}{2}, 1\right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2$$

Všimněme si, že každý z vektorů $\vec{u}_1$ a $\vec{u}_2$ má jinou délku.

Jde tedy o vektory $\vec{U}_1 = (0,1,1)$ a $\vec{U}_2 = (2,1,2)$, které svírají se základnou postupně úhly φ_1 a φ_2 takové, že

$$\operatorname{tg}(\varphi_1) = \frac{1}{\|\vec{u}_1\|} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{u}_1}(a_0) = 1$$

$$\operatorname{tg}(\varphi_2) = \frac{1}{\|\vec{u}_2\|} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{u}_2}(a_0) = \frac{2}{\sqrt{5}} \ (< 1)$$

takže větší stoupání v tečné rovině ukazuje vektor v $\vec{U}_1$.

4.4 Pro funkci $f(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)$ v bodě $a_0 = (1,1)$ určete

(a) totální diferenciál a derivaci ve směru $\vec{u} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,

(b) směry největšího a nejmenšího růstu a směry nulového růstu,

(c) tečnou rovinu,

(d) úhel, který tečná rovina svírá se základnou.

Řešení:

Definiční obor je $D(f) : y \neq 0$, což je otevřená množina a protože zde všechny parciálních derivace existují a jsou spojité (jak se ihned přesvědčíme), tak derivace v bodě a_0 skutečně existuje. Dále budeme postupovat podobně jako v příkladu **4.7**.

(a) Pro $a_0 = (1,1)$ je

$$f'(a_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a_0), \frac{\partial f}{\partial y}(a_0)\right) = \left(\frac{1}{y(1+(\frac{x}{y})^2)}, -\frac{x}{y^2(1+(\frac{x}{y})^2)}\right)(a_0) = \left(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right) .$$

Máme

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}_2}(a_0) = f'(a_0)[\vec{u}_2] = \left(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \sqrt{2}.$$

(b) Směrem největšího růstu $\vec{v}$ je směr gradientu (pokud je nenulový), tj. je to směr daný vektorem $\operatorname{grad} f(a_0) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ (konkrétně jde o směr $\vec{v} = \frac{\operatorname{grad} f(a_0)}{\|\operatorname{grad} f(a_0)\|} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$).

Směrem nejmenšího růstu je směr opačný ke gradientu (pokud je nenulový), tj. je to směr $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Směry nulového růstu $\vec{w}$ jsou kolmé ke gradientu, tj. jde o směry určené vektory $(1,1)$ a $(-1,-1)$, konkrétní směry (tj. znormované vektory) tedy jsou

$$\vec{w}_1 = \left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}, \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \ \text{ a } \ \vec{w}_2 = \left(-\tfrac{\sqrt{2}}{2}, -\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) .$$

(c) Tečná rovina má rovnici:

$$z = f(a_0) + f'(a_0)[a - a_0] = f(a_0) + \tfrac{\partial f}{\partial x}(a_0)\cdot(x - x_0) + \tfrac{\partial f}{\partial y}(a_0)\cdot(y - y_0) =$$

$$= \tfrac{\pi}{4} + \tfrac{1}{2}(x-1) - \tfrac{1}{2}(y-1)$$

neboli

$$x - y - 2z = -\tfrac{\pi}{2}$$

(d) Úhel mezi rovinami ϱ_1 a ϱ_2 je určen jejich normálovými vektory n_1 a n_2. Z možných dvou (navzájem doplňkových) úhlů mezi tečnými rovinami si volíme ten menší. Tento úhel $\alpha \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$ má tedy nezáporný kosinus a je tudíž jednoznačně určen jako

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{||\vec{n}_1|| \cdot ||\vec{n}_2||} \ .$$

Normálový vektor tečné roviny je

$$\vec{n}_1 = (\mathrm{grad} f(a_0), -1) = \left(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -1\right)$$

normálový vektor základny je

$$\vec{n}_2 = (0,0,1) \ .$$

Tedy

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{||\vec{n}_1|| \cdot ||\vec{n}_2||} = \frac{1}{\sqrt{(\frac{1}{2})^2 + (-\frac{1}{2})^2 + 1^2} \cdot 1} = \sqrt{\frac{2}{3}},$$

a hledaný úhel je

$$\alpha = \arccos\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \doteq 35.26^\circ \ .$$

Věta: Nechť U je otevřená množina v $\mathbb{R}^3$, $\Phi : U \to \mathbb{R}$ je spojitě diferencovatelná na G. Označme

$$M = \{a \in U \mid \Phi(a) = 0\}$$

což je zřejmě vrstevnice funkce Φ.

Jestliže pro každé $a \in M$ platí, že $\mathrm{grad}\Phi(a) \neq \vec{0}$, pak M implicitně definovaná (regulární) plocha. Tečná rovina k M v bodě $a_0 = (x_0, y_0, z_0) \in M$ má rovnici

$$\mathrm{grad}\Phi(a_0) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = 0.$$

Poznámka: Každý graf spojitě diferencovatelné funkce $f : G \to \mathbb{R}$, kde $G \subseteq \mathbb{R}^2$ je otevřená v $\mathbb{R}^2$, můžeme přirozeně chápat jako implicitně definovanou (regulární) plochu pomocí funkce $\Phi : G \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\Phi(x,y,z) := f(x,y) - z$$

protože

$$GRAF\ (f) = \{(x,y,z) \in G \times \mathbb{R} \mid \ z = f(x,y)\ \} = \{(x,y,z) \in G \times \mathbb{R} \mid \ \Phi(x,y,z) = 0\ \}$$

Současně vidíme, že normálový vektor tečné roviny ke grafu funkce f v bodě $A_0 = \big(a_0, f(a_0)\big)$ pro $a_0 \in G$ je

$$\mathrm{grad}\Phi(A_0) = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}(A_0), \frac{\partial \Phi}{\partial y}(A_0), \frac{\partial \Phi}{\partial z}(A_0)\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a_0), \frac{\partial f}{\partial y}(a_0), -1\right) \neq \vec{0}$$

tedy je nenulový.

4.5 (úhly grafů funkcí)

Nalezněte úhel, který svírají

(a) graf funkce $f(x,y) = \ln(\sqrt{x^2+y^2})$ a plocha $M : (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 2$ v bodě $(1, 0, ?)$.

(b) graf funkce $f(x,y) = e^{\sin xy}$ a plocha $M : (x-1)^2 + \frac{y^2}{2} + (z-3)^2 = 7$ v bodě $(0, 2, ?)$.

Řešení:
Úhel, který svírají implicitně dané plochy M_1 a M_2, je dán jako úhel mezi jednotlivými tečnými rovinami a ten je zase určen jejich normálovými vektory n_1 a n_2, tj. gradienty funkcí Φ_1 a Φ_2. Z možných dvou (navzájem doplňkových) úhlů mezi tečnými rovinami si volíme ten menší. Tento úhel $\alpha \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$ má tedy nezáporný kosinus a je tudíž jednoznačně určen jako

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{||\vec{n}_1|| \cdot ||\vec{n}_2||} \ .$$

(a) Třetí souřadnice bodu $A = (1, 0, ?)$, který je na grafu funkce f, je dána hodnotou $f(1,0) = \ln(1) = 0$. Tedy jde o bod $A = (1, 0, 0)$. Je dobře ještě ověřit, že takto určený bod skutečně leží v M.

Graf funkce f si zadejme implicitně pomocí funkce

$$\Phi_1(x,y,z) = f(x,y) - z = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) - z \ .$$

Plocha M je zadaná implicitně funkcí

$$\Phi_2(x,y,z) = (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 - 2 \ .$$

Normálové vektory tečných rovin v $A = (1, 0, 0)$ jsou

$$\vec{n}_1 = \text{grad } \Phi_1(A) = \Big(\frac{x}{x^2+y^2},\ \frac{y}{x^2+y^2},\ -1\Big)_{|A} = (1, 0, -1)$$

$$\vec{n}_2 = \text{grad } \Phi_2(A) = \Big(2(x-1),\ 2(y+1),\ 2(z+1)\Big)_{|A} = (0, 2, 2)$$

Úhel $\alpha \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$ je dán jako $\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{||\vec{n}_1|| \cdot ||\vec{n}_2||} = \frac{2}{\sqrt{2}\sqrt{8}} = \frac{1}{2}$, tedy $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

(b) Třetí souřadnice bodu $A = (0, 2, ?)$, který je na grafu funkce f, je dána hodnotou $f(0,2) = e^{\sin 0} = 1$. Tedy jde o bod $A = (0, 2, 1)$. Je dobré ještě ověřit, že takto určený bod skutečně leží v M.

Graf funkce f si zadejme implicitně pomocí funkce

$$\Phi_1(x,y,z) = e^{\sin(xy)} - z \ .$$

Plocha M je zadána implicitně funkcí

$$\Phi_2(x,y,z) = (x-1)^2 + \frac{y^2}{2} + (z-3)^2 - 7 \ .$$

Normálové vektory tečných rovin v $A = (0, 2, 1)$ jsou

$$\vec{n}_1 = \text{grad } \Phi_1(A) = \Big(y\cos(xy)e^{\sin(xy)},\ x\cos(xy)e^{\sin(xy)},\ -1\Big)_{|A} = (2, 0, -1)$$

$$\vec{n}_2 = \text{grad } \Phi_2(A) = \Big(2(x-1),\ y,\ 2(z-3)\Big)_{|A} = (-2, 2, -4)$$

Úhel $\alpha \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$ je dán jako $\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{||\vec{n}_1|| \cdot ||\vec{n}_2||} = 0$, tedy $\alpha = \frac{\pi}{2}$ a plochy jsou vzájemně kolmé.

4.6 Najděte rovnici tečné roviny k elipsoidu $M: \ x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$, která je rovnoběžná s rovinou $\varrho: \ 4x + 2y + z = 3$.

Řešení:
Použijeme větu o tečné rovině k implicitně definované ploše v $\mathbb{R}^3$.

Elipsoid $M = \{a \in U \mid \Phi(a) = 0\}$ je implicitně zadán pomocí funkce $\Phi(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + z^2 - 1$ a množiny $U = \mathbb{R}^3$. Zřejmě $\mathrm{grad}\Phi(a) = (2x, 4y, 2z)$.

Ověříme si, že v každém bodě $a_0 = (x_0, y_0, z_0) \in M$ je skutečně $\mathrm{grad}\Phi(a_0) \neq \vec{0}$ (tj. že v každém bodě M máme k dispozici normálový vektor tečné roviny $\mathrm{grad}\Phi(a_0)$):

Dokážeme to nepřímo: zřejmě $\mathrm{grad}\Phi(a) = (2x, 4y, 2z) = \vec{0}$ právě když $a = (0,0,0)$. Ovšem tento bod není v M, protože nesplňuje $\Phi(a) = 0$.

Normálový vektor tečné roviny v bodě $a_0 = (x_0, y_0, z_0) \in M$ je tedy právě $\mathrm{grad}\Phi(a_0)$. Tato rovina bude rovnoběžná s ϱ, která má normálový vektor $\mathbf{n}_\varrho = (4,2,1)$, právě když

$$(2x_0, 4y_0, 2z_0) = \mathrm{grad}\Phi(a_0) = \lambda \cdot \mathbf{n}_\varrho = \lambda \cdot (4,2,1)$$

pro nějaké $\lambda \in \mathbb{R}$, tedy $(x_0, y_0, z_0) = (2\lambda, \lambda/2, \lambda/2)$. Současně má také platit, že $x_0^2 + 2y_0^2 + z_0^2 = 1$. Po dosazení pak dostaneme $(2\lambda)^2 + 2(\lambda/2)^2 + (\lambda/2)^2 = 1$ tedy $\lambda = \pm 2/\sqrt{19}$.

Hledané tečné roviny pak musí mít normálový vektor $\mathbf{n}_\varrho$, tedy rovnici $4x + 2y + z = c$, kde neznámé hodnoty $c \in \mathbb{R}$ určíme dosazením spočítaných bodů $a_0 = \pm\frac{1}{\sqrt{19}} \cdot (4,1,1)$, kterými tečné roviny musí procházet. Výsledek je

$$4x + 2y + z = \sqrt{19}$$

a

$$4x + 2y + z = -\sqrt{19}.$$

4.7 Nechť p je přímka procházející body $(1,2,3)$ a $(2,3,4)$. Najděte rovnici tečné roviny k elipsoidu $M: \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$, která je kolmá na přímku p.

Řešení:
Použijeme větu o tečné rovině k implicitně definované ploše v $\mathbb{R}^3$:

Přímka p má směrový vektor $\vec{n} = (2,3,4) - (1,2,3) = (1,1,1)$.

Elipsoid $M = \{a \in U \mid \Phi(a) = 0\}$ je implicitně zadán pomocí funkce $\Phi(x,y,z) = \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} - 1$ a množiny $G = \mathbb{R}^3$. Zřejmě $\mathrm{grad}\Phi(a) = \left(\frac{2x}{25}, \frac{2y}{16}, \frac{2z}{9}\right)$. Takže $\mathrm{grad}\Phi(a) = \vec{0}$ právě když $a = (0,0,0)$. Ovšem tento bod není v M. Můžeme proto použít uvedenou větu a normálový vektor tečné roviny v bodě $a_0 = (x_0, y_0, z_0) \in M$ je právě $\mathrm{grad}\Phi(a_0)$. Tečná rovina bude mít za normálový vektor $\vec{n} = (1,1,1)$, právě když

$$\left(\frac{2x_0}{25}, \frac{2y_0}{16}, \frac{2z_0}{9}\right) = \mathrm{grad} f(a_0) = \lambda \cdot \mathbf{n} = \lambda \cdot (1,1,1)$$

pro nějaké $\lambda \in \mathbb{R}$. Tedy $(x_0, y_0, z_0) = \frac{\lambda}{2}(25, 16, 9)$. Současně má také platit, že $\frac{x_0^2}{25} + \frac{y_0^2}{16} + \frac{z_0^2}{9} = 1$. Dostáváme $\lambda = \pm 2/\sqrt{25}$ a tečné roviny jsou

$$x + y + z = 5\sqrt{2}$$

pro bod $\left(\frac{25}{\sqrt{25}}, \frac{16}{\sqrt{25}}, \frac{9}{\sqrt{25}}\right) \in M$ a

$$x + y + z = -5\sqrt{2}$$

pro bod $\left(-\frac{25}{\sqrt{25}}, -\frac{16}{\sqrt{25}}, -\frac{9}{\sqrt{25}}\right) \in M$.