1. cvičení z Matematické analýzy 2

19. - 23. září 2022

1.1 Určete a načrtněte definiční obory následujících funkcí:

(a) $f(x,y) = \sqrt{\frac{x^2-x+y^2}{2x-x^2-y^2}}$,

(b) $f(x,y) = \ln\left(x \ln(y-x)\right)$,

(c) $f(x,y) = \arcsin\frac{x}{y^2} + \arcsin(1-y)$.

Řešení:

(a) Výraz pod odmocninou musí být nezáporný a čitatel nesmí být nulový.

$$D(f):\ (x^2-x+y^2 \geq 0 \ \wedge\ 2x-x^2-y^2 > 0) \ \vee\ (x^2-x+y^2 \leq 0 \ \wedge\ 2x-x^2-y^2 < 0)$$

Zadání lze upravit na přehlednější tvar. Doplněním na čtverec, tedy použitím vzorce $a^2+2ab+b^2 = (a+b)^2$ např. pro

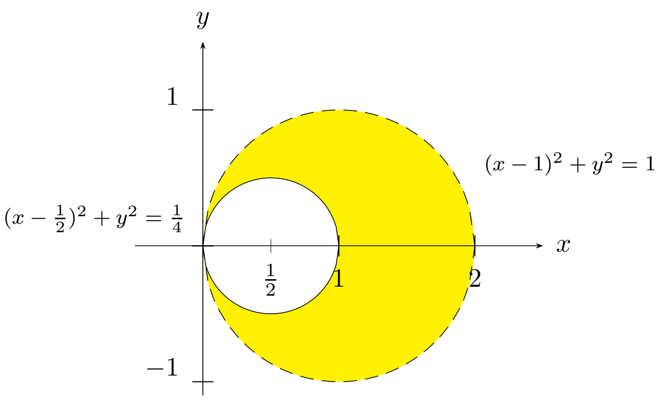
$$x^2 - x = \left(x^2 - 2\cdot x\cdot\tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{2})^2\right) - (\tfrac{1}{2})^2 = (x-\tfrac{1}{2})^2 - (\tfrac{1}{2})^2$$

můžeme nerovnosti vyjádřit jako

$$D(f):\ \left((x-\tfrac{1}{2})^2+y^2 \geq \tfrac{1}{4} \ \wedge\ (x-1)^2+y^2<1\right) \ \vee\ \left((x-\tfrac{1}{2})^2+y^2 \leq \tfrac{1}{4} \ \wedge\ (x-1)^2+y^2>1\right)$$

což představuje oblasti vně a uvnitř kružnic. Z toho je vidět, že druhá závorka představuje prázdnou množinu, tedy celkem je

$$D(f):\ \left(x-\tfrac{1}{2}\right)^2+y^2 \geq \tfrac{1}{4} \ \wedge\ (x-1)^2+y^2<1$$



(b) Argument v každém z logaritmu musí být kladný.

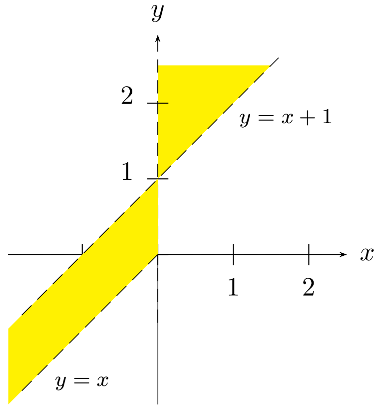
$$D(f):\ y-x>0 \wedge \left(\left(x>0 \ \wedge\ \ln(y-x)>0\right) \ \vee\ \left(x<0 \ \wedge\ \ln(y-x)<0\right)\right)$$

tedy

$$D(f):\ (x>0\ \wedge\ y-x>1)\ \vee\ (x<0\ \wedge\ 0<y-x<1)$$

neboli

$$D(f):\ (x>0\ \wedge\ x+1<y)\ \vee\ (x<0\ \wedge\ x<y<x+1)\ .$$

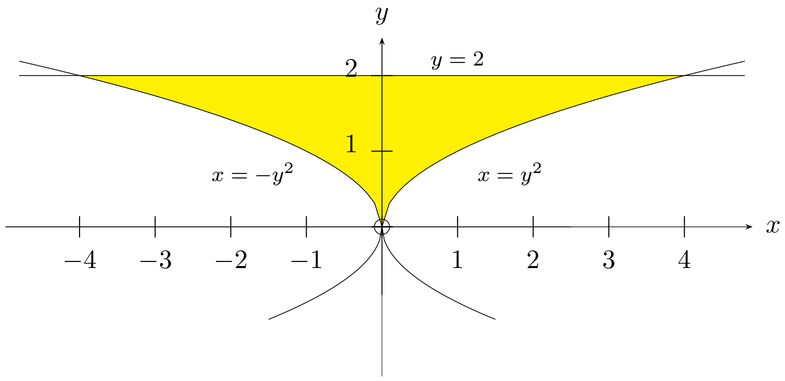


(c) Funkce arcussinus má definiční obor interval $\langle -1, 1\rangle$ a čitatel ve zlomku nesmí být nulový.

$$D(f):\ y\neq 0\ \wedge\ -1\leq \frac{x}{y^2}\leq 1\ \wedge\ -1\leq 1-y\leq 1$$

tedy

$$D(f):\ -y^2\leq x\ \wedge\ x\leq y^2\ \wedge\ 0<y\leq 2.$$



Speciálně, $D(F)$ neobsahuje počátek (vyznačeno prázdným kroužkem).

1.2 Načrtněte následující množinu:

$$M=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2-2x-y^2>0\ \wedge\ x^2-4x+y^2\leq 0\}\ .$$

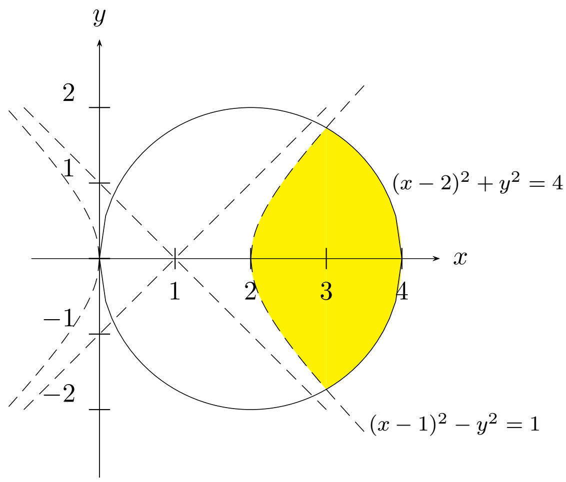
Řešení:
I zde použijeme doplnění na čtverec. První nerovnost vyjadřuje dvě oblasti ostře vymezené hyperbolou

$$(x-1)^2 - y^2 > 1$$

která má střed v bodě $(1, 0)$. Druhá nerovnost je opět kružnice s okrajem o poloměru 2 a středem v bodě $(2, 0)$

$$(x-2)^2 + y^2 \le 4 \ .$$

Množina M má tvar podobný "čočce".



Definice: Pro funkci f z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$ definujeme vrstevnici na hladině $c \in \mathbb{R}$ jako množinu

$$\{(x_1, \ldots, x_n) \in D(f) \mid f(x_1, \ldots, x_n) = c\} \ .$$

Zde $D(f)$ je definiční obor funkce f.
(Zdůrazněme, že vrstevnice obvykle bývají objekty s dimenzí $n-1$. Ale není to vždy pravidlem!)

Poznámka: Nechť g je nějaká funkce z $\langle 0, +\infty)$ do $\mathbb{R}$. Graf funkce tvaru $f(x, y) = g(\sqrt{x^2 + y^2})$ je rotačně symetrický podle osy z, a vznikne rotací grafu funkce g kolem osy z. Vrstevnice funkce f jsou složeny z kružnic. (Nemusí to ale být vždy jen prosté kružnice, nýbrž také např. mezikruží).

1.3 Pro následující funkce f vždy načrtněte graf a popište vrstevnice:

(a) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ (kužel)

(b) $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ (eliptický paraboloid),

(c) $f(x, y) = \sqrt{4 + x^2 + y^2}$ (jedna z částí dvoudílného rotačního hyperboloidu),

(d) $f(x, y) = \sqrt{4 + x^2 - y^2}$ (horní polovina jednodílného rotačního hyperboloidu).

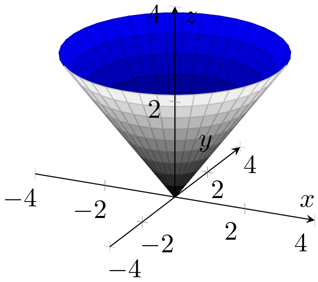
(e) $f(x, y) = xy$ (hyperbolický paraboloid),

(f) $f(x, y) = x^2 - y^2$ (hyperbolický paraboloid).

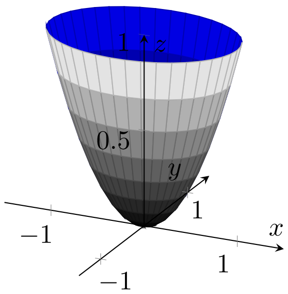
Řešení:

Označme si $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Hodnota r představuje vzdálenost bodu (x, y, z) od 3. osy (tj. osy z).

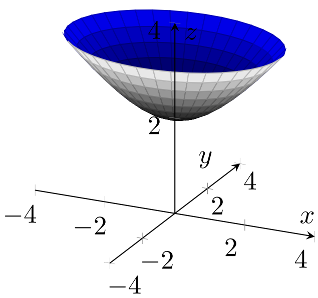
(a) Graf funkce f vznikne rotací grafu funkce $g(r) = r$, pro $r \geq 0$. Jde tedy o kužel a vrstevnice jsou soustředné kružnice:



(b) Uvažujme nejdříve funkci $h(x, y) = x^2 + y^2 = (\sqrt{x^2 + y^2})^2$. Její graf (tzv. rotační paraboloid) vznikne rotací grafu funkce $g(r) = r^2$, pro $r \geq 0$ (tj. rotací paraboly). Graf funkce $f(x, y) = x^2 + 2y^2 = h(x, \sqrt{2}y)$ se od něj bude lišit zúžením ve směru y. Průřezy (tj. vrstevnice) grafu f tak budou soustředné elipsy a celý graf se pak označuje jako eliptický paraboloid.

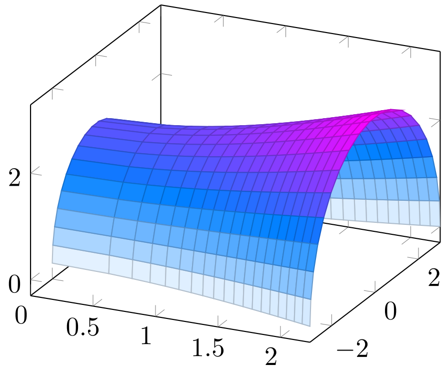


(c) Graf funkce f vznikne rotací grafu funkce $g(r) = \sqrt{4 + r^2}$, pro $r \geq 0$. Abychom zjistili, o co jde, přepíšeme si $z = \sqrt{4 + r^2}$, $r \geq 0$ ekvivalentně jako $z^2 - r^2 = 4$, $z \geq 0$, $r \geq 0$. Graf funkce g je tedy část hyperboly, jejíž hlavní osou je osa z. Její rotací (kolem osy z) vznikne část (jeden díl) dvoudílného rotačního hyperboloidu. Vrstevnice jsou soustředné kružnice a celý útvar zdálky připomíná kužel (který je “asymptotou” celého grafu).



(d) Definiční obor funkce je $D(f): \ y^2 - x^2 \leq 4$ (což je oblast mezi oběma větvemi dané hyperboly). Určitý typ rotační symetrie grafu f se dá najít i zde. Ze vztahu $z = \sqrt{4 + x^2 - y^2}$ vyplývá, že platí $(z^2 + y^2) - x^2 = 4$ a $z \geq 0$. Označme si tentokrát $r' := \sqrt{z^2 + y^2}$. Podobně jako výše dostaneme, že množina $(z^2 + y^2) - x^2 = 4$ vznikne rotací hyperboly $(r')^2 - x^2 = 4$ kolem osy x. Tato plocha se nazývá rotační jednodílný hyperboloid.

Podmínka $z \geq 0$ nám pak z ní uřízne její horní polovinu (zde se slovo “horní” vztahuje ke směru osy z). Vrstevnice hledaného grafu funkce f budou hyperboly a jejich asymptoty.



(e)+(f) Zde se hodí všimnout si, že grafy funkcí v (e) a (f) jsou navzájem otočené o $\frac{\pi}{4}$ (a současně přenásobené hodnotou $\frac{1}{2}$). To zjistíme, když si zavedeme nové proměnné $x = \frac{\sqrt{2}}{2}(a-b)$ a $y = \frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)$ neboli použijeme ortogonální transformaci

$$\Phi : \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{4}) & -\sin(\frac{\pi}{4}) \\ \cos(\frac{\pi}{4}) & \sin(\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Pak pro $f(x,y) = xy$ je $(f \circ \Phi)(a,b) = \frac{1}{2}(a-b)(a+b) = \frac{1}{2}(a^2 - b^2)$. Stačí si tedy rozmyslet graf jen pro jeden z případů. Vrstevnice jsou opět zřejmě (soustředné) hyperboly a jejich asymptoty. A výsledný graf se nazývá hyperbolický paraboloid (nebo také sedlová plocha) a je to příklad plochy s tzv. zápornou křivostí (stejně jako předchozí jednodílný hyperboloid).