6. cvičení z Matematické analýzy 2

25. - 29. října 2021

Příklad **5.4**.

6.1 (lokální extrémy)
Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y) = x^3 - y^3 - 2xy + 6$.

Řešení:
Funkce je polynom a tedy má derivace všech řádů. Nutnou podmínkou pro extrém v daném bodě je nulovost první derivace.

$$f'(x,y) = (3x^2 - 2y, -3y^2 - 2x)$$

Tedy $f'(x,y) = 0$ právě když $3x^2 = 2y$ a $-3y^2 = 2x$, což je právě když $(x,y) = (0,0)$ nebo $(x,y) = (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.

V daných (kritických) bodech dále vyšetříme druhou derivaci:

$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -2 \\ -2 & -6y \end{pmatrix}$$

- Pro $(x,y) = (0,0)$ je $f''(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$. Tedy pro $\mathbf{h} = (h_1, h_2)^T \in \mathbb{R}^2$ je

$$f''(0,0)[\mathbf{h}, \mathbf{h}] = -4h_1h_2$$

a tato forma nabývá libovolných hodnot (je indefinitní). V bodě $(0,0)$ je tedy SEDLO.

- Pro $(x,y) = (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ je $f''(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}) = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$. Podle Sylvestrova kritéria ($\Delta_1 = -4 < 0$, $\Delta_2 = 16 - 4 = 12 > 0$) je forma negativně definitní a tedy v daném bodě je (lokální) MAXIMUM. Toto maximum ale není globální, protože funkce není shora omezená (lze vzít např. zúžení $f(x,0) = x^3 + 6$).

Dále budeme hledat *absolutní (globální)* extrémy funkce f na *uzavřené* (a obvykle také omezené) množině M.

Postup při hledání *absolutních (globálních)* extrémů funkce f na *uzavřené* (a obvykle také omezené) množině M bude tento:

- pomocí nutných podmínek (obvykle to jsou Lagrangeovy multiplikátory) vyloučíme ty body, kde určitě extrémy nejsou;
- ve zbylé množině podezřelých bodů (obvykle malé) srovnáme jejich funkční hodnoty, ze kterých vybereme největší a nejmenší;
- jestliže víme, že obou extrémů musí být nabyto, pak jsou to právě předchozí nalezené největší a nejmenší hodnoty v podezřelých bodech;
- při hledání pouze globálního minima podstupujeme obdobně - tj. hledáme nejmenší hodnotu mezi podezřelými body;
- Důležité: zde nepotřebujeme používat druhou derivaci! (Ostatně, globálnost případného extrému nám tato druhá derivace stejně nemůže potvrdit.)

Poznámka: Nechť M má tvar z Lagr. věty. Jestliže nějaký bod $a \in M$ nesplňuje podmínku o lineární nezávislosti $\operatorname{grad} g_1(a), \dots, \operatorname{grad} g_k(a)$, zařadíme ho automaticky mezi podezřelé body. Obvykle takových bodů není mnoho, případně funkce je na nich "uchopitelná". Proto při aplikaci Lagr. věty vlastně vždy ověřujeme, jestli všechny body z M splňují uvedenou podmínku pro lineární nezávislost. Pokud ano, vazbám $g_1, \dots, g_k$ se pak říká nezávislé.

Při hledání absolutních extrémů budeme využívat tyto věty:

Věta: Spojitá funkce na uzavřené a omezené (tzv. *kompaktní*) množině nabývá svého maxima i minima.

Věta: Nechť $U \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $f, g_i : U \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, k$ jsou spojitě diferencovatelné funkce. Položme

$$M = \bigcap_{i=1}^{k} \{a \in U \mid g_i(a) = 0\}.$$

Nechť $a_0 \in M$ je bodem lokálního extrému funkce f zúžené na M. Jestliže vektory

$$\text{grad } g_1(a_0), \dots, \text{grad } g_k(a_0) \quad \text{jsou lineárně nezávislé}$$

pak existují $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ (tzv. *Langrangeovy multiplikátory*), že

$$\text{grad} f(a_0) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \text{grad} g_i(a_0) \ .$$

(Jestliže výše zmíněná lineární nezávislost platí v každém bodě $a \in M$, pak se množina M nazývá *varieta* (angl. *manifold*) a je možné ji přiřadit dimenzi - pomocí věty o implicitní funkci - a sice $\dim M = n - k$. Dimenze tak odpovídá dimenzi n původního prostoru $\mathbb{R}^n$ sníženou o počet k nezávislých vazeb daných zobrazením Φ.)

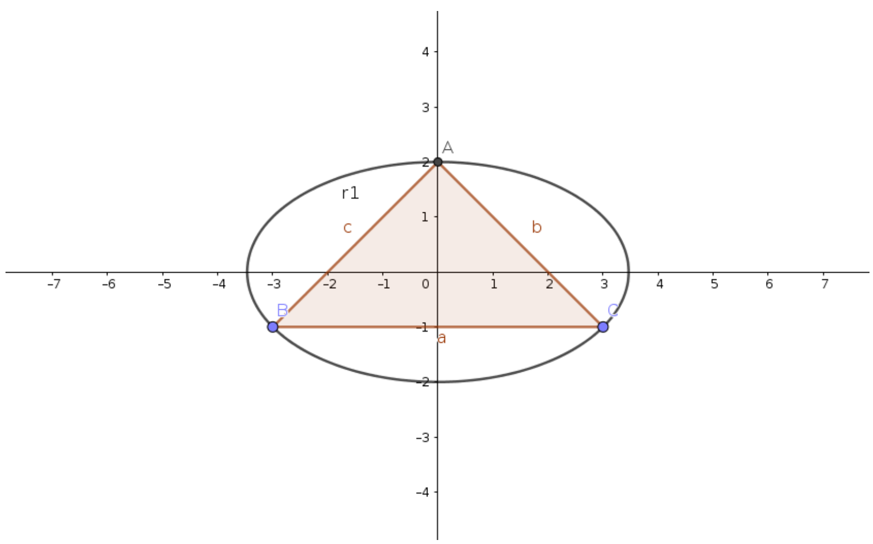
6.2 (vázané extrémy)

Do elipsy $x^2 + 3y^2 = 12$ vepište rovnoramenný trojúhelník takový, že má základnu rovnoběžnou s osou x a má maximální obsah.

Řešení:
Vzhledem k symetrii elipsy, stačí vyšetřit případ, kdy jeden z vrcholů (x, y) základny bude ležet na polovině elipsy

$$M : x^2 + 3y^2 = 12 \quad \& \quad x > 0$$

a vrchol naproti základně bude v bodě $(0, 2)$.



Na M nyní hledáme maximum funkce

$$f(x, y) = x(2 - y)$$

(což je obsah daného trojúhelníka).

Použijeme metodu Langrangeových multiplikátorů. Množina M je zadána implicitně jako

$$M = \{(x, y) \in U \mid \Phi(x, y) = 0\}$$

kde $U : x > 0$ a vazbová funkce je

$$\Phi(x, y) = x^2 + 3y^2 - 12 \ .$$

Dále, vektor grad $\Phi(x,y) = \Big(2x,\ 6y\Big)$ je nenulový pro každé $(x,y) \in M$ (jinak by to byl spor s tím, že má platit $x^2 + 3y^2 = 12$).

Věta o Lagrangeových multiplikátorech nám tedy říká, že pro extrém $a = (x,y)$ existuje $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$\big(2 - y,\ -x\big) = \operatorname{grad} f(a) = \lambda \cdot \operatorname{grad}\Phi(a) = \lambda \cdot \Big(2x,\ 6y\Big)$$

a

$$x^2 + 3y^2 = 12.$$

Z rovnic a omezení množinou U plyne, že ani jedna z hodnot x, y nemůže být nulová, takže máme

$$\begin{array}{rcl} 2 - y & = & 2\lambda x \\ -x & = & 6\lambda y \\ x^2 + 3y^2 & = & 12 \end{array} \quad \overset{\lambda = -x/(6y)}{\Longrightarrow} \quad \begin{array}{c} 2 - y = -\frac{x^2}{3y} \\ x^2 + 3y^2 = 12 \end{array} \quad \overset{x^2 = 12 - 3y^2}{\Longrightarrow} \quad 3y(2-y) = 3y^2 - 12 \quad \overset{(x,y) \in M}{\Longrightarrow} \quad y = -1$$

tedy jediné řešení je $(x,y) = (3,-1)$ s hodnotou $f(3,-1) = 9$.

Abychom věděli, že spojitá funkce f bude nabývat svého maxima, potřebujeme množinu M uzavřít (omezená pak už bude). To znamená přidat k M body $(0,2)$ a $(0,-2)$, které se tímto stanou dalšími podezřelými body z extrému. Jejich odpovídající hodnoty jsou

$$f\big(0,2\big) = f\big(0,-2\big) = 0\ .$$

Množina $\overline{M} = M \cup \{(0,2),\ (0,-2)\}$ je nyní uzavřená a omezená množina a spojitá funkce tak na $\overline{M}$ nabývá svého maxima a minima.

Porovnáním hodnot podezřelých bodů vidíme, že pro vrchol $(3,-1)$ je skutečně nabyt maximální obsah.