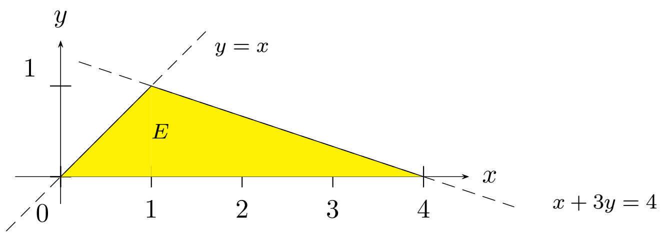
# 9. cvičení z Matematické analýzy 2

15. - 19. listopadu 2021

**9.1** Určete těžiště trojúhelníku s vrcholy $(0,0)$, $(1,1)$, $(4,0)$, jehož plošná hustota je $\varrho(x,y) = x$.

**Řešení:**
Oblast $E$ je konvexní, takže těžiště bude ležet v $E$. Je dobré si vždy u výsledků tuto vlastnost v případě konvexních množin zkontrolovat. Oblast integrace je

$$E: \quad 0 \le y \le 1, \quad y \le x \le 4 - 3y.$$




Jednotlivé integrály tedy jsou
hmotnost:

$$m = \iint\limits_E \varrho \, dS = \int\limits_0^1 \Big( \int\limits_y^{4-3y} x \, dx \Big) \, dy = \int\limits_0^1 \Big[\frac{x^2}{2}\Big]_{x=y}^{x=4-3y} \, dy =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_0^1 (3y-4)^2 - y^2 \, dy = \frac{1}{2} \Big[\frac{(3y-4)^3}{9} - \frac{y^3}{3}\Big]_0^1 = \frac{10}{3}$$

$x$-ová souřadnice těžiště:

$$T_1 = \frac{1}{m} \iint\limits_E x\varrho(x,y) \, dS = \frac{3}{10} \int\limits_0^1 \Big( \int\limits_y^{4-3y} x^2 \, dx \Big) \, dy = \frac{1}{10} \int\limits_0^1 \Big[x^3\Big]_{x=y}^{x=4-3y} \, dy =$$

$$= \frac{1}{10} \int\limits_0^1 (4-3y)^3 - y^3 \, dy = \Big[ - \frac{(4-3y)^4}{120} - \frac{y^4}{40}\Big]_0^1 = \frac{21}{10}$$

$y$-ová souřadnice těžiště:

$$T_2 = \frac{1}{m} \iint\limits_E y\varrho(x,y) \, dS = \frac{3}{10} \int\limits_0^1 \Big( \int\limits_y^{4-3y} xy \, dx \Big) \, dy = \frac{3}{20} \int\limits_0^1 \Big[x^2 y\Big]_{x=y}^{x=4-3y} \, dy =$$

$$= \frac{3}{20} \int\limits_0^1 y(4-3y)^2 - y^3 \, dy = \frac{6}{5} \int\limits_0^1 y^3 - 3y^2 + 2y \, dy = \frac{6}{5} \Big[\frac{y^4}{4} - y^3 + y^2\Big]_0^1 = \frac{3}{10}.$$

**9.2** (dvojný integrál - Fubiniho věta)

Načrtněte oblast integrace a vyčíslete integrál

$$\iint\limits_E e^{\max\{x^2,y^2\}} \; dx \; dy \; ,$$

kde $E = \langle 0,1\rangle^2 \subseteq \mathbb{R}^2$.

**Řešení:**

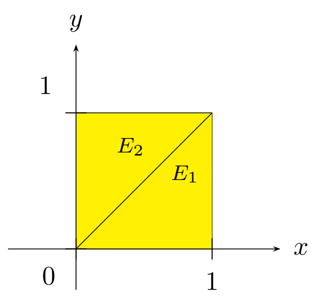
Zjistíme si hodnoty funkce na množině $E$:

$$e^{\max\{x^2,y^2\}} = \begin{cases} e^{x^2} & \text{pro } 0 \le y \le x \le 1, \\ e^{y^2} & \text{pro } 0 \le x \le y \le 1. \end{cases}$$

Množinu $E$ si tedy rozdělíme na příslušné dvě části (trojúhelníky)

$$E_1 : \quad 0 \le y \le x \le 1$$

$$E_2 : \quad 0 \le x \le y \le 1$$




Pak máme

$$\iint\limits_E e^{\max\{x^2,y^2\}} \; dx \; dy = \iint\limits_{E_1} e^{x^2} \; dx \; dy + \iint\limits_{E_2} e^{y^2} \; dx \; dy =$$

$$= \int\limits_0^1 \int\limits_0^x e^{x^2} \; dy \; dx + \int\limits_0^1 \int\limits_0^y e^{y^2} \; dx \; dy = \int\limits_0^1 x e^{x^2} \; dx + \int\limits_0^1 y e^{y^2} \; dy =$$

$$= \left[ \frac{e^{x^2}}{2} \right]_{x=0}^{x=1} + \left[ \frac{e^{y^2}}{2} \right]_{y=0}^{y=1} = e - 1 \; .$$

**Věta o substituci:** Nechť $U \subseteq \mathbb{R}^2$ je oblast integrace a $\Phi : U \to \mathbb{R}^2$ je zobrazení (nazývané *parametrizace*). Nechť dále platí, že

- $\Phi$ je spojité na $U$,
- $\Phi$ je prosté a spojitě diferencovatelné na $U^\circ$ (tj. na vnitřku $U$)
- $\det(d\Phi) \neq 0$ všude na $U^\circ$ a
- množina $\partial U$ se skládá ze spojitě diferencovatelných křivek, případně bodů (tj. její příspěvek k hodnotě jakéhokoliv integrálu je nulový)

Nechť $f$ je integrabilní funkce na $\Phi(U)$. Pak

$$\iint\limits_{\Phi(U)} f\ dS = \iint\limits_{U} (f \circ \Phi) \cdot |\det(\mathrm{d}\Phi)|\ d\widetilde{S}.$$

kde pro odlišení značíme integraci podle jiných proměnných jako $d\widetilde{S}$.

**9.3** (vyjádření oblasti v polárních souřadnicích)
Vyjádřete integrál

$$\iint\limits_{E} f(x,y)\ dx\ dy$$

v polárních souřadnicích v pořadí $d\varrho\ d\varphi$ pro oblasti

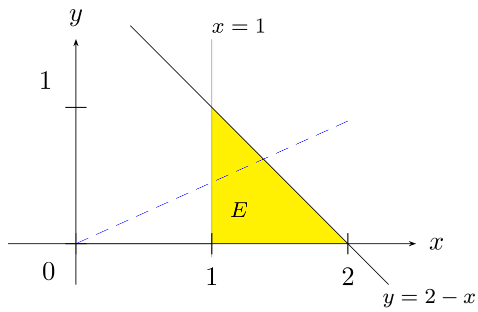
(a) $E$, která je plochou trojúhelníka s vrcholy $(1,0)$, $(2,0)$ a $(1,1)$.

(b) $E: \quad 0 \le x \le 1 \ \ \& \ \ x^2 \le y \le 1.$

**Řešení:**
Pro parametrizaci oblasti $E$ v polárních souřadnicích v pořadí $d\varrho\ d\varphi$ určíme nejdříve rozsah proměnné $\varphi$. Pro pevně zvolené $\varphi$ pak určíme rozsah proměnné $\varrho$.

(a) Oblast $E$ je trojúhelník ohraničený přímkami $x = 1$, $y = 0$ a $x + y = 2$ a dá se popsat také jako

$$E: \quad 1 \le x \le 2 \quad \& \quad 0 \le y \le 2 - x$$




Pro parametrizaci oblasti $E$ v polárních souřadnicích v pořadí $d\varrho\ d\varphi$ určíme nejdříve rozsah proměnné $\varphi$, což je $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$. Pro pevně zvolené $\varphi$ teď určíme rozsah proměnné $\varrho$. Ten je ze zdola určený přímkou $x = 1$ a shora přímkou $x + y = 2$. Po dosazení $x = \varrho\cos\varphi$ a $y = \varrho\sin\varphi$ do těchto rovnic pak máme omezení proměnné $\varrho$ shora pomocí

$$\varrho\cos\varphi + \varrho\sin\varphi = x + y = 2 \qquad \Rightarrow \qquad \varrho = \frac{2}{\cos\varphi + \sin\varrho}$$

a zdola pomocí

$$\varrho\cos\varphi = x = 1 \quad \Rightarrow \quad \varrho = \frac{1}{\cos\varphi}$$

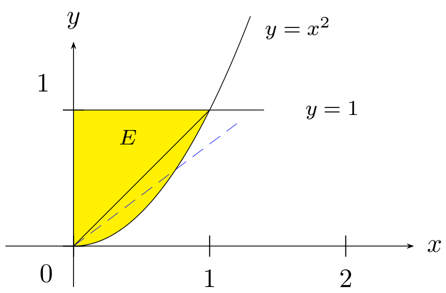
Parametrizace $U$ oblasti $E$ v polárních souřadnicích je tak dána jako

$$U: \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4} \quad \& \quad \frac{1}{\cos\varphi} \le \varrho \le \frac{2}{\cos\varphi + \sin\varphi}$$

takže přepis integrálu je následující

$$\iint_E f(x,y)\ dx\ dy = \int_0^{\pi/4} \int_{\frac{1}{\cos\varphi}}^{\frac{2}{\cos\varphi+\sin\varphi}} \varrho \cdot f(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi)\ d\varrho\ d\varphi\ .$$

(b) Postupujeme podobně jako v (a). Oblast $E$ je potřeba rozdělit na dvě části podle předpisu hraničních křivek - jedna je $y = x^2$ a druhá $y = 1$.




Po dosazení polárních souřadnic pak máme v jedné části omezení proměnné $\varrho$ shora pomocí

$$\varrho\sin\varphi = y = x^2 = \varrho^2\cos^2\varphi \qquad \Rightarrow \qquad \varrho = \frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$$

a v druhé

$$\varrho\sin\varphi = y = 1 \quad \Rightarrow \quad \varrho = \frac{1}{\sin\varphi}$$

Parametrizace $U$ oblasti $E$ v polárních souřadnicích je tak dána jako

$$U: \qquad \left(0 \le \varphi \le \tfrac{\pi}{4} \quad \& \quad 0 \le \varrho \le \tfrac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}\right) \vee$$
$$\vee \left(\tfrac{\pi}{4} \le \varphi \le \tfrac{\pi}{2} \quad \& \quad 0 \le \varrho \le \tfrac{1}{\sin\varphi}\right)$$

takže přepis integrálu je následující

$$\iint_E f(x,y)\ dx\ dy = \int_0^{\pi/4} \int_0^{\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}} \varrho \cdot f(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi)\ d\varrho\ d\varphi + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{\frac{1}{\sin\varphi}} \varrho \cdot f(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi)\ d\varrho\ d\varphi\ .$$

**9.4** (vyjádření oblasti v polárních souřadnicích)
Vyjádřete integrál

$$\iint_E f(x,y)\ dx\ dy$$

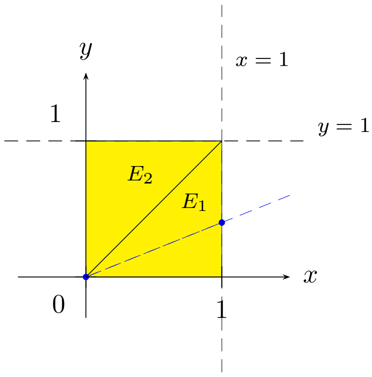
v polárních souřadnicích v pořadí $d\varrho\ d\varphi$ pro oblasti

(a) $E = \langle 0,1\rangle^2$,

(b) $E: \quad 0 \leq y \leq 1 - x^2$.

**Řešení:**
Pro parametrizaci oblasti $E$ v polárních souřadnicích v pořadí $d\varrho\ d\varphi$ určíme nejdříve rozsah proměnné $\varphi$. Pro pevně zvolené $\varphi$ pak určíme rozsah proměnné $\varrho$.

(a) Rozsah proměnné $\varphi$ je $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Proměnná $\varrho$ pak běží od 0 až po hrany čtverce, které jsou určené různými předpisy $x = 1$ a $y = 1$. Proto je potřeba $E$ rozdělit podle toho na dva trojúhelníky $E_1$ a $E_2$ a každý vyjádřit zvlášť.




Po dosazení polárních souřadnic pak máme v části $E_1$ omezení proměnné $\varrho$ shora pomocí

$$\varrho \cos\varphi = x = 1 \quad \Rightarrow \quad \varrho = \frac{1}{\cos\varphi}$$

a v části $E_2$ je pak omezení proměnné $\varrho$ shora pomocí

$$\varrho \sin\varphi = y = 1 \quad \Rightarrow \quad \varrho = \frac{1}{\sin\varphi}\ .$$

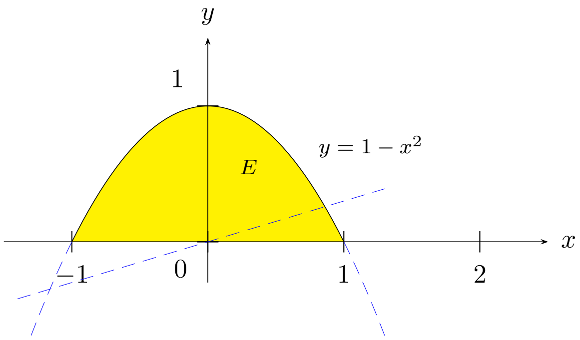
Parametrizace $U$ oblasti $E$ v polárních souřadnicích je tak dána jako

$$\begin{aligned} U: \qquad & \left(0 \leq \varphi \leq \tfrac{\pi}{4} \quad \& \quad 0 \leq \varrho \leq \tfrac{1}{\cos\varphi}\right) \vee \\ & \vee \left(\tfrac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \tfrac{\pi}{2} \quad \& \quad 0 \leq \varrho \leq \tfrac{1}{\sin\varphi}\right) \end{aligned}$$

takže přepis integrálu je následující

$$\iint\limits_E f(x,y)\ dx\ dy = \int\limits_0^{\pi/4} \int\limits_0^{\frac{1}{\cos\varphi}} \varrho \cdot f(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi)\ d\varrho\ d\varphi + \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \int\limits_0^{\frac{1}{\sin\varphi}} \varrho \cdot f(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi)\ d\varrho\ d\varphi\ .$$

(b) Množina $E$ je plocha pod parabolou.




Rozsah proměnné $\varphi$ tak bude $0 \le \varphi \le \pi$. Proměnná $\varrho$ pak běží od 0 až po parabolu

$$y = 1 - x^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y - 1 = 0\ .$$

Po dosazení polárních souřadnic pak máme omezení proměnné $\varrho$ shora pomocí

$$\varrho^2 \cos^2 \varphi + \varrho \sin \varphi - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \varrho = \frac{-\sin \varphi \pm \sqrt{\sin^2 \varphi + 4\cos^2 \varphi}}{2\cos^2 \varphi}\ .$$

Protože $\varrho \ge 0$ tak (i z náčrtu) máme, že ten správný kořen je ten s volbou znaménka $+$ a ještě si to můžeme zjednodušit pomocí

$$\sin^2 \varphi + 4\cos^2 \varphi = (1 - \cos^2 \varphi) + 4\cos^2 \varphi = 1 + 3\cos^2 \varphi$$

Parametrizace $U$ oblasti $E$ v polárních souřadnicích je tak dána jako

$$U: \quad 0 \le \varphi \le \pi \quad \& \quad 0 \le \varrho \le \frac{-\sin \varphi + \sqrt{1 + 3\cos^2 \varphi}}{2\cos^2 \varphi}$$

takže přepis integrálu je následující

$$\iint_E f(x,y)\ dx\ dy = \int_0^{\pi} \int_0^{\frac{-\sin\varphi + \sqrt{1+3\cos^2\varphi}}{2\cos^2\varphi}} \varrho \cdot f(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi)\ d\varrho\ d\varphi\ .$$

Jak to bude s tím druhým kořenem $\varrho$, který nám vyšel? Ten bude odpovídat druhému průsečíku přímky s parabolou. Ukažme si to podrobněji. Jestliže máme např. $\varphi \in (0, \pi)$, pak protější bod odpovídá úhlu $\varphi' = \varphi + \pi \in (\pi, 2\pi)$. Pro ten opět dostaneme rovnici

$$\varrho^2 \cos^2 \varphi' + \varrho \sin \varphi' - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \varrho = \frac{-\sin \varphi' \pm \sqrt{1 + 3\cos^2 \varphi'}}{2\cos^2 \varphi'}\ .$$

kde opět pouze pro znaménko " $+$ " vychází $\varrho \ge 0$. To vypadá, že se ten kořen se znaménkem " $-$ " opět někde ztratil. Ve skutečnosti však máme

$$\frac{-\sin \varphi' + \sqrt{1 + 3\cos^2 \varphi'}}{2\cos^2 \varphi'} = \frac{-\sin(\varphi + \pi) + \sqrt{1 + 3\cos^2(\varphi + \pi)}}{2\cos^2(\varphi + \pi)} = \frac{\sin \varphi + \sqrt{1 + 3\cos^2 \varphi}}{2\cos^2 \varphi}$$

což je přesně ten druhý případ (až na celkové znaménko) z prvního výpočtu.

**9.5** (vyjádření oblasti v polárních souřadnicích)

Vyjádřete integrál

$$\iint_E f(x,y)\ dx\ dy$$

v polárních souřadnicích v pořadí $d\varrho\ d\varphi$ pro oblasti

(a) $E: \quad 0 \le y \le \sqrt{1-(x-1)^2}$.

(b) $E = \langle 1,2 \rangle \times \langle 0,1 \rangle$,

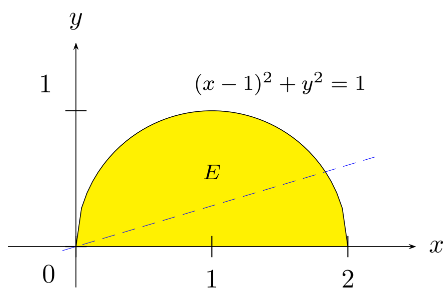
**Řešení:**
Pro parametrizaci oblasti $E$ v polárních souřadnicích v pořadí $d\varrho\ d\varphi$ určíme nejdříve rozsah proměnné $\varphi$. Pro pevně zvolené $\varphi$ pak určíme rozsah proměnné $\varrho$.

(a) Oblast $E$ je půlkruh. To zjistíme umocněním nerovnosti:

$$y \le \sqrt{1-(x-1)^2} \overset{0 \le y}{\Longrightarrow} y^2 \le 1-(x-1)^2 \ .$$

Tedy

$$E: \quad 0 \le y \ \ \& \ \ (x-1)^2 + y^2 \le 1$$




Rozsah proměnné $\varphi$ tak bude $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$. Proměnná $\varrho$ pak běží od 0 až po kružnici $(x-1)^2+y^2=1$. Po dosazení polárních souřadnic pak máme omezení proměnné $\varrho$ shora pomocí

$$\underbrace{(\varrho\cos\varphi - 1)^2 + \varrho^2\sin^2\varphi^2}_{\varrho^2+2\varrho\cos\varphi+1} = 1 \quad \Rightarrow \quad \varrho^2 = 2\varrho\cos\varphi \quad \Rightarrow \quad \varrho = 2\cos\varphi \vee \varrho = 0.$$

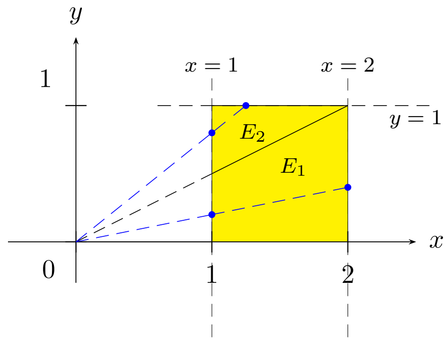
Případ $\varrho = 0$ je průnik dané přímky s kružnicí v počátku, takže druhá možnost $\varrho = 2\cos\varphi$ je hledaná horní mez. Tedy

$$U: \quad 0 \le \varphi \le \tfrac{\pi}{2} \quad \& \quad 0 \le \varrho \le 2\cos\varphi$$

takže přepis integrálu je následující

$$\iint_E f(x,y)\ dx\ dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos\varphi} \varrho \cdot f(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi)\ d\varrho\ d\varphi \ .$$

(b) Množina $E$ je čtverec.




Proměnná $\varrho$ pak běží od jedné hranice čtverce $x = 1$ až po druhou hranici, která je ale určena různými předpisy $x = 2$ nebo $y = 1$ v závislosti na volbě úhlu $\varphi$. Proto je potřeba $E$ rozdělit na dvě oblasti $E_1$ a $E_2$ a každou vyjádřit zvlášť.

Oblast $E_1$ má rozsah úhlu $0 \leq \varphi \leq \operatorname{arctg}(\frac{1}{2})$. Spodní hranice proměnné $\varrho$ je určena přímkou $x = 1$ a horní hranice přímkou $x = 12$. Po dosazení polárních souřadnic pak máme

$$\varrho \cos\varphi = x = 1 \quad \Rightarrow \quad \varrho = \frac{1}{\cos\varphi}$$

$$\varrho \cos\varphi = x = 2 \quad \Rightarrow \quad \varrho = \frac{2}{\cos\varphi}$$

Parametrizace $U_1$ oblasti $E_1$ v polárních souřadnicích je tak dána jako

$$U_1 : \quad 0 \leq \varphi \leq \operatorname{arctg}(\tfrac{1}{2}) \quad \& \quad \frac{1}{\cos\varphi} \leq \varrho \leq \frac{2}{\cos\varphi}$$

Oblast $E_2$ vyjádříme podobně. Rozsah úhlu je $\operatorname{arctg}(\frac{1}{2}) \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$. Spodní hranice proměnné $\varrho$ je určena opět přímkou $x = 1$ a horní hranice přímkou $y = 1$.

$$\varrho \cos\varphi = x = 1 \quad \Rightarrow \quad \varrho = \frac{1}{\cos\varphi}$$

$$\varrho \sin\varphi = y = 1 \quad \Rightarrow \quad \varrho = \frac{1}{\sin\varphi} \; .$$

Parametrizace $U_2$ oblasti $E_2$ v polárních souřadnicích je tak dána jako

$$U_2 : \quad \leq \operatorname{arctg}(\tfrac{1}{2}) \leq \varphi \leq \tfrac{\pi}{4} \quad \& \quad \frac{1}{\cos\varphi} \leq \varrho \leq \frac{1}{\sin\varphi}$$

takže přepis integrálu je následující

$$\iint\limits_E f(x,y)\; dx\; dy = \int\limits_0^{\operatorname{arctg}(\frac{1}{2})} \int\limits_{\frac{1}{\cos\varphi}}^{\frac{2}{\cos\varphi}} \varrho \cdot f(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi)\; d\varrho\; d\varphi + \int\limits_{\operatorname{arctg}(\frac{1}{2})}^{\pi/4} \int\limits_{\frac{1}{\cos\varphi}}^{\frac{1}{\sin\varphi}} \varrho \cdot f(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi)\; d\varrho\; d\varphi \; .$$

**9.6** (polární souřadnice)

Použitím polárních souřadnic spočítejte integrály

(a)

$$\int_{-2}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dy\,dx,$$

(b)

$$\int_{0}^{1}\int_{x}^{\sqrt{2-x^2}} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dy\,dx$$

(c)

$$\int_{0}^{\sqrt{2}}\int_{y}^{\sqrt{4-y^2}} \frac{1}{1+x^2+y^2}\,dx\,dy.$$

**Řešení:**

Polární souřadnice je vhodné používat vzhledem když množina a/nebo funkce vykazují rotační symetrii. Je to transformace s předpisem

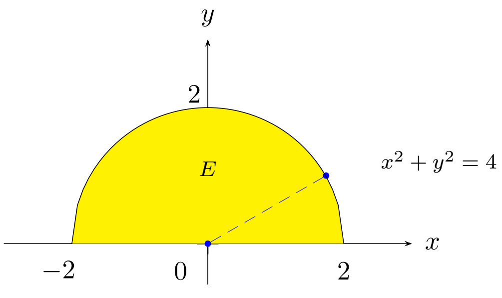
$$\Phi: \quad \begin{array}{rcl} x &=& r\cos\varphi \\ y &=& r\sin\varphi \end{array}$$

jejíž jakobián je $\det \Phi' = r$.

(a) Oblast integrace je

$$E: \quad -2 \le x \le 2 \quad \& \quad 0 \le y \le \sqrt{4-x^2}$$

což je půlkruh o poloměru 2 v horní polorovině a se středem v počátku.




Jeho parametrizace $E = \Phi(U)$ pomocí polárních souřadnic $\Phi$ je tvaru

$$U: \quad 0 \le \varphi \le \pi \quad \& \quad 0 \le r \le 2\,.$$

takže máme

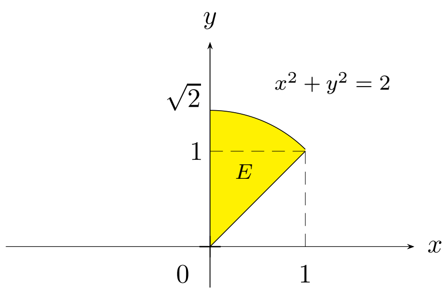
$$\int_{-2}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dy\;dx = \iint_{E=\Phi(U)} \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dS = \iint_{U} r^2 \underbrace{(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)}_{=\cos 2\varphi}\,dr\;d\varphi =$$

$$= \left(\int_0^2 r^2\;dr\right)\cdot\underbrace{\left(\int_0^\pi \cos 2\varphi\;d\varphi\right)}_{=0} = 0\;.$$

(b) Oblast integrace je

$$E: \qquad 0\le x\le 1 \quad \& \quad x\le y\le \sqrt{2-x^2}$$

což je kruhová výseč.




Její parametrizace $E=\Psi(U)$ ve sférických souřadnicích je tvaru

$$U: \qquad 0\le r\le \sqrt{2} \quad \& \quad \frac{\pi}{4}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}\;.$$

Takže máme

$$\int_0^1\int_x^{\sqrt{2-x^2}} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dy\;dx = \iint_{E=\Psi(U)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dS = \iint_U r\cos\varphi\;dr\;d\varphi =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\sqrt{2}} r\cos\varphi\;dr\;d\varphi = \left(\int_0^{\sqrt{2}} r\;dr\right)\cdot\left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\;d\varphi\right) = 1\cdot\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1-\frac{\sqrt{2}}{2}\;.$$

**Poznámka:** Použili jsme vztah

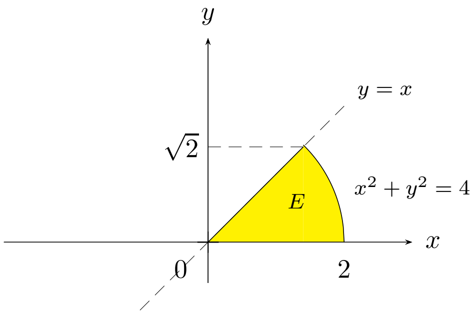
$$\iint_{X\times Y} f(x)g(y)\;dV = \Big(\int_X f(x)\;dx\Big)\cdot\Big(\int_Y g(y)\;dy\Big)$$

pro integrabilní funkce $f: X\to\mathbb{R}$ a $g: Y\to\mathbb{R}$.

(c) Oblast integrace je

$$E: \qquad 0\le y\le\sqrt{2} \quad \& \quad y\le x\le\sqrt{4-y^2}$$

což je kruhová výseč.




Její parametrizace $E = \Phi(U)$ pomocí polárních souřadnic $\Phi$ je tvaru

$$U: \quad 0 \leq r \leq 2 \quad \& \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} .$$

takže máme

$$\int_0^{\sqrt{2}} \int_y^{\sqrt{4-y^2}} \frac{1}{1+x^2+y^2}\, dx\, dy = \iint_{E=\Phi(U)} \frac{1}{1+x^2+y^2}\, dS = \iint_U \frac{r}{1+r^2}\, dr\, d\varphi =$$

$$= \left( \int_0^2 \frac{r}{1+r^2}\, dr \right) \cdot \left( \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1\, d\varphi \right) = \left[ \frac{\ln(1+r^2)}{2} \right]_{r=0}^{r=2} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \ln 5 .$$

**9.7** (plocha zadaná v polárních souřadnicích)
Vypočítejte integrál

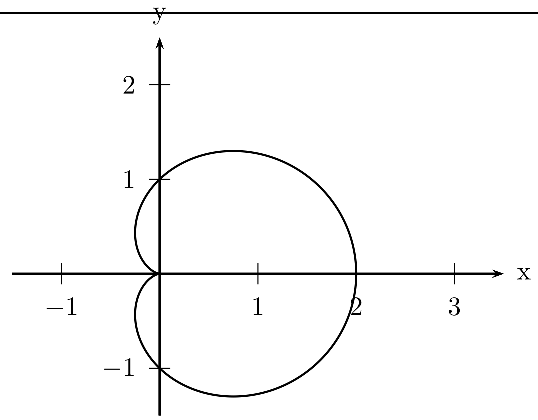
$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\, dS$$

použitím polárních souřadnic, kde $D$ je ohraničeno křivkou $r = 1 + \cos\varphi$.

**Řešení:**
V polárních souřadnicích (viz předchozí příklad) je oblast dána jako

$$U: \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad \& \quad 0 \leq r \leq 1 + \cos\varphi$$

položíme tedy $D := \Phi(U)$ (což je mimochodem v kartézských souřadnicích plocha ohraničená křivkou nazývanou *kardioida*).




Použitím věty o substituci dostaneme

$$\iint\limits_{D=\Phi(U)} \sqrt{x^2+y^2}\ dS = \iint\limits_{U} r\cdot r\ dS =$$

$$= \int_0^{2\pi}\Big(\int_0^{1+\cos\varphi} r^2\ dr\Big)\ d\varphi = \int_0^{2\pi}\left[\frac{r^3}{3}\right]_{r=0}^{r=1+\cos\varphi} d\varphi = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}(1+\cos\varphi)^3\ d\varphi =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}(\cos^3\varphi + 3\cos^2\varphi + 3\cos\varphi + 1)\ d\varphi = \pi + \frac{2}{3}\pi = \frac{5}{3}\pi.$$

**Poznámka:** Z periodicity a lichosti funkcí plyne, že $\int_0^{2\pi}\cos^{2n+1}\varphi\ d\varphi = 0$ pro $n \geq 0$.

**9.8** (oblast zadaná v polárních souřadnicích)
Určete velikost plochy $E$ (v kartézských souřadnicích), kterou ohraničuje křivka $\varrho = \sin\varphi,\quad \varphi\in\langle 0,\pi\rangle$, zadaná pomocí polárních souřadnic. Načrtněte danou křivku v polárních i kartézských souřadnicích.

**Řešení:**
V polárních souřadnicích je oblast dána jako

$$U:\quad 0\leq\varphi\leq\pi\quad \&\quad 0\leq\varrho\leq\sin\varphi$$

položíme tedy $E := \Phi(U)$. Použitím věty o substituci dostaneme pro velikost plochy $E$ (v kartézských souřadnicích!), že

$$\iint\limits_{E=\Phi(U)} 1\ dS = \iint\limits_{U} r\ dr\ d\varphi = \int_0^{\pi}\Big(\int_0^{\sin\varphi} r\ dr\Big)\ d\varphi = \int_0^{\pi}\left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{r=\sin\varphi} d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin^2\varphi\ d\varphi = \frac{\pi}{4}.$$

**Trik k výpočtu integrálu:** $\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\ d\varphi = \int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\ d\varphi$ a současně $\int_0^{2\pi}(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)\ d\varphi = \int_0^{2\pi} 1\ d\varphi = 2\pi$ tedy

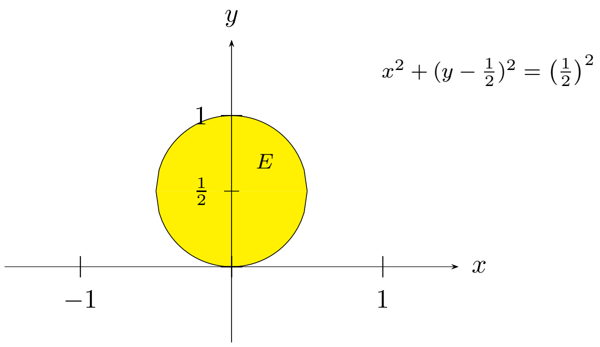
$$\int_0^{\pi}\sin^2\varphi\ d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\ d\varphi = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

A co to vlastně máme za křivku: Protože máme $\varrho(\varphi) = \sin\varphi$, můžeme body $(x, y)$ křivky parametrizovat pomocí úhlu $\varphi$ a pak platí, že

$$x = \rho\cos\varphi = \sin\varphi\cos\varphi$$

$$y = \rho\sin\varphi = \sin^2\varphi$$

Současně máme vztah $x^2 + y^2 = \rho^2 = (\sin\varphi)^2$ a spojením tak dostáváme $x^2 + y^2 = y$, což je rovnice pro danou křivku. Její úpravou máme $x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$, což je prostě kružnice se středem $(0, \frac{1}{2})$ a poloměrem $\frac{1}{2}$.




Protože jsme měli spočítat plochu, kterou kružnice (v kartézských souřadnicích) ohraničuje, není divu, že nám vyšla plocha kruhu o poloměru $\frac{1}{2}$, tedy $\pi/4$.

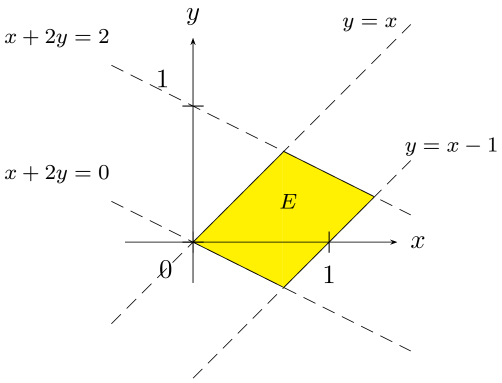
**9.9** (lineární substituce)

S použitím substituce určete

$$\iint_E (x + 2y)\sqrt[3]{x - y}\, dA$$

kde $E$ je omezená oblast určená křivkami $y = x$, $y = x - 1$, $x + 2y = 0$, $x + 2y = 2$.

**Řešení:**
Oblast $E$ zjistíme z náčrtu:




Je to tedy

$$E: \quad x-1 \leq y \leq x, \quad 0 \leq x+2y \leq 2$$

což ještě přepíšeme jako

$$E: \quad 0 \leq x-y \leq 1, \quad 0 \leq x+2y \leq 2 \ .$$

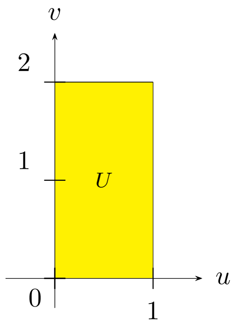
Vzhledem k tvaru množiny i funkce se nabízí použít (lineární) substituci $\Psi$, kterou zadáme pomocí její inverze:

$$\Psi^{-1}: \quad \begin{array}{rcl} u & = & x-y \\ v & = & x+2y \end{array}$$

Množina

$$U: \quad 0 \leq u \leq 1 \quad \& \quad 0 \leq v \leq 2 \ .$$

zřejmě parametrizuje $E$ jako $E = \Psi(U)$.




Pro jakobián máme

$$\det(\mathrm{d}\Psi) = \frac{1}{\det\Big(\mathrm{d}(\Psi^{-1})\Big)} = \frac{1}{\det\left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)} = \frac{1}{3} \ .$$

Po substituci pak máme

$$\iint\limits_{E=\Psi(U)} (x+2y)\sqrt[3]{x-y}\, dA = \iint\limits_{U} v\sqrt[3]{u} \cdot \frac{1}{3}\, du\ dv = \frac{1}{3} \int\limits_0^2 \int\limits_0^1 v\sqrt[3]{u}\ du\ dv =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\int\limits_0^2 v\ dv\right) \cdot \left(\int\limits_0^1 \sqrt[3]{u}\ du\right) = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \left[\frac{3}{4} u^{4/3}\right]_{u=0}^{u=1} = \frac{1}{2}.$$