

## 7. cvičení z Matematické analýzy 2

1. - 5. listopadu 2021

### 7.1 (vázané extrémy)

Najděte nejmenší a největší hodnoty funkce  $f(x, y) = x - y + 3$  za podmínky  $3x^2 + 5xy + 3y^2 = 1$ ,  
Načrtněte útvar určený touto vazbou.

#### Řešení:

Hledáme absolutní extrémy funkce  $f(x, y) = x - y + 3$  na množině

$$M = \{(x, y) \in U \mid \Phi(x, y) = 0\}$$

kde  $U = \mathbb{R}^2$  (je tedy otevřená) a  $\Phi(x, y) = 3x^2 + 5xy + 3y^2 - 1$ .

- Ověříme, že  $\text{grad } \Phi(a) \neq (0, 0)$  pro každé  $a \in M$ :

Protože

$$\text{grad } \Phi(x, y) = (6x + 5y, 5x + 6y)$$

tak  $\text{grad}\Phi(x, y) = (0, 0)$  právě když  $(x, y) = (0, 0)$ . Bod  $(0, 0)$  ale není v  $M$ , takže v každém bodě  $a \in M$  je  $\text{grad}\Phi(a) \neq (0, 0)$ .

- Z Langrangeovy věty proto máme, že v bodě  $a = (x, y) \in M$  lokálního extrému  $f$  na  $M$  existuje  $\lambda \in \mathbb{R}$ , že

$$(1, -1) = \text{grad}f(a) = \lambda \cdot \text{grad}\Phi(a) = \lambda(6x + 5y, 5x + 6y)$$

a

$$3x^2 + 5xy + 3y^2 = 1.$$

Jelikož z rovnic plyne, že  $\lambda \neq 0$ , dostáváme rovnici  $6x + 5y = \frac{1}{\lambda} = -(5x + 6y)$ . Odsud plyne  $x = -y$  a po dosazení do vazby získáme kandidáty na extrémy:

$$(1, -1), \quad (-1, 1)$$

s hodnotami

$$f(1, -1) = 5, \quad f(-1, 1) = 1.$$

- Potřebujeme ještě zjistit, zda množina  $M$  je vůbec omezená (uzavřenost  $M$  plyne snadno z toho, že  $M = \Phi^{-1}(\{0\})$ , neboli že je to vzor uzavřené množiny  $\{0\}$  při spojitém zobrazení  $\Phi$ ).

Doplněním na čtverec

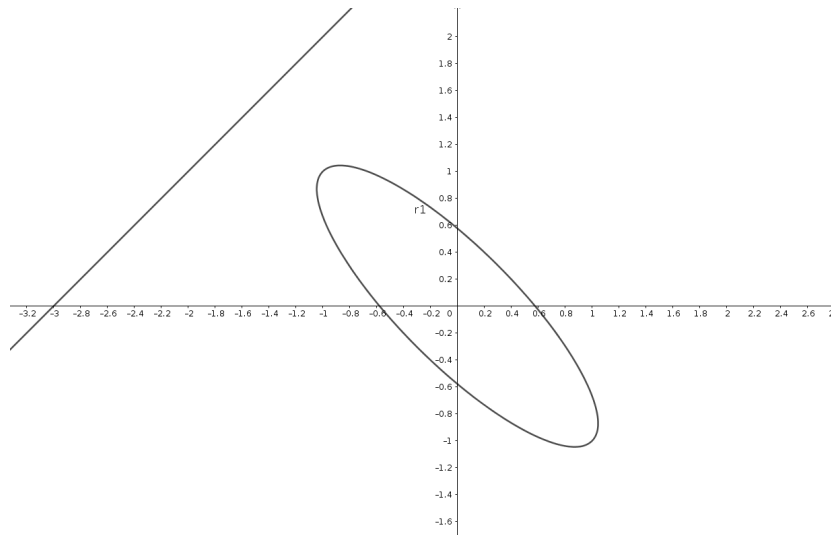
$$1 = 3x^2 + 5xy + 3y^2 = 3\left(x + \frac{5}{6}y\right)^2 + \frac{11}{12}y^2$$

zjistíme, že jde o omezenou množinu (konkrétně o (natočenou) elipsu). To lze zjistit i z toho, že kvadratická forma

$$Q(x, y) = 3x^2 + 5xy + 3y^2 = (x, y) \begin{pmatrix} 3 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

je pozitivně definitní (např. pomocí Sylvestrova kritéria).

- Spojitá funkce  $f$  tak na uzavřené a omezené množině  $M$  skutečně nabývá svého maxima v bodě  $(1, -1)$  a minima v bodě  $(-1, 1)$ .



**Poznámka:** Úloha (a) je ekvivalentní tomu, když máme najít na implicitně zadané křivce  $M : 3x^2 + 5xy + 3y^2 = 1$  body, kde tečna přímka je rovnoběžná s přímkou  $x - y + 3 = 0$ .

## 7.2 (vázané extrémy)

Najděte nejmenší a největší hodnoty funkce  $f(x, y) = x^2 + 2y^2$  za podmínky  $x^2 - 2x + 2y^2 + 4y = 0$ . Načrtněte útvary určené touto vazbou.

### Řešení:

Použijeme věty:

**Věta:** Spojitá funkce na uzavřené a omezené (tzv. *kompaktní*) množině nabývá svého maxima i minima.

**Věta:** Nechť  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  je otevřená množina  $k \leq n$  a  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  a  $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^k$  jsou spojitě diferencovatelná zobrazení na  $U$ . Položme

$$M = \{a \in U \mid \Phi(a) = 0 \text{ \& } \Phi'(a) \text{ je regulární}\}.$$

Jestliže  $a_0 \in M$  je bodem lokálního extrému funkce  $f$  zúžené na  $M$ , pak existují  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$  (tzv. *Langrangeovy multiplifikátory*), že

$$f'(a_0) = \sum_{i=1}^k \lambda_i g'_i(a_0),$$

kde  $g_i$  jsou jednotlivé složky zobrazení  $\Phi$ , tj.  $\Phi(a) = (g_1(a), \dots, g_k(a))$ .

(*Regularita* derivace znamená, že její matice má maximální možnou hodnot, tedy hodnotu  $k$ , tj. její řádky jsou lineárně nezávislé. Množina  $M$  se pak nazývá *varieta* (angl. *manifold*) a je možné ji přiřadit dimenzi - pomocí věty o implicitní funkci - a sice  $\dim M = n - k$ . Dimenze tak odpovídá dimenzi  $n$  původního prostoru  $\mathbb{R}^n$  sníženou o počet  $k$  nezávislých vazeb daných zobrazením  $\Phi$ .)

Doplněním na čtverec snadno zjistíme, že vazba představuje kružnici

$$M : (x - 1)^2 + 2(y + 1)^2 = 3$$

tedy omezenou uzavřenou množinu. Použijeme metodu Langrangeových multiplifikátorů pro

$$\Phi(x, y) = (x - 1)^2 + 2(y + 1)^2 - 3.$$

Protože

$$\Phi'(x, y) = (2(x - 1), 4(y + 1))$$

tak  $\Phi'(x, y)$  není regulární (tj. v tomto případě  $\Phi'(x, y) = 0$ ) právě když  $(x, y) = (1, -1)$ . Nemůže se tedy stát, aby  $\Phi(x, y) = 0$  a  $\Phi'(x, y) = 0$ . Takže v každém bodě množiny  $M$  je  $\Phi'(x, y)$  regulární. Pro extrém  $a = (x, y)$  na  $M$  tak existuje  $\lambda \in \mathbb{R}$ , že

$$(2x, 4y) = f'(a) = \lambda \cdot \Phi'(a) = \lambda \cdot (2(x-1), 4(y+1))$$

a

$$(x-1)^2 + 2(y+1)^2 = 3.$$

Vyjádříme  $x = \frac{\lambda}{\lambda-1}$  a  $y = \frac{\lambda}{1-\lambda}$  pomocí  $\lambda$  (zřejmě  $\lambda \neq 1$  jinak by rovnice neměly řešení) a dosadíme do vazby. Dostaneme  $(\lambda-1)^2 = 1$  s řešením  $\lambda \in \{0, 2\}$  a kandidáty na extrémy:

$$(2, -2), \quad (0, 0)$$

s hodnotami

$$f(2, -2) = 12, \quad f(0, 0) = 0.$$

Množina  $M$  je uzavřená a omezená a spojitá funkce  $f$  tak v těchto kandidátech skutečně nabývá svého maxima a minima.

### 7.3 (vázané extrémy na uzavřené množině s vnitřkem a hladkým okrajem)

Najděte nejmenší a největší hodnoty funkce

$$f(x, y) = x^2 - (y-1)^2$$

na množině

$$M : y^2 \leq 1 - x^2.$$

Načrtněte tuto množinu.

#### Řešení:

Množina  $M$  je kruh o poloměru 1 se středem v počátku. Příklad rozdělíme na vyšetření (volného) extrému na otevřené množině

$$M^\circ : x^2 + y^2 < 1$$

a vázaného extrému na hranici

$$\partial M : x^2 + y^2 = 1.$$

**Extrém na  $M^\circ$ :** Absolutní extrém na  $M^\circ$  musí být lokální a tedy musí platit

$$(0, 0) = df(x, y) = (2x, -2(y-1))$$

což nastává právě když  $(x, y) = (0, 1)$ . Tento bod ale neleží v  $M^\circ$ , takže žádné podezřelé body zatím nedostáváme.

#### Extrém na $\partial M$ :

Použijeme metodu Lagrangeových multiplikátorů. Pro extrém  $a = (x, y)$  na kružnici dané vazbovou funkcí

$$\Phi(x, y) = x^2 + y^2 - 1$$

existuje  $\lambda \in \mathbb{R}$ , že

$$(2x, -2(y-1)) = \text{grad}f(a) = \lambda \cdot \text{grad}\Phi(a) = \lambda \cdot (2x, 2y)$$

a

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Tedy má platit

$$x = x\lambda$$

$$1 - y = y\lambda.$$

Odsud máme, že buď je  $x = 0$  nebo  $\lambda = 1$ . Z první možnosti a rovnice kružnice máme body  $(0, \pm 1)$ . Z druhé, tj.  $\lambda = 1$  dostáváme  $y = \frac{1}{2}$  a tudíž body  $(\pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ . Jejich funkční hodnoty jsou:

$$f(0, 1) = 0, \quad f(0, -1) = -4$$

$$f(\pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}.$$

Množina  $M$  je uzavřená a omezená množina a spojitá funkce tak v těchto bodech nabývá svého maxima a minima.

Porovnáním hodnot podezřelých bodů dostáváme, že funkce nabývá svého maxima v bodech  $(\pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$  a minima v bodě  $(0, -1)$ .

#### 7.4 (vázané extrémy na uzavřené množině s vnitřkem a hladkým okrajem)

Kruhový talíř o rovnici  $x^2 + y^2 \leq 1$  je zahřátý na teplotu  $T(x, y) = x^2 + 2y^2 - x$ . Najděte nejteplejší a nejstudenější bod na talíři.

##### **Řešení:**

Vyšetření extrému  $T$  na uzavřené a omezené množině  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$  rozdělíme na případ (volného) extrému na otevřené množině

$$A^\circ : \quad x^2 + y^2 < 1$$

a případ vázaného extrému na

$$\partial A : \quad x^2 + y^2 = 1.$$

##### **Extrém na $A^\circ$ :**

Jestliže  $a = (x, y) \in A^\circ$  je extrém  $T$  na  $A$ , pak je i lokálním extrémem  $T$  na  $A^\circ$ . Takže musí platit, že

$$(0, 0) = dT(a) = (2x - 1, 4y)$$

tedy  $a = (\frac{1}{2}, 0)$  a tento bod skutečně patří do  $A^\circ$ . Máme tedy první podezřelý bod.

##### **Extrém na $\partial A$ :**

Jestliže  $a = (x, y) \in \partial A$  je extrém  $T$  na  $A$ , pak je i (vázaným) extrémem  $T$  na

$$\partial A : \quad \Phi(x, y) = 0$$

kde  $\Phi(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ . Musí tedy existovat  $\lambda \in \mathbb{R}$ , že

$$(2x - 1, 4y) = \text{grad}T(a) = \lambda \cdot \text{grad}\Phi(a) = \lambda(2x, 2y)$$

a

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Takže máme

$$\begin{array}{l} 2x - 1 = \lambda 2x \\ 2y = \lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{array} \quad \xrightarrow{(2-\lambda)y=0} \quad \begin{array}{l} y = 0 : x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \\ \lambda = 2 : 2x - 1 = 2 \cdot 2x \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \end{array} \quad \xrightarrow{y^2=1-x^2} \quad y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Dostáváme  $a = \pm(1, 0)$  nebo  $a = (-\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2})$ . Teď víme, že jedinými možnými kandidáty na extrémny jsou body

$$\left(\frac{1}{2}, 0\right), (1, 0), (-1, 0), \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ a } \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Protože  $T$  nabývá na (uzavřené a omezené) množině  $A$  extrému, porovnáním funkčních hodnot

$$T\left(\frac{1}{2}, 0\right) = -\frac{1}{4}, \quad T(1, 0) = 0, \quad T(-1, 0) = 2, \quad T\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{9}{4} = T\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

zjistíme, že  $T$  nabývá minima v  $(\frac{1}{2}, 0)$  a maxima v  $(-\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2})$ .

### 7.5 (extrémy pro po částech hladký okraj)

Nalezněte největší a nejmenší hodnotu funkce  $f(x, y) = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$  na množině

$$M : x^2 \leq y \leq 4.$$

#### Řešení:

Množina  $M$  je část ležící nad parabolou a pod přímkou a je zřejmě omezená i uzavřená (je průnikem uzavřených množin).

Příklad opět rozdělíme na vyšetření (volného) extrému na otevřené množině

$$M^\circ : x^2 < y < 4$$

a vázaného extrému na hranici

$$\partial M : \begin{array}{l} (y = x^2 \ \& \ -2 \leq x \leq 2) \vee \\ (y = 4 \ \& \ -2 \leq x \leq 2) \end{array}$$

kteřou ale **nejde** vyjádřit pomocí jediné diferencovatelné vazby. Vazbami jsou dvě křivky (část paraboly a úsečka). POZOR: tyto dvě vazby ale NEPLATÍ současně! Každá vyjadřuje JINOU část okraje!

#### Extrém na $M^\circ$ :

$$(0, 0) = df(x, y) = (6x^2 + 8x - 2y, 2y - 2x)$$

nastává (vzhledem k  $x, y > 0$ ) právě když je splněna soustava

$$y = 3x^2 + 4x$$

$$y = x.$$

Jediná řešení této soustavy  $(0, 0)$  a  $(-1, -1)$  ale nepatří do  $M^\circ$ , takže žádné podezřelé body zatím nedostáváme.

**Extrém na  $\partial M$ :**

Na obou křivkách můžeme použít Lagrangeovu větu, ale nejjednodušší bude zavést nějakou parametrizaci a vyšetřit lokální extrémy zúžených funkcí:

- část paraboly parametrizujeme přirozeně pomocí

$$\varphi_1 : (-2, 2) \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \varphi_1(t) = (t, t^2) .$$

Pokud  $a = \varphi_1(t_0)$  je bodem extrému  $f$  na části paraboly, pak je  $t_0$  extrémem funkce  $f \circ \varphi_1$  a tedy musí být  $(f \circ \varphi_1)'(t_0) = 0$ . Tuto úvahu ovšem můžeme udělat právě jen proto, že  $t_0$  je VNITŘNÍM bodem intervalu  $(-2, 2)$ . Z tohoto důvodu MUSÍME při vyšetřování části paraboly vynechat její koncové body, kde navazuje na úsečku (tyto koncové body automaticky zařadíme do podezřelých bodů).

Budeme tedy vyšetřovat funkci

$$g_1(t) := f(\varphi_1(t)) = f(t, t^2) = 4t^2 + t^4 \quad \text{pro } t \in (-2, 2) .$$

Máme  $g_1'(t) = 8t + 4t^3 = 0$  právě když  $t = 0$ . Podezřelým bodem tak je  $(0, 0) \in \partial M$  s hodnotou  $f(0, 0) = 0$ .

- podobně úsečku parametrizujeme přirozeně pomocí OTEVŘENÉHO intervalu

$$\varphi_2 : (-2, 2) \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \varphi_2(t) = (t, 4) .$$

Budeme tedy vyšetřovat funkci

$$g_2(t) := f(\varphi_2(t)) = f(t, 4) = 2t^3 + 4t^2 - 8t + 16 \quad \text{pro } t \in (-2, 2) .$$

Rovnice  $g_2'(t) = 6t^2 + 8t - 8 = 2(3t - 2)(t + 2) = 0$  má řešení pro  $t = \frac{2}{3} \in (-2, 2)$ . Podezřelým bodem tak je  $(\frac{2}{3}, 4) \in \partial M$  s hodnotou  $f(\frac{2}{3}, 4) = \frac{16 \cdot 22}{27}$ .

• zbývají už jen dva průsečíky křivek  $(-2, 4)$  a  $(2, 4)$  s hodnotami  $f(-2, 4) = f(2, 4) = 32$ , které taky zahrneme mezi podezřelé body.

Porovnáním hodnot podezřelých bodů (tj.  $32 > \frac{16 \cdot 22}{27} > 0$ ) dostáváme, že funkce evidentně nabývá svého maxima v bodech  $(-2, 4)$  a  $(2, 4)$  a minima v bodě  $(0, 0)$ .

**7.6 (extrémy pro po částech hladký okraj)**

Nalezněte největší a nejmenší hodnotu funkce  $f(x, y) = x^2y(4 - x - y)$  na množině

$$M : \quad x \geq 0 \quad \& \quad y \geq 0 \quad \& \quad x + y \leq 6 .$$

**Řešení:**

Množina  $M$  je trojúhelník s vrcholy  $(0, 0)$ ,  $(6, 0)$  a  $(0, 6)$  a je zřejmě omezená i uzavřená (je průnikem uzavřených polorovin).

Příklad opět rozdělíme na vyšetření (volného) extrému na otevřené množině

$$M^\circ : \quad x > 0 \quad \& \quad y > 0 \quad \& \quad x + y < 6$$

a vázaného extrému na hranici

$$\partial M : \quad \begin{aligned} &(y = 0 \quad \& \quad 0 \leq x \leq 6) \quad \vee \\ &(x = 0 \quad \& \quad 0 \leq y \leq 6) \quad \vee \\ &(x + y = 6 \quad \& \quad 0 \leq x \leq 6) \end{aligned}$$

kteřou ale nejde vyjádřit pomocí jedině diferencovatelně vazby. Vazbami jsou tři otevřené úsečky (hraný trojúhelníky) a tři body (vrcholy trojúhelníků). Tyto vazby ale opět NEJSOU splněné SOUČASNĚ (což je vidět i tím, že používáme logickou spojku “NEBO”, nikoliv “A”).

**Extrém na  $M^\circ$ :**

$$(0, 0) = df(x, y) = (8xy - 3x^2y - 2xy^2, 4x^2 - x^3 - 2x^2y)$$

nastává (vzhledem k tomu, že  $x, y > 0$ ) právě když je splněna soustava

$$8 = 3x + 2y$$

$$4 = x + 2y .$$

Tedy podezřelým bodem je řešení  $a = (2, 1) \in M^\circ$  s hodnotou  $f(2, 1) = 4$ .

**Extrém na  $\partial M$ :**

Na obou odvěsnách trojúhelníku je funkce  $f$  identicky nulová, takže všechny tyto body prostě zařadíme do podezřelých bodů. Zbývá vyšetřit otevřenou úsečku, která představuje třetí stranu. Tentokrát ji prostě zparametrizujeme pomocí

$$\varphi(t) = (t, 6 - t) \quad \text{pro } t \in (0, 6)$$

a vyšetříme tak (lokální) extrémy funkce

$$g(t) := (f \circ \varphi)(t) = -2t^2(6 - t) = 2t^3 - 12t^2$$

pro  $t \in (0, 6)$ . Máme

$$g'(t) := 6t^2 - 24t = 6t(t - 4) = 0$$

právě když  $t = 4 \in (0, 6)$  (zdůrazněme, že tento interval nutně musí být OTEVŘENÝ - jinak nemůžeme použít nutnou podmínku, tj. nulovost derivace). Tedy podezřelý bod je  $a = (4, 2)$  s hodnotou  $f(4, 2) = -64$ .

Porovnáním hodnot podezřelých bodů (zejména nezapomínejme na vrcholy trojúhelníku jako samostatné vazby, které nelze zařadit do ostatních vazeb, protože ty musí být definovány v rámci otevřených množin - opět proto, abychom mohli derivovat) dostáváme, že funkce tedy evidentně nabývá svého maxima v bodě  $(2, 1)$  a minima v bodě  $(4, 2)$ .