8. cvičení z Matematické analýzy 2

8. - 12. listopadu 2021

8.1 (vázané extrémy - aplikace)
Najděte tři pozitivní čísla jejichž součin je maximální, a jejichž součet je roven 100.

Řešení:
Zadání příkladu lze interpretovat také tak, že hledáme maximální objem kvádru, který se vejde do pravidelného trojbokého jehlanu, jehož jeden vrchol je společný s vrcholem kvádrů. Intuitivně lze očekávat, že maximální takový objem bude odpovídat krychli.

Budeme tedy hledat body maxima funkce

$$f(x, y, z) = xyz$$

na množině

$$M = \{(x, y, z) \in U \mid \Phi(x, y, z) = 0\},$$

kde

$$U : \ x, y, z > 0$$

je otevřená množina a

$$\Phi(x, y, z) = x + y + z - 100$$

je vazbová funkce.

Protože U je OTEVŘENÁ (což je podstatné!) a $\mathrm{grad}\Phi(a) \neq (0, 0, 0)$ pro každé $a \in M$, tak můžeme použít Langrangeovu podmínku pro extrém na M. Pro bod extrému $a = (x, y, z) \in M$ pak musí existovat $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$(yz, xz, xy) = \mathrm{grad} f(a) = \lambda \cdot \mathrm{grad}\Phi(a) = \lambda(1, 1, 1)$$

a

$$x + y + z = 100 \ .$$

Odsud máme např. že $yz = \lambda = xz$ a protože $z > 0$, tak dostaneme $x = y$. Podobně odvodíme, že $x = y = z$ a tedy $x + x + x = 100$. Takže jediný podezřelý bod z extrému je $a = \left(\frac{100}{3}, \frac{100}{3}, \frac{100}{3}\right)$ s hodnotou $f\left(\frac{100}{3}, \frac{100}{3}, \frac{100}{3}\right) = \left(\frac{100}{3}\right)^3$.

Abychom mohli využít věty o nabytí extrémů, potřebujeme ale uzavřenou množinu, což M není (je to trojúhelník, ale bez hran). Tak si M prostě uzavřeme, čímž dostaneme

$$\overline{M} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z \geq 0 \quad \& \quad \Phi(x, y, z) = 0\},$$

což je trojúhelník i s hranami. Na těchto přidaných hranách je ale funkce f nulová (a tudíž snadno uchopitelná), takže všechny hrany můžeme zařadit mezi podezřelé body z extrémů na $\overline{M}$. Tím jsme prošli všechny body $\overline{M}$.

Množina $\overline{M}$ je teď už uzavřená a omezená, takže spojitá funkce f zde nabývá svých extrémů. Porovnáním funkčních hodnot v podezřelých bodech teď snadno dostáváme, že na hranách nabývá f svého minima a v bodě $\left(\frac{100}{3}, \frac{100}{3}, \frac{100}{3}\right)$ svého (jediného) maxima (jak jsme očekávali).

8.2 (vázané extrémy - aplikace)
Do úseče eliptického paraboloidu $z = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3}$ vymezené rovinou $z = 1$ vepište kvádr takový, že jeho stěny budou rovnoběžně s jednotlivými souřadnými rovinami a jenž bude mít maximální objem.

Řešení:
Vzhledem k symetriím stačí vyšetřit případ, kdy čtvrtina kvádru leží v množině $x, y, z \geq 0$. Tato část je jednoznačně určena svým vrcholem (x, y, z), který leží v množině:

$$M: \quad z = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} \ \ \& \ \ 0 \leq x, y \ \ \& \ \ 0 \leq z \leq 1$$

objem této části je pak dán hodnotou

$$f(x, y, z) = xy(1-z) \ .$$

Hledáme tedy maximum f na M. Množina M je uzavřena (je to průnik uzavřených množin) a omezená (jak se snadno nahlédne). K použití věty o Langrangeových multiplikátorech potřebujeme ale množinu tvaru $\{a \in U \mid \Phi(a) = 0\}$, kde speciálně U je OTEVŘENÁ množina v $\mathbb{R}^3$. Množinu M proto rozdělíme na

$$M_1: \quad \underbrace{0 < x, y \ \& \ \ 0 < z < 1}_{=:U} \ \ \& \ \ \Phi(x, y, z) = 0$$

a

$$M_2: \quad (x = 0 \ \vee \ y = 0 \ \vee \ z = 0 \ \vee \ z = 1) \ \ \& \ \ 0 \leq x, y \ \ \& \ \ 0 \leq z \leq 1 \ \ \& \ \ \Phi(x, y, z) = 0$$

kde $\Phi(x, y, z) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} - z$ je vazbová funkce.

Pro body extrémů na M_1 můžeme teď použít Lagrangeovu podmínku (protože pro $a \in M_1$ je $\operatorname{grad}\Phi(a) \neq (0, 0, 0)$, jak bude vidět). Tedy budeme tu mít $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$\Big(y(1-z), \ x(1-z), \ -xy\Big) = \operatorname{grad} f(a) = \lambda \cdot \operatorname{grad}\Phi(a) = \lambda\Big(x, \ \tfrac{2}{3}y, \ -1\Big)$$

a

$$z = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} \ .$$

Protože na U jsou hodnoty x, y a $1 - z$ nenulové, můžeme vydělit první rovnici třetí rovnicí a také druhou rovnici opět třetí rovnicí:

$$\begin{array}{rcl} y(1-z) & = & \lambda x \\ x(1-z) & = & \lambda \frac{2}{3} y \\ xy & = & \lambda \\ z & = & \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} \end{array} \quad \xRightarrow{\text{vydělení rovnic}} \quad \begin{array}{c} 1 - z = x^2 \\ 1 - z = \frac{2}{3} y^2 \\ z = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} \end{array} \quad \xRightarrow[y^2/3 = (1-z)/2]{x^2 = 1 - z}$$

$$\Longrightarrow \quad z = \frac{1-z}{2} + \frac{1-z}{2} \quad \Longrightarrow \quad z = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{l} x^2 = 1 - z = \frac{1}{2} \\ y^2 = \frac{3}{2}(1-z) = \frac{3}{4} \end{array} \quad \xRightarrow{x, y > 0} \quad \begin{array}{l} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}$$

Jediný podezřelý bod na M_1 je tedy $a = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ s hodnotou $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}}{8}$.

Na množině M_2 je funkce f konstantně nulová, takže celou M_2 můžeme zařadit mezi podezřelé body.

Porovnáním funkčních hodnot (a tím, že f nabývá extrémů na M), pak ihned máme, že kvádr s maximálním objemem je určen vrcholem $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ (a jeho symetrickými protějšky na eliptickém paraboloidu).

8.3 (vázané extrémy - aplikace)
Určete rozměry pravoúhlého odkrytého bazénu, který má při daném objemu V minimální povrch.

Řešení:
Nechť bazén má dno s rozměry $x, y > 0$ a výšku $z > 0$. Budeme tedy hledat minimum funkce

$$f(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz$$

na množině

$$M = \{(x, y, z) \in U \mid \Phi(x, y, z) = 0\},$$

kde

$$U: \ x, y, z > 0$$

je otevřená množina a

$$\Phi(x, y, z) = xyz - V$$

je vazbová funkce.

Protože U je OTEVŘENÁ a $\mathrm{grad}\Phi(a) = (yz, xz, xy) \neq (0, 0, 0)$ pro každé $a \in M$, tak můžeme použít Langrangeovu podmínku pro extrém na M. Pro bod extrému $a = (x, y, z) \in M$ pak musí existovat $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$(y + 2z, x + 2z, 2x + 2y) = \mathrm{grad} f(a) = \lambda \cdot \mathrm{grad}\Phi(a) = \lambda(yz, xz, xy)$$

a

$$xyz = V \ \& \ x, y, z > 0 \ .$$

Máme tak rovnice:

$$\begin{aligned} y + 2z &= \lambda yz \\ x + 2z &= \lambda xz \\ 2x + 2y &= \lambda xy \\ xyz &= V \end{aligned} \quad \xRightarrow{\text{vynásobení rovnic vhodnou proměnnou}} \quad \begin{aligned} xy + 2xz &= \lambda xyz = \lambda V \\ xy + 2yz &= \lambda xyz = \lambda V \\ 2xz + 2yz &= \lambda xyz = \lambda V \\ xyz &= V \end{aligned}$$

Z prvních dvou rovnic máme $xy + 2xz = \lambda V = xy + 2yz$, tedy $x = y$. Z druhé a třetí rovnice máme $xy + 2yz = \lambda V = 2xz + 2yz$, tedy $y = 2z$. Po dosazení $x = y = 2z$ do čtvrté rovnice máme $V = 2z \cdot 2z \cdot z$, tedy $z = \sqrt[3]{\frac{V}{4}}$.

Takže jediný podezřelý bod z extrému je $a = \left(2\sqrt[3]{\frac{V}{4}}, 2\sqrt[3]{\frac{V}{4}}, \sqrt[3]{\frac{V}{4}}\right)$.

Množina M je uzavřená (je to průnik uzavřené množiny dané rovností $V = xyz$ a uzavřené množiny dané neostrými nerovnostmi $x, y, z \geq 0$), ale NENÍ omezená. Potřebujeme tedy využít:

Větu o nabytí globálního minima: Nechť $f : M \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce na uzavřené množině $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Nechť dále platí

$$(\forall \ n \in \mathbb{N})(\exists \ K > 0)(\forall \ a \in M) \quad \|a\| \geq K \Rightarrow f(a) \geq n$$

(tj. jestliže se s bodem a vzdalujeme od počátku, jde hodnota $f(a)$ do plus nekonečna).
Pak funkce f nabývá na M svého globálního minima.

Ověření podmínky po funkci f chce menší trik: pro body $a = (x, y, z) \in M$ máme s využitím podmínek $x, y, z > 0$ a $xyz = V$, že

$$\big(f(a)\big)^2 = (xy + 2yz + 2xz)^2 \geq (xy + yz + xz)^2 = x^2y^2 + y^2z^2 + x^2y^2 + 2xyz(x + y + z) \geq$$

$$\geq 2V(x+y+z) \geq 2V\sqrt{x^2+y^2+z^2} = 2V\|a\| \ .$$

Celkově tedy $\big(f(a)\big)^2 \geq 2V\|a\|$ a tudíž $f(a) \geq \sqrt{2V} \cdot \sqrt{\|a\|}$. Tedy pokud nyní pro $a \in M$ bude $\|a\|$ dostatečně velké, bude dostatečně velká i hodnota $f(a)$.

Z této věty tedy vidíme, že nalezený podezřelý bod je skutečně bodem minima funkce f na M.

8.4 (vázané extrémy - vzdálenost)
Vypočtěte vzdálenost nejbližšího bodu hyperboly $M: \ x^2+5xy+y^2 = 9$ od počátku $(0,0)$.

Řešení:
Hyperbole je uzavřená množina, ale NENÍ omezená. Ke zjištění vzdálenosti od počátku $(0,0)$ si vezmeme funkci

$$f(x,y) = x^2+y^2$$

protože se čtvercem vzdálenosti se lépe pracuje. Tato funkce "v nekonečnu roste do nekonečna" (tj. splňuje podmínky o nabytí globálního minima na M). Kandidáta na minimum můžeme opět najít metodou Lagr. multiplikátorů.

Máme tedy $f(x,y) = x^2+y^2$ a vazbovou funkci $g(x,y) = x^2+5xy+y^2-9$. Pro bod $a = (x,y) \in M$ lokálního extrému f na M existuje $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$\big(2x, 2y\big) = f'(a) = \lambda \cdot g'(a) = \lambda\Big(2x+5y, 5x+2y\Big)$$

a

$$x^2+5xy+y^2 = 9.$$

Z prvního vztahu dostaneme

$$\begin{pmatrix} 2(\lambda-1) & 5\lambda \\ 5\lambda & 2(\lambda-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Protože pro bod $(x,y) \in M$ je $(x,y) \neq (0,0)$, tak vektorová rovnice je řešitelná právě když determinant čtvercové matice je nula. Neboli

$$0 = (2(\lambda-1))^2 - (5\lambda)^2 = (2\lambda-2-5\lambda)\cdot(2\lambda-2+5\lambda) = (-3\lambda-2)\cdot(7\lambda-2)$$

tedy $\lambda = -\frac{2}{3}$ nebo $\lambda = \frac{2}{7}$. Dosazením dostaneme $x = \pm y$ a z rovnice $x^2+5xy+y^2 = 9$ pak máme podezřelé body

$$a_0 = (x,y) = \pm\left(\tfrac{3}{\sqrt{7}}, \tfrac{3}{\sqrt{7}}\right)$$

s hodnotou $f(a_0) = \frac{18}{7}$. Podle věty o nabývání minima je tato hodnota skutečně minimální, takže vzdálenost bodu $(0,0)$ od hyperboly je $\sqrt{\frac{18}{7}}$.

Na úlohu lze také nahlížet geometricky: hledáme takový bod $(x,y) \in M$, aby jeho průvodič z počátku $(0,0)$, tj. vektor $\vec{h} = (x,y)-(0,0)$ byl kolmý na tečnou přímku k M v bodě (x,y). Tato tečná přímka má za normálový vektor $\operatorname{grad} g(x,y)$. Musíme tedy vyřešit systém podmínek $\vec{h} = \lambda \cdot \operatorname{grad} g(x,y)$ pro nějaké $\lambda \in \mathbb{R}$ a $(x,y) \in M$. A to už je totéž jako výše.

8.5 (vázané extrémy - vzdálenost)
Najděte vzdálenost paraboly $M: \ y = x^2$ od přímky $p: \ y = x-2$.

Řešení:
Musíme si uvědomit, že parabola NENÍ omezená množina (i když je uzavřená a má tečny ve všech svých bodech). Naštěstí ale funkce vzdálenosti bodů paraboly M od přímky p "v nekonečnu roste do nekonečna." Minimum vzdálenosti tedy musí být nabyto v nějakém bodě M a v něm musí být tečna rovnoběžná s přímkou p.

Příklad můžeme řešit dvěma způsoby:

(1) Funkce vyjadřující vzdálenost bodu $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ od přímky dané rovnicí $\alpha x' + \beta y' + \gamma = 0$ je dána hodnotou $\frac{|\alpha x+\beta y+\gamma|}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$.

Budeme tedy hledat globální extrémy funkce

$$f(x, y) = \frac{|x - y - 2|}{\sqrt{2}}$$

Protože absolutní hodnota není diferencovatelná v nule, musíme úlohu rozdělit na takové případy, abychom mohli využít známé věty k vyšetřování extrémů.

Úlohu tedy rozdělíme na vyšetření funkce f na množině

$M_1 : y = x^2 \;\&\; x - y - 2 \neq 0$

která je tudíž zadaná jako

$$M_1 = \{(x, y) \in U \mid g(x, y) = 0\}$$

kde $g(x, y) = x^2 - y$ je vazbová funkce a $U : x - y - 2 \neq 0$ je otevřená množina v $\mathbb{R}^2$ (je to totiž doplněk uzavřené množiny dané příslušnou rovností),

a dále na množině

$M_2 : y = x^2 \;\&\; x - y - 2 = 0$.

která je ovšem prázdná, tj. $M_2 = \emptyset$.

Nyní můžeme postupovat opět metodou Langrangeových multiplikátorů (kde použijeme, že při derivování absolutní hodnoty dostaneme $\mathrm{d}f(x, y) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$ a toto plus/minus znaménko lze pak "zapomenout"díky vhodné volbě Lagrange. multiplikátoru λ) nebo můžeme využít parametrizaci $y = x^2$ a hledat minimum funkce $h(x) := f(x, x^2) = \frac{|x-x^2-2|}{\sqrt{2}}$ pro $x \in \mathbb{R}$. Dále už výpočet provádět nebudeme (výsledek dává stejný jako postup níže).

(2) Jestliže přímka nebude protínat parabolu (což zde skutečně nastává), můžeme použít "intuitivní"náhled, který je ale vlastně pouze jinou verzí prvního postupu (díky němuž je také korektnost druhého postupu zaručena).

Hledáme bod na parabole M, kde tečná přímka je rovnoběžná s přímkou p:

Směrnici $\alpha \in \mathbb{R}$ tečny v bodě $a \in M$, který je grafem funkce $g(x) = x^2$, můžeme získat také právě pomocí derivace této funkce jedné proměnné, tj. $\alpha = \frac{d}{dx}(x^2) = 2x$. Směrnice přímky p je zřejmě 1. Takže z $2x = 1$ plyne $x = \frac{1}{2}$ a tedy $y = x^2 = \frac{1}{4}$.

Vzdálenost ρ bodu $(x, y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) \in M$ od přímky $p :\; x' - y' - 2 = 0$ je tedy

$$\varrho = \frac{|x - y - 2|}{\sqrt{2}} = \frac{|\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - 2|}{\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{8}.$$

Fubiniho věta: Nechť

- $E \subseteq \mathbb{R}^2$ je oblast integrace (tj. množina, na které má vůbec smysl se o integrál nějaké funkce zajímat, např. určená grafy nějakých spojitých funkcí),
- $f : E \to \mathbb{R}$ je funkce spojitá na vnitřku E° oblasti E a
- dvojný integrál z absolutní hodnoty funkce f je konečný, tj. $\iint\limits_E |f|\; dS < \infty$ (např. pokud funkce je omezená a oblast E je také omezená).

Pak existuje dvojný integrál $\iint\limits_E f\; dS$ a platí

$$\iint\limits_E f\; dS = \int\limits_{\pi_2(E)} \left(\int\limits_{\substack{\textit{(vodorovný) řez množinou } E\\ \textit{pomocí přímky } \mathbb{R}\times\{y\}}} f(x,y)\; dx \right) dy$$

$$\iint\limits_E f\; dS = \int\limits_{\pi_1(E)} \left(\int\limits_{\substack{\textit{(svislý) řez množinou } E\\ \textit{pomocí přímky } \{x\}\times\mathbb{R}}} f(x,y)\; dy \right) dx,$$

kde $\pi_1, \pi_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jsou projekce na jednotlivé osy, tedy $\pi_1(x,y) = x$ a $\pi_2(x,y) = y$.

Poznámka: Předpoklad konečnosti integrálu z absolutní hodnoty funkce je podstatný! Např. pro funkci

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

na $E = \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle \setminus \{(0,0)\}$ je

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\, dy \right) dx = \int_0^1 \left[\frac{y}{x^2+y^2} \right]_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\, dx = \Big[\arctan(x) \Big]_{x=0}^{x=1} = \frac{\pi}{4}$$

zatímco

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\, dx \right) dy = \int_0^1 \left[\frac{-x}{x^2+y^2} \right]_{x=0}^{x=1} dy = \int_0^1 \frac{-1}{y^2+1}\, dy = \Big[-\arctan(y) \Big]_{y=0}^{y=1} = -\frac{\pi}{4}$$

což mimo jiné ukazuje na to, že

$$\int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \right| dx\, dy = \infty.$$

8.6 (dvojný integrál - Fubiniho věta)
Změňte pořadí integrace v integrálu

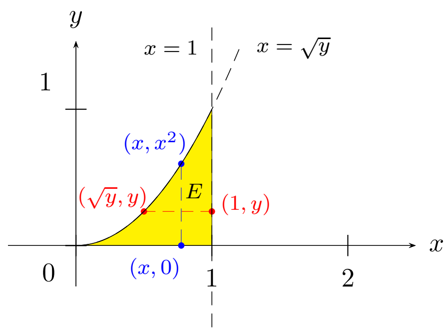
(i) $\int\limits_0^1 \int\limits_{\sqrt{y}}^1 f(x,y)\; dx\; dy,$

(ii) $\int\limits_0^{\pi} \int\limits_0^{\sin x} f(x,y)\; dy\; dx.$

Řešení:
V těchto příkladech procvičujeme jen záměnu integrace, takže předpokládáme, že funkce f předpoklady Fubiniho věty splňuje.

(a) Základní oblast integrace je

$$E: \quad 0 \le y \le 1 \quad \& \quad \sqrt{y} \le x \le 1.$$



Po rozřezání oblasti E ve směru osy y máme

$$E: \quad 0 \leq x \leq 1 \quad \& \quad 0 \leq y \leq x^2.$$

Záměna integrace pak vyjde jako:

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 f(x, y)\ dx\ dy = \int_0^1 \int_0^{x^2} f(x, y)\ dy\ dx.$$

(b) Základní oblast integrace je

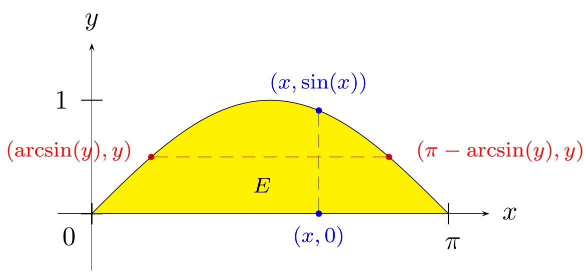
$$E: \quad 0 \leq x \leq \pi \quad \& \quad 0 \leq y \leq \sin x.$$

Máme

$$\pi_1(E) = \langle 0, \pi \rangle$$

a

$$(\{x\} \times \mathbb{R}) \cap E = \{x\} \times \langle 0, \sin x \rangle.$$



Po výměně pořadí integrace máme

$$\pi_2(E) = \langle 0, 1 \rangle$$

a pro řezy ve směru osy x vidíme, že pro $y \in \langle 0, 1 \rangle$ protíná přímka $\mathbb{R} \times \{y\}$ křivku $y = \sin(x)$ pro hodnoty $x_1 = \arcsin(y)$ (tj. $x_1 \in (0, \frac{\pi}{2})$) a pro $x_2 = \pi - x_1 = \pi - \arcsin(y)$.

Záměna integrace pak vyjde jako:

$$\int_0^{\pi} \int_0^{\sin x} f(x, y)\ dy\ dx = \int_0^1 \int_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} f(x, y)\ dx\ dy.$$

Těžiště tělesa $E \subseteq \mathbb{R}^2$ o (nezáporné) hustotě $\varrho(x,y) : E \to \mathbb{R}$ se definuje jako bod $T = (T_1, T_2) \in \mathbb{R}^2$ kde

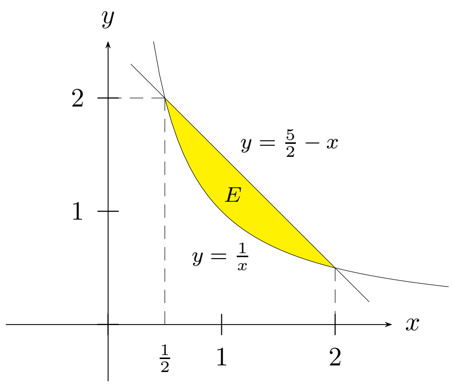
$$T_1 = \frac{1}{m} \iint\limits_E x \cdot \varrho(x,y)\ \mathrm{d}S,$$

$$T_2 = \frac{1}{m} \iint\limits_E y \cdot \varrho(x,y)\ \mathrm{d}S,$$

a $m = \iint\limits_E \varrho(x,y)\ \mathrm{d}S$ je hmotnost tohoto tělesa.

8.7 Určete těžiště útvaru omezeného křivkami $xy = 1$ a $x + y = \frac{5}{2}$, jehož plošná hustota je $\varrho(x,y) = 1$.

Řešení:
Oblast E je konvexní, takže těžiště bude ležet v E. Je dobré si vždy u výsledků tuto vlastnost v případě konvexních množin zkontrolovat. Oblast E je vnitřní část hyperboly $xy = 1$ která je oříznutá přímkou $x + y = \frac{5}{2}$.



Potřebujeme zjistit rozsah proměnných neboli průniky hyperboly s přímkou:

$$\left(xy = 1 \quad \wedge \quad x + y = \frac{5}{2} \right) \quad \Leftrightarrow \quad \left((x,y) = \left(\tfrac{1}{2}, 2\right) \quad \vee \quad (x,y) = \left(2, \tfrac{1}{2}\right) \right)$$

Množinu E tedy zapíšeme jako

$$E : \quad \tfrac{1}{2} \le x \le 2 \quad \& \quad \tfrac{1}{x} \le y \le \tfrac{5}{2} - x$$

Vzhledem k symetrii E budeme mít $T_1 = T_2$.
hmotnost:

$$m = \iint\limits_E \varrho\ dS = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} \Big(\int\limits_{\frac{1}{x}}^{\frac{5}{2}-x} 1\ dy \Big)\ dx = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{5}{2} - x - \frac{1}{x}\ dx = \frac{15}{4} - \left[\frac{x^2}{2} + \ln x \right]_{\frac{1}{2}}^{2} = \frac{15}{8} - 2\ln 2$$

$$T_1 = T_2 = \frac{1}{m} \iint\limits_E x\varrho(x,y)\ dS = \frac{1}{m} \int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} \Big(\int\limits_{\frac{1}{x}}^{\frac{5}{2}-x} x\ dy \Big)\ dx = \frac{1}{m} \int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{5}{2}x - x^2 - 1\ dx =$$

$$= \frac{1}{m} \left[\frac{5x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + x \right]_{\frac{1}{2}}^{2} = \frac{1}{m} \frac{9}{16} = \frac{9}{30 - 32\ln 2} \doteq 1.151\ .$$

8.8 (dvojný integrál - Fubiniho věta)
Načrtněte oblast integrace a vyčíslete integrál:

(i)

$$\iint_E \frac{1}{y^4+1}\, dS$$

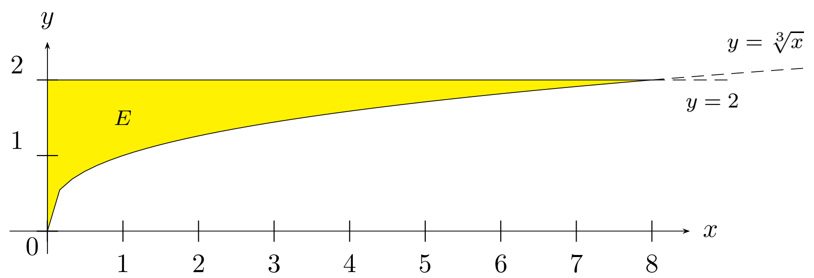
kde oblast E je omezena křivkami $x = y^3$, $y = 2$ a $x = 0$.

(ii)

$$\iint_E e^{\frac{x}{y}}\, dS,$$

kde oblast E je trojúhelník s vrcholy $(0,0)$, $(1,1)$ a $(10,1)$.

Řešení:
(a) Oblast je tvaru (viz obrázek).



Výhodnější bude funkci nejdříve integrovat podle proměnné x. Takže

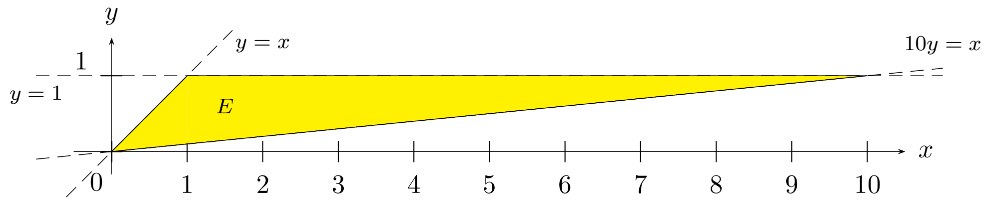
$$E: \quad 0 \le y \le 2 \quad \& \quad 0 \le x \le y^3,$$

a dostáváme tak

$$\iint_E \frac{1}{y^4+1}\, dy\, dx = \int_0^2 \left(\int_0^{y^3} \frac{1}{y^4+1}\, dx \right) dy = \int_0^2 \frac{y^3}{y^4+1} dy =$$

$$= \left[\frac{\ln(y^4+1)}{4} \right]_{y=0}^{y=2} = \frac{\ln 17}{4}.$$

(b) Oblast E je omezená přímkami $y = x$, $x = 10y$ a $y = 1$.



Na první pohled je jednodušší zkusit integrovat nejdříve podle x.

$$E: \quad 0 \le y \le 1 \quad \& \quad y \le x \le 10y$$

$$\iint\limits_E e^{\frac{x}{y}}\ dS = \int\limits_0^1 \int\limits_y^{10y} e^{\frac{x}{y}}\ dx\ dy = \int\limits_0^1 \left[y e^{\frac{x}{y}} \right]_{x=y}^{x=10y} dy = \int\limits_0^1 y\left(e^{10} - e\right)\ dy = \frac{1}{2}\left(e^{10} - e\right) \ .$$

Poznámka: Vyšetříme si ještě pro pořádek chování f na E v bodě $(0,0)$. Protože pro $(x,y) \in E$ máme $y \le x \le 10y$ a $0 < y$, tak $1 \le \frac{x}{y} \le 10$ a tedy $e^1 \le e^{\frac{x}{y}} \le e^{10}$. Funkce f je proto na $E \setminus \{(0,0)\}$ omezená, kladná a spojitá a integrál na celé E tedy existuje a je konečný.