5. cvičení z Matematické analýzy 2

18. - 22. října 2021

Připomenutí: Derivace zobrazení s více složkami se definuje analogicky jako pro reálnou (jednosložkovou) funkci. Tedy:

Nechť $U \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina. *Derivace* zobrazení $\Phi : U \to \mathbb{R}^m$ ve bodě $a_0 \in U$ je takové lineární zobrazení (označené jako $\mathrm{d}\Phi(a_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$), které je nejlepší aproximací zobrazení Φ v bodě a_0 v tomto smyslu:

$$\lim_{a \to a_0} \frac{\| \ \Phi(a) - \Phi(a_0) - \mathrm{d}\Phi(a_0)[a - a_0] \ \|}{\|a - a_0\|} = 0$$

kde jsme v čitateli výrazu použili normu (v $\mathbb{R}^m$), což je ekvivalentní tomu, že výše uvedená limita platí v každé složce výrazů v čitateli. Upřesněme, co se tím myslí:

Nechť jednotlivé složky zobrazení jsou funkce $f_i : U \to \mathbb{R}^m$, $i = 1, \ldots, m$, tedy

$$\Phi(a) = \big(f_1(a), \ldots, f_m(a)\big) \quad \text{pro} \quad a \in U$$

pak výše uvedená limita platí právě když

$$\lim_{a \to a_0} \frac{f_i(a) - f_i(a_0) - \Big(\mathrm{d}\Phi(a_0)[a - a_0]\Big)_i}{\|a - a_0\|} = 0 \qquad \text{pro} \qquad i = 1, \ldots, m$$

kde $\Big(\mathrm{d}\Phi(a_0)[a - a_0]\Big)_i$ je i-tá složka vektoru $\mathrm{d}\Phi(a_0)[a - a_0]$.

Také to celé můžeme říct tak (jako u jednosložkové funkce), že pro lineární zobrazení $\mathrm{d}\Phi(a_0)$ platí:

$$\Phi(a_0 + \vec{h}) = \Phi(a_0) + \mathrm{d}\Phi(a_0)[\vec{h}] + o\big(\|\vec{h}\|\big)$$

Existence derivace: Nechť $U \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina. Nechť $\Phi = (f_1, \ldots, f_m) : U \to \mathbb{R}^m$ je takové zobrazení, že všechny složky $f_i : U \to \mathbb{R}^m$ jsou spojitě diferencovatelné (říkáme pak, že Φ je spojitě diferencovatelné, neboli třídy C^1). Pak pro $a \in U$ existuje derivace $\mathrm{d}\Phi(a)$ a její matice (ve standardní bázi) typu $m \times n$ je

$$\mathrm{d}\Phi(a) = \begin{pmatrix} \text{grad } f_1(a) \\ \vdots \\ \text{grad } f_m(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

kde opět ztotožňujeme lineární zobrazení s jeho maticí.

Derivace složeného zobrazení: Nechť $U \subseteq \mathbb{R}^n$ a $V \subseteq \mathbb{R}^m$ jsou otevřené množiny (v příslušných prostorech). A mějme zobrazení

$$\begin{array}{ccccc} U & \xrightarrow{\Phi} & V & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ \cap\!\!| & & \cap\!\!| & & \\ \mathbb{R}^n & & \mathbb{R}^m & & \end{array}$$

se složkami $\Phi = (f_1, \ldots, f_m)$.

Jestliže existuje derivace $\mathrm{d}\Phi(a)$ v bodě $a \in U$ a derivace $\mathrm{d}g(b)$ v bodě $b = \Phi(a) \in V$, pak existuje derivace $\mathrm{d}\Big(g \circ \Phi\Big)(a)$ a platí:

$$\mathrm{d}\Big(g \circ \Phi\Big)(a) = \mathrm{d}g(b) \circ \mathrm{d}\Phi(a) = \mathrm{d}g\Big(\Phi(a)\Big) \circ \mathrm{d}\Phi(a)$$

a maticově zapsáno je to:

$$\mathrm{d}\Big(g \circ \Phi\Big)(a) = \left(\frac{\partial g}{\partial y_1}(b), \ldots, \frac{\partial g}{\partial y_m}(b)\right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

kde opět ztotožňujeme lineární zobrazení s jeho maticí.

Konkrétně, pro

$$(g \circ \Phi)(x_1, \ldots, x_n) = g\Big(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)\Big)$$

z tohoto vyplývá tzv. řetězové pravidlo (což je jen přepis maticového násobení) a to ve tvaru

$$\frac{\partial(g\circ\Phi)}{\partial x_i}(a)=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial g}{\partial y_j}(b)\cdot\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a)$$

5.1 Nechť $f=f(u,v):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ je spojitě diferencovatelná funkce. Najděte (obecně) derivaci funkce

(a) $g(x,y,z)=f(\frac{x}{y},\frac{y}{z})$,

(b) $g(s,t)=f(\frac{s}{t},t-s)$,

(c) $g(r,\varphi)=f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)$ pro $0<\varphi<2\pi$ a $r>0$.

Řešení:

(a) Definiční obor funkce g je $D(g)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid y\neq 0,z\neq 0\}$. Podle řetězového pravidla dostáváme

$$\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\Big(f(\tfrac{x}{y},\tfrac{y}{z})\Big)=\frac{\partial f}{\partial u}(\tfrac{x}{y},\tfrac{y}{z})\cdot\frac{\partial(\frac{x}{y})}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}(\tfrac{x}{y},\tfrac{y}{z})\cdot\frac{\partial(\frac{y}{z})}{\partial x}=\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial f}{\partial u}(\tfrac{x}{y},\tfrac{y}{z})$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\Big(f(\tfrac{x}{y},\tfrac{y}{z})\Big)=\frac{\partial f}{\partial u}(\tfrac{x}{y},\tfrac{y}{z})\cdot\frac{\partial(\frac{x}{y})}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}(\tfrac{x}{y},\tfrac{y}{z})\cdot\frac{\partial(\frac{y}{z})}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial u}(\tfrac{x}{y},\tfrac{y}{z})+\frac{1}{z}\cdot\frac{\partial f}{\partial v}(\tfrac{x}{y},\tfrac{y}{z})$$

$$\frac{\partial g}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}\Big(f(\tfrac{x}{y},\tfrac{y}{z})\Big)=\frac{\partial f}{\partial u}(\tfrac{x}{y},\tfrac{y}{z})\cdot\frac{\partial(\frac{x}{y})}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial v}(\tfrac{x}{y},\tfrac{y}{z})\cdot\frac{\partial(\frac{y}{z})}{\partial z}=-\frac{y}{z^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial v}(\tfrac{x}{y},\tfrac{y}{z})\,.$$

(b) Definiční obor funkce g je $D(g)=\{(s,t)\in\mathbb{R}^2\mid t\neq 0\}$. Podle řetězového pravidla dostáváme

$$\frac{\partial g}{\partial s}=\frac{\partial}{\partial s}\Big(f(\tfrac{s}{t},t-s)\Big)=\frac{\partial f}{\partial u}(\tfrac{s}{t},t-s)\cdot\frac{\partial(\frac{s}{t})}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial v}(\tfrac{s}{t},t-s)\cdot\frac{\partial(t-s)}{\partial s}=\frac{1}{t}\cdot\frac{\partial f}{\partial u}(\tfrac{s}{t},t-s)-\frac{\partial f}{\partial v}(\tfrac{s}{t},t-s)$$

$$\frac{\partial g}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\Big(f(\tfrac{s}{t},t-s)\Big)=\frac{\partial f}{\partial u}(\tfrac{s}{t},t-s)\cdot\frac{\partial(\frac{s}{t})}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial v}(\tfrac{s}{t},t-s)\cdot\frac{\partial(t-s)}{\partial t}=-\frac{s}{t^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial u}(\tfrac{s}{t},t-s)+\frac{\partial f}{\partial v}(\tfrac{s}{t},t-s)\,.$$

(c) Podle řetězového pravidla dostáváme

$$\frac{\partial g}{\partial r}=\frac{\partial}{\partial r}\big(f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)\big)=\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\varphi,r\sin\varphi)\cdot\frac{\partial(r\cos\varphi)}{\partial r}+\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\varphi,r\sin\varphi)\cdot\frac{\partial(r\sin\varphi)}{\partial r}=$$

$$=\cos\varphi\cdot\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\varphi,r\sin\varphi)+\sin\varphi\cdot\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\varphi,r\sin\varphi)$$

$$\frac{\partial g}{\partial\varphi}=\frac{\partial}{\partial\varphi}\big(f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)\big)=\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\varphi,r\sin\varphi)\cdot\frac{\partial(r\cos\varphi)}{\partial\varphi}+\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\varphi,r\sin\varphi)\cdot\frac{\partial(r\sin\varphi)}{\partial\varphi}=$$

$$=-r\sin\varphi\cdot\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\varphi,r\sin\varphi)+r\cos\varphi\cdot\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\varphi,r\sin\varphi)$$

Poznámka: Derivaci v části (c) můžeme využít při tzv. transformaci diferenciálních výrazů, které se hodí např. při řešení parciálních diferenciálních rovnic. Řekněme, že hledáme funkci f splňující rovnici $x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} = 0$. Pro jednoduchost omezme definiční obor funkce f na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \mid x \geq 0\}$ (důvod bude zřejmý dále). Místo funkce f teď uvažujme funkci $g = f \circ \Phi$, kde Φ je bijektivní zobrazení

$$\begin{aligned} \Phi : (0,+\infty) \times (0, 2\pi) \quad &\to \quad \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \mid x \geq 0\} \\ (r, \varphi) \quad &\mapsto \quad (x,y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi) \end{aligned}$$

Spočítáme si derivaci g jako $g'(\alpha) = f'(\Phi(\alpha)) \circ \Phi'(\alpha)$ tedy pomocí matic to je

$$\left(\frac{\partial g}{\partial r}, \frac{\partial g}{\partial \varphi}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)\begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

Odsud vypočítáme např. invertováním matice

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial g}{\partial r}, \frac{\partial g}{\partial \varphi}\right)\begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}^{-1} = \left(\frac{\partial g}{\partial r}, \frac{\partial g}{\partial \varphi}\right)\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\frac{\sin\varphi}{r} & \frac{\cos\varphi}{r} \end{pmatrix}$$

Takže po dosazení (a vyjádření x a y pomocí r a φ) dostáváme

$$x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} = r\cos\varphi\left(\sin\varphi\,\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\cos\varphi}{r}\,\frac{\partial g}{\partial \varphi}\right) - r\sin\varphi\left(\cos\varphi\,\frac{\partial g}{\partial r} - \frac{\sin\varphi}{r}\,\frac{\partial g}{\partial \varphi}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial \varphi}$$

Rovnice $x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ je tak ekvivalentní rovnici $\frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial \varphi} = 0$. Tedy má platit $\frac{\partial g}{\partial \varphi} = 0$, neboli $g(r,\varphi) = h(r)$ pro nějakou diferencovatelnou funkci h. Řešení původní rovnice tak je

$$f(x,y) = (g \circ \Phi^{-1})(x,y) = h(\sqrt{x^2+y^2})$$

kde h je libovolná diferencovatelná funkce.

Definice: Parciální derivace vyšších řádů funkce $f : U \to \mathbb{R}$ (kde $U \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina) v bodě $a \in U$ definujeme induktivně jako

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(a) := \frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}}\right)(a)$$

kde $\frac{\partial^1 f}{\partial x_i} := \frac{\partial f}{\partial x_i}$ a $k \in \mathbb{N}$. Dále se zavádí zkrácené značení $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} := \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}$ a podobně pro vyšší derivace.

Dále: Jestliže v každém bodě $a \in U$ existuje derivace $\mathrm{d}f(a)$, získáme zobrazení

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f : \quad U \quad &\longrightarrow \quad \mathbb{R}^n \\ a \quad &\mapsto \quad \mathrm{d}f(a) = \left(\tfrac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \tfrac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right) \end{aligned}$$

Pokud nyní v $a_0 \in U$ existuje derivace

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}f)(a_0) = \begin{pmatrix} \operatorname{grad} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_0) \\ \vdots \\ \operatorname{grad} \frac{\partial f}{\partial x_n}(a_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a_0) \end{pmatrix} (= \mathbb{A})$$

nazýváme tuto (čtvercovou) matici *Hessovou* maticí a druhou derivaci $\mathrm{d}^2 f(a_0)$ definujeme jako bilineární zobrazení

$$\mathrm{d}^2 f(a_0) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$\mathrm{d}^2 f(a_0)[\vec{u}, \vec{v}] = \vec{u}^T \cdot \mathbb{A} \cdot \vec{v} \quad \text{pro} \quad \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$$

Obvykle nám ale stačí pracovat s kvadratickým homogenním polynomem (tzv. kvadratickou formou)

$$Q[\vec{h}, \vec{h}] := \mathrm{d}^2 f(a_0)[\vec{h}, \vec{h}] \quad \text{pro} \quad \vec{h} \in \mathbb{R}^n\ .$$

Postačující podmínka existence druhé derivace: Jestliže funkce $f : U \to \mathbb{R}$ je třídy C^2 (neboli: všechny druhé parciální derivace $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}$ pro $i, j = 1, \dots, n$ existují na celé množině U a jsou zde spojité) pak $\mathrm{d}^2 f(a)$ existuje pro $a \in U$ a odpovídající Hessova matice je symetrická.

Taylorův polynom: Taylorův polynom řádu 2 (pro bod a_0 a funkci f) je takový polynom $T_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stupně nejvýše 2, který nejlépe aproximuje funkci f v okolí bodu a_0 v tomto smyslu

$$f(a_0 + \vec{h}) = T_2(a_0 + \vec{h}) + o(\|\vec{h}\|^2)$$

tedy

$$\lim_{\vec{h}\to 0} \frac{f(a_0 + \vec{h}) - T_2(a_0 + \vec{h})}{\|\vec{h}\|^2} = 0 \ .$$

Tento polynom je jednoznačně určený (pokud existuje).

Existence a tvar Taylorova polynomu: Jestliže existuje $\mathrm{d}^2 f(a_0)$, pak existuje i Taylorův polynom řádu 2 (pro bod a_0 a funkci f) a je tvaru

$$T_2(a_0 + \vec{h}) = f(a_0) + f'(a_0)[\vec{h}] + \frac{1}{2!}\mathrm{d}^2 f(a_0)[\vec{h}, \vec{h}]$$

kde $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$.

5.2 (Taylorův polynom)

Napište Taylorův polynom 2. řádu pro

(a) funkci $f(x, y) = e^{\sqrt{x}-y}$ v okolí bodu $a_0 = (1, 1)$. Určete pomocí něj přibližnou hodnotu $f(a)$ pro $a = (1.01,\ 0.98)$

(b) funkci $f(x, y) = \frac{1}{x-y}$ v okolí bodu $a_0 = (2, 1)$.

Řešení:

(i) Máme

$$\mathrm{d}f(a_0) = \left(e^{\sqrt{x}-y}\frac{1}{2\sqrt{x}},\ -e^{\sqrt{x}-y}\right)_{|a_0} = (\tfrac{1}{2}, -1)$$

a

$$\mathrm{d}^2 f(a_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}_{|a_0} = \begin{pmatrix} e^{\sqrt{x}-y}\frac{1}{4x} - e^{\sqrt{x}-y}\frac{x^{-\frac{3}{2}}}{4} & -e^{\sqrt{x}-y}\frac{1}{2\sqrt{x}} \\ -e^{\sqrt{x}-y}\frac{1}{2\sqrt{x}} & e^{\sqrt{x}-y} \end{pmatrix}_{|a_0} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Tedy

$$T_2(a_0 + \vec{h}) = f(a_0) + \mathrm{d}f(a_0)[\vec{h}] + \frac{1}{2!}\mathrm{d}^2 f(a_0)[\vec{h}, \vec{h}] =$$

$$= 1 + (\tfrac{1}{2}, -1)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(h_1, h_2)\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} =$$

$$= 1 + \tfrac{1}{2}h_1 - h_2 - \tfrac{1}{8}h_1 h_2 + \tfrac{1}{2}h_2^2$$

kde $\vec{h} = (h_1, h_2)$.

Takže pro $\vec{h} = (0.01,\ -0.02)$ máme

$$f(a) \doteq T(a) = T(a_0 + \vec{h}) = 1 + \tfrac{1}{2}0.01 + 0.02 + \tfrac{1}{8}0.01 \cdot 0.02 + \tfrac{1}{2}0.02^2 = 1.025225 \ .$$

(Pro srovnání skutečná hodnota zaokrouhlená na 9 desetinných míst je $f(a) \doteq 1.025302368$.)

(ii) Podobně dostaneme:

$$\mathrm{d}f(a_0) = \left(-\frac{1}{(x-y)^2},\ \frac{1}{(x-y)^2}\right)_{|a_0} = (-1, 1)$$

a

$$\mathrm{d}^2 f(a_0) = \begin{pmatrix} \frac{2}{(x-y)^3} & -\frac{2}{(x-y)^3} \\ -\frac{2}{(x-y)^3} & \frac{2}{(x-y)^3} \end{pmatrix}_{|a_0} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Tedy

$$T_2(a_0 + \vec{h}) = 1 + (-1, 1) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(h_1, h_2) \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} =$$

$$= 1 - h_1 + h_2 + h_1^2 - 2h_1h_2 + h_2^2$$

kde $\vec{h} = (h_1, h_2)$.

Budeme vyšetřovat extrémy funkcí. Nejdříve to budou *lokální* extrémy funkce f na *otevřené* množině U.

Postup při hledání *lokálních* extrémů funkce f na *otevřené* množině U bude tento:

- najdeme stacionární body $a \in U$ (protože $\mathrm{d}f(a) = \vec{0}$ je nutná podmínka);
- dále pak vyšetříme definitnost $\mathrm{d}^2 f(a)$ v těchto bodech.

Bod $a \in U$, ve kterém je $df(a) = (0, \ldots, 0)$, se nazývá *stacionární* bod funkce f.

Co je definitnost bilineární formy: Symetrická bilineární forma $Q : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se nazývá

- *pozitivně definitní* $\iff$ pro každý vektor $\vec{0} \neq \vec{h} \in \mathbb{R}^n$ je $Q[\vec{h}, \vec{h}] > 0$.
- *negativně definitní* $\iff$ pro každý vektor $\vec{0} \neq \vec{h} \in \mathbb{R}^n$ je $Q[\vec{h}, \vec{h}] < 0$.
- *indefinitní* $\iff$ existují vektory $\vec{h}, \vec{k} \in \mathbb{R}^n$ takové, že $Q[\vec{h}, \vec{h}] > 0$ a $Q[\vec{k}, \vec{k}] < 0$.

Každá symetrická bilineární forma $Q : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je popsána svou maticí $\mathbb{A}$ ve standardní bázi, tj.

$$Q[\vec{h}, \vec{k}] = \vec{h}^T \cdot \mathbb{A} \cdot \vec{k}$$

pro všechna $\vec{h}, \vec{k} \in \mathbb{R}^n$. Tato matice $\mathbb{A}$ je symetrická, tedy $\mathbb{A}^T = \mathbb{A}$ (zde $(\cdot)^T$ znamená transponování dané matice).

Postačující podmínky pro lokální extrém na otevřené množině: Nechť funkce $f : U \to \mathbb{R}$ je třídy C^2 na otevřené množině U (tedy má spojité všechny druhé parciální derivace na U). Nechť $a_0 \in U$ je stacionární bod funkce f (tj. $df(a_0) = (0, \ldots, 0)$). Jestliže

- $d^2 f(a_0)$ je *pozitivně* definitní $\Rightarrow$ v bodě a_0 je (ostré) lokální minimum.
- $d^2 f(a_0)$ je *negativně* definitní $\Rightarrow$ v bodě a_0 je (ostré) lokální maximum.
- $d^2 f(a_0)$ je *indefinitní* $\Rightarrow$ v bodě a_0 je sedlo a *NENÍ* tu lokální extrém.

Název sedlo je odvozen z toho, že při průchodu bodem a_0 po přímkách v něm máme v nějakém směru lokální minimum a v nějakém jiném zase lokální maximum.

Abychom mohli snadno rozeznávat definitnost forem, bude se nám hodit následující kritérium. Předtím si ještě zaveďme toto značení:

Pro čtvercovou matici $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pro $i = 1, \ldots, n$ označme Δ_i determinant matice typu $i \times i$ vzniklé z prvních i sloupců a prvních i řádků z matice $\mathbb{A}$. (Determinanty Δ_i se nazývají hlavní minory matice $\mathbb{A}$.)

Sylvestrovo kritérium (definitnosti symetrických forem): Nechť symetrická bilineární forma Q je popsána symetrickou maticí $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Pak Q je

- *pozitivně definitní* $\iff$ pro každé $i = 1, \ldots, n$ je $\Delta_i > 0$.
- *negativně definitní* $\iff$ pro každé $i = 1, \ldots, n$ je $\mathrm{sgn}(\Delta_i) = (-1)^i$.
  (neboli: hlavní minory střídají znaménka, přičemž PRVNÍ je ZÁPORNÉ.)

Pokud je ještě navíc $\det(\mathbb{A}) \neq 0$, pak Q je

- *indefinitní* $\iff$ není pozitivně ani negativně definitní (tj. nenastane ani jeden z předchozích dvou znaménkových případů).

5.3 (lokální extrémy)

Najděte lokální extrémy následujících funkcí:

(a) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$,

(b) $f(x,y) = 6xy - x^3 - 2y^3 + 2$.

Řešení:

(i) Funkce je polynom a tedy má derivace všech řádů. Nutnou podmínkou pro extrém v daném bodě je nulovost první derivace.

$$\mathrm{d}f(x,y) = (3x^2 - 3y,\ 3y^2 - 3x)$$

Tedy $\mathrm{d}f(x,y) = 0$ právě když $x^2 = y$ a $y^2 = x$, což je právě když $(x,y) = (0,0)$ nebo $(x,y) = (1,1)$. V daných (kritických) bodech dále vyšetříme druhou derivaci:

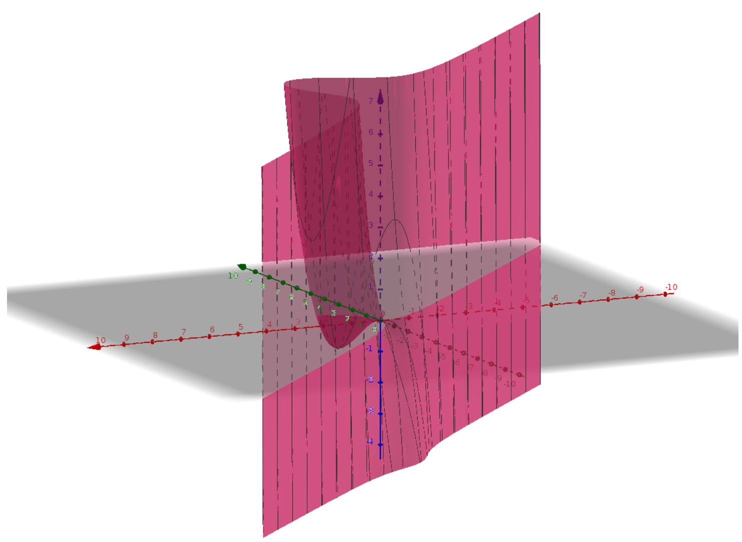
$$\mathrm{d}^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix} .$$

- Pro $(x,y) = (0,0)$ je $\mathrm{d}^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$. Tedy pro $\vec{h} = (h_1, h_2)^T \in \mathbb{R}^2$ je

$$\mathrm{d}^2 f(0,0)[\vec{h}, \vec{h}] = -6h_1 h_2$$

a tato forma nabývá libovolných hodnot (je indefinitní). V bodě $(0,0)$ je tedy SEDLO.

- Pro $(x,y) = (1,1)$ je $\mathrm{d}^2 f(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$. Podle Sylvestrova kritéria ($\Delta_1 = 6 > 0$, $\Delta_2 = 36 - 9 = 27 > 0$) je forma pozitivně definitní a tedy v daném bodě je (lokální) MINIMUM. Toto minimum ale není globální, protože funkce není zdola omezená (lze vzít např. zúžení $f(x,0) = x^3$).



(ii) Nutnou podmínkou pro lokální extrém v daném bodě je nulovost první derivace:

$$\mathrm{d}f(x,y) = (6y - 3x^2, 6x - 6y^2)$$

Tedy $\mathrm{d}(x,y) = 0$ právě když $2y = x^2$ a $x = y^2$. Tedy $2y = y^4$ a řešení jsou tak $(x,y) = (0,0)$ nebo $(x,y) = (\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2})$.

V daných (kritických) bodech dále vyšetříme druhou derivaci.

$$\mathrm{d}^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} -6x & 6 \\ 6 & -12y \end{pmatrix}$$

- Pro $(x,y) = (0,0)$ je $\mathrm{d}^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$. Tedy pro $\vec{h} = (h_1, h_2)^T \in \mathbb{R}^2$ je

$$\mathrm{d}^2 f(0,0)[\vec{h}, \vec{h}] = 12 \cdot h_1 h_2$$

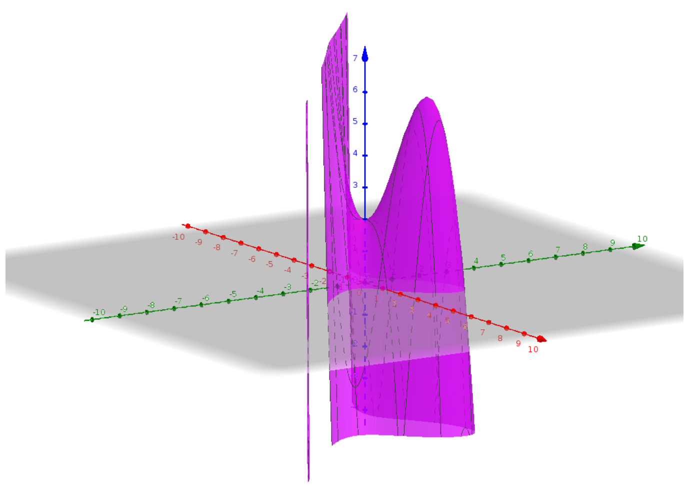
a tato forma nabývá libovolných hodnot (je indefinitní). V bodě $(0,0)$ je tedy SEDLO.

- Pro $(x,y) = (\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2})$ je

$$\mathrm{d}^2 f\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = \begin{pmatrix} -6\sqrt[3]{4} & 6 \\ 6 & -12\sqrt[3]{2} \end{pmatrix}.$$

Podle Sylvestrova kritéria ($\Delta_1 = -6\sqrt[3]{4} < 0$, $\Delta_2 = 72\sqrt[3]{8} - 36 = 72 \cdot 2 - 36 > 0$) je forma daná druhou derivaci negativně definitní a tedy v daném bodě je lokální MAXIMUM.

Toto maximum ale není globální, protože funkce není shora omezená - např. stačí vzít zúžení $f(x,0) = -x^3 + 2$.



5.4 (lokální extrémy)

Najděte lokální extrémy následujících funkcí:

(a) $f(x,y,z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$ pro $x, y, z > 0$,

(b) $f(x,y,z) = x^3 + y^2 + \frac{z^2}{2} - 3xy - 2y + 2z$.

Řešení:
(i) Nutnou podmínkou pro lokální extrém v daném bodě je nulovost první derivace:

$$\mathrm{d}f(x,y,z) = \left(1 - \frac{y^2}{4x^2}, \ \frac{y}{2x} - \frac{z^2}{y^2}, \ \frac{2z}{y} - \frac{2}{z^2}\right)$$

Tedy $\mathrm{d}f(x,y,z)=0$ právě když

$$\begin{array}{rcl} y^2 & = & 4x^2 \\ y^3 & = & 2xz^2 \\ y & = & z^3 \end{array} \quad \stackrel{y=z^3}{\Longrightarrow} \quad \begin{array}{rcl} (z^3)^2 & = & 4x^2 \\ (z^3)^3 & = & 2xz^2 \end{array} \quad \stackrel{x=z^7/2}{\Longrightarrow} \quad z^6 = 4\left(\frac{z^7}{2}\right)^2 \quad \stackrel{z>0}{\Longrightarrow} \quad z=1$$

Řešení pro $x,y,z>0$ je pouze $(x,y,z)=\left(\frac{1}{2},1,1\right)$.

Dále vyšetříme druhou derivaci.

$$\mathrm{d}^2 f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{y^2}{2x^3} & -\frac{y}{2x^2} & 0 \\ -\frac{y}{2x^2} & \frac{1}{2x}+\frac{2z^2}{y^3} & -\frac{2z}{y^2} \\ 0 & -\frac{2z}{y^2} & \frac{2}{y}+\frac{4}{z^3} \end{pmatrix}$$

- Pro $(x,y,z)=\left(\frac{1}{2},1,1\right)$ je

$$\mathrm{d}^2 f\left(\frac{1}{2},1,1\right) = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

Podle Sylvestrova kritéria ($\Delta_1 = 4>0$, $\Delta_2 = 12-4 = 8>0$, $\Delta_3 = 72-16-24 = 32>0$) je forma daná druhou derivaci pozitivně definitní a tedy v daném bodě je lokální MINIMUM.

(ii) Funkce je polynom a tedy má derivace všech řádů. Nutnou podmínkou pro lokální extrém v daném bodě je nulovost první derivace.

$$\mathrm{d}f(x,y,z) = \Big(3x^2-3y,\ 2y-3x-2,\ z+2\Big)$$

Tedy $\mathrm{d}f(x,y,z)=(0,0,0)$ právě když

$$\begin{array}{rcl} y & = & x^2 \\ 2y & = & 3x+2 \\ z & = & -2 \end{array} \quad \stackrel{y=x^2}{\Longrightarrow} \quad 2x^2 = 3x+2 \quad \Longrightarrow \quad x=2 \ \vee\ x=-\frac{1}{2}$$

tedy řešení jsou právě $(x,y,z)=(2,4,-2)$ nebo $(x,y,z)=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{4},-2\right)$. V daných (kritických) bodech dále vyšetříme druhou derivaci:

$$\mathrm{d}^2 f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 6x & -3 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Pro $(x,y,z)=(2,4,-2)$ je

$$\mathrm{d}^2 f(2,4,-2) = \begin{pmatrix} 12 & -3 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Podle Sylvestrova kritéria ($\Delta_1 = 12>0$, $\Delta_2 = 24-9 = 15>0$, $\Delta_2 = \Delta_3 = 15>0$) je tato forma pozitivně definitní a tedy v daném bodě je (lokální) minimum.

- Pro $(x,y,z)=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{4},-2\right)$ je

$$\mathrm{d}^2 f\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{4},-2\right) = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Podle Sylvestrova kritéria ($\Delta_1 = -3 < 0$, $\Delta_2 = -6 - 9 = -15 < 0$, $\Delta_2 = \Delta_3 = -15 < 0$) je tato forma indefinitní a tedy v daném bodě je sedlo.

Můžeme ještě zjistit, jestli lokální extrémy jsou i globální. Protože zřejmě $f(x, 0, 0) = x^3$ a tato funkce nabývá všech hodnot, původní funkce f žádné globální extrémy nemá.