10. cvičení z Matematické analýzy 2

22. - 27. listopadu 2021

10.1 (vyjádření oblasti v polárních souřadnicích)
Vyjádřete integrál

$$\iint_E f(x,y)\,dx\,dy$$

v polárních souřadnicích v pořadí $d\varrho\, d\varphi$ pro oblasti

(a) $E: \quad 0 \le y \le \sqrt{1-(x-1)^2}$.

(b) $E = \langle 1,2 \rangle \times \langle 0,1 \rangle$,

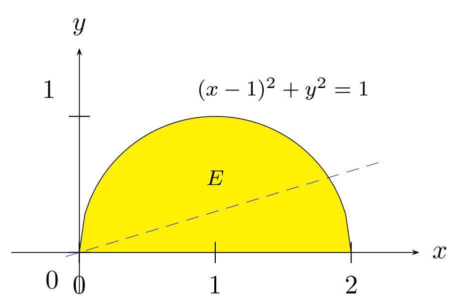
Řešení:
Pro parametrizaci oblasti E v polárních souřadnicích v pořadí $d\varrho\, d\varphi$ určíme nejdříve rozsah proměnné φ. Pro pevně zvolené φ pak určíme rozsah proměnné ϱ.

(a) Oblast E je půlkruh. To zjistíme umocněním nerovnosti:

$$y \le \sqrt{1-(x-1)^2} \overset{0 \le y}{\Longrightarrow} y^2 \le 1-(x-1)^2 \ .$$

Tedy

$$E: \quad 0 \le y \ \ \& \ \ (x-1)^2 + y^2 \le 1$$



Rozsah proměnné φ tak bude $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$. Proměnná ϱ pak běží od 0 až po kružnici $(x-1)^2+y^2 = 1$. Po dosazení polárních souřadnic pak máme omezení proměnné ϱ shora pomocí

$$\underbrace{(\varrho\cos\varphi - 1)^2 + \varrho^2 \sin^2\varphi^2}_{\varrho^2 + 2\varrho\cos\varphi + 1} = 1 \quad \Rightarrow \quad \varrho^2 = 2\varrho\cos\varphi \quad \Rightarrow \quad \varrho = 2\cos\varphi \vee \varrho = 0.$$

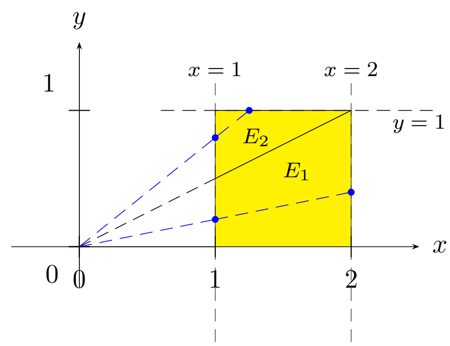
Případ $\varrho = 0$ je průnik dané přímky s kružnicí v počátku, takže druhá možnost $\varrho = 2\cos\varphi$ je hledaná horní mez. Tedy

$$U: \quad 0 \le \varphi \le \tfrac{\pi}{2} \quad \& \quad 0 \le \varrho \le 2\cos\varphi$$

takže přepis integrálu je následující

$$\iint_E f(x,y)\ dx\ dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos\varphi} \varrho \cdot f(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi)\ d\varrho\ d\varphi\ .$$

(b) Množina E je čtverec.



Proměnná ϱ pak běží od jedné hranice čtverce $x = 1$ až po druhou hranici, která je ale určena různými předpisy $x = 2$ nebo $y = 1$ v závislosti na volbě úhlu φ. Proto je potřeba E rozdělit na dvě oblasti E_1 a E_2 a každou vyjádřit zvlášť.

Oblast E_1 má rozsah úhlu $0 \leq \varphi \leq \operatorname{arctg}(\frac{1}{2})$. Spodní hranice proměnné ϱ je určena přímkou $x = 1$ a horní hranice přímkou $x = 12$. Po dosazení polárních souřadnic pak máme

$$\varrho\cos\varphi = x = 1 \quad \Rightarrow \quad \varrho = \frac{1}{\cos\varphi}$$

$$\varrho\cos\varphi = x = 2 \quad \Rightarrow \quad \varrho = \frac{2}{\cos\varphi}$$

Parametrizace U_1 oblasti E_1 v polárních souřadnicích je tak dána jako

$$U_1 : \qquad 0 \leq \varphi \leq \operatorname{arctg}(\tfrac{1}{2}) \qquad \& \qquad \frac{1}{\cos\varphi} \leq \varrho \leq \frac{2}{\cos\varphi}$$

Oblast E_2 vyjádříme podobně. Rozsah úhlu je $\operatorname{arctg}(\frac{1}{2}) \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$. Spodní hranice proměnné ϱ je určena opět přímkou $x = 1$ a horní hranice přímkou $y = 1$.

$$\varrho\cos\varphi = x = 1 \quad \Rightarrow \quad \varrho = \frac{1}{\cos\varphi}$$

$$\varrho\sin\varphi = y = 1 \quad \Rightarrow \quad \varrho = \frac{1}{\sin\varphi}\ .$$

Parametrizace U_2 oblasti E_2 v polárních souřadnicích je tak dána jako

$$U_2 : \qquad \leq \operatorname{arctg}(\tfrac{1}{2}) \leq \varphi \leq \tfrac{\pi}{4} \qquad \& \qquad \frac{1}{\cos\varphi} \leq \varrho \leq \frac{1}{\sin\varphi}$$

takže přepis integrálu je následující

$$\iint\limits_E f(x,y)\ dx\ dy = \int\limits_0^{\operatorname{arctg}(\frac{1}{2})} \int\limits_{\frac{1}{\cos\varphi}}^{\frac{2}{\cos\varphi}} \varrho \cdot f(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi)\ d\varrho\ d\varphi + \int\limits_{\operatorname{arctg}(\frac{1}{2})}^{\pi/4} \int\limits_{\frac{1}{\cos\varphi}}^{\frac{1}{\sin\varphi}} \varrho \cdot f(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi)\ d\varrho\ d\varphi\ .$$

10.2 (vyjádření oblasti v polárních souřadnicích)
Vyjádřete integrál

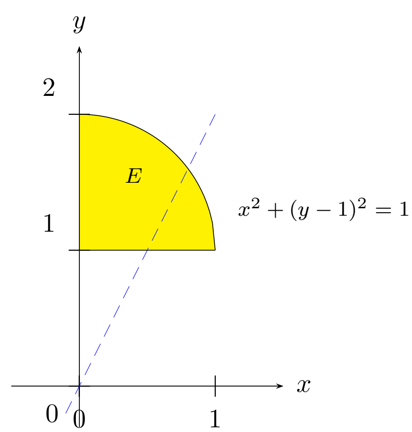
$$\iint\limits_E f(x,y)\ dx\ dy$$

v polárních souřadnicích v pořadí $d\varrho\ d\varphi$ pro oblast

$$E: \quad 1 \le y, 0 \le x \ \ \&\ \ x^2 + (y-1)^2 \le 1$$

Řešení:
Pro parametrizaci oblasti E v polárních souřadnicích v pořadí $d\varrho\ d\varphi$ určíme nejdříve rozsah proměnné φ. Pro pevně zvolené φ pak určíme rozsah proměnné ϱ.

Oblast E je čtvrtkruh.



Rozsah proměnné φ tak bude $\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$. Proměnná ϱ pak běží od $y = 1$ až po kružnici $x^2+(y-1)^2 = 1$. Po dosazení polárních souřadnic pak máme omezení proměnné ϱ zdola pomocí

$$\varrho\sin\varphi = 1 \quad\Rightarrow\quad \varrho = \frac{1}{\sin\varphi}$$

a shora pomocí

$$\underbrace{\varrho^2\cos^2\varphi^2 + (\varrho\sin\varphi - 1)^2}_{\varrho^2 + 2\varrho\sin\varphi + 1} = 1 \quad\Rightarrow\quad \varrho^2 = 2\varrho\sin\varphi \quad\Rightarrow\quad \varrho = 2\sin\varphi \vee \varrho = 0.$$

Případ $\varrho = 0$ je průnik dané přímky s kružnicí v počátku, takže druhá možnost $\varrho = 2\sin\varphi$ je hledaná horní mez. Tedy

$$U: \quad \tfrac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \tfrac{\pi}{2} \quad \& \quad \frac{1}{\sin\varrho} \leq \varrho \leq 2\sin\varphi$$

takže přepis integrálu je následující

$$\iint\limits_E f(x,y)\ dx\ dy = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_{\frac{1}{\sin\varrho}}^{2\cos\varphi} \varrho \cdot f(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi)\ d\varrho\ d\varphi\ .$$

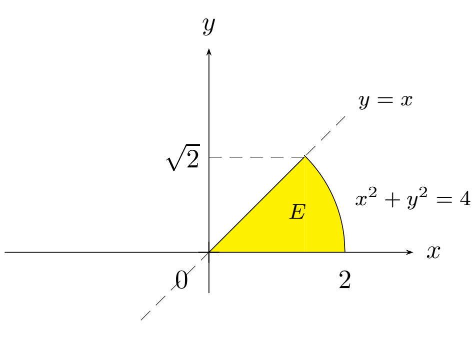
10.3 (polární souřadnice)
Použitím polárních souřadnic spočítejte integrál

$$\int\limits_0^{\sqrt{2}} \int\limits_y^{\sqrt{4-y^2}} \frac{1}{1+x^2+y^2}\, dx\ dy.$$

Řešení:
Oblast integrace je

$$E: \quad 0 \leq y \leq \sqrt{2} \quad \& \quad y \leq x \leq \sqrt{4-y^2}$$

což je kruhová výseč.



Její parametrizace $E = \Phi(U)$ pomocí polárních souřadnic Φ je tvaru

$$U: \quad 0 \leq r \leq 2 \quad \& \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}\ .$$

takže máme

$$\int\limits_0^{\sqrt{2}} \int\limits_y^{\sqrt{4-y^2}} \frac{1}{1+x^2+y^2}\, dx\ dy = \iint\limits_{E=\Phi(U)} \frac{1}{1+x^2+y^2}\ dS = \iint\limits_U \frac{r}{1+r^2}\ dr\ d\varphi =$$

$$= \left(\int_0^2 \frac{r}{1+r^2}\, dr \right) \cdot \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} 1\, d\varphi \right) = \left[\frac{\ln(1+r^2)}{2} \right]_{r=0}^{r=2} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \ln 5\ .$$

Fubiniho věta (pro trojný integrál): Nechť $E \subseteq \mathbb{R}^3$ je oblast integrace a $f : E \to \mathbb{R}$ je funkce integrabilní v absolutní hodnotě (např. spojitá a omezená). Pak

$$\iiint_E f\, dV = \iint_{\pi_{1,2}(E)} \Big(\int_{\substack{\text{řez množinou } E \text{ pomocí} \\ \text{přímky } \{(x,y)\} \times \mathbb{R}}} f(x,y,z)\, dz \Big)\, dx\, dy,$$

kde $\pi_{1,2} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ je projekce, $\pi_{1,2}(x,y,z) = (x,y)$. Případně:

$$\iiint_E f\, dV = \int_{\pi_3(E)} \Big(\iint_{\substack{\text{řez množinou } E \text{ pomocí} \\ \text{roviny } \mathbb{R}^2 \times \{z\}}} f(x,y,z)\, dx\, dy \Big)\, dz$$

kde $\pi_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ je opět projekce, $\pi_3(x,y,z) = z$.

Řezy v prvním případě jsou "vlákna" (která ale nemusí být souvislá). Po zintegrování podél vlákna, pak integrujeme přes příslušný průmět dané množiny (zde přes $\pi_{1,2}(E)$), kde postup dále můžeme opakovat (tj. průmět opět řežeme na vlákna atd.)

Jiná možnost, jak spočítat integrál, pak je ve druhém případě množinu nejdříve nařezat na dvourozměrné "plátky", přes ně integrovat danou funkci a výsledek pak zintegrovat přes jednorozměrný průmět množiny E do směru zbylé souřadnice (zde přes $\pi_3(E)$).

10.4 (trojný integrál - Fubiniho věta)

Vypočtěte

(a)

$$\iiint_E xyz\, dV,$$

kde E je ohraničeno plochami $y = x^2$, $x = y^2$, $z = xy$ a $z = 0$.

(b)

$$\iiint_E y\, dV,$$

kde E je ohraničeno shora rovinou $z = x + 2y$ a leží nad oblastí v rovině $z = 0$ ohraničené křivkami $y = x^2$, $y = 0$, $x = 1$.

Řešení:

(i) Projekce $\pi_{1,2}(E)$ oblasti integrace E do roviny xy je určena množinou omezenou křivkami $y = x^2$ a $x = y^2$. Ty totiž určují omezenou oblast v 1. kvadrantu, tj. tam, kde je $x, y \geq 0$. A proto je pak už (pro $x, y \geq 0$) oblast E určena v tomto kvadrantu grafem funkce $z = xy \geq 0$ shora a grafem funkce $z = 0$ zdola. Oblast integrace je tak

$$E: \quad 0 \leq z \leq xy, \quad \underbrace{x^2 \leq y \leq \sqrt{x}, \quad 0 \leq x \leq 1}_{\text{projekce } E \text{ do roviny } xy}.$$

Máme tedy

$$\iiint_E xyz\ dV = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \int_0^{xy} xyz\ dz\ dy\ dx = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \frac{(xy)^3}{2}\ dy\ dx = \frac{1}{8} \int_0^1 x^5 - x^{11}\ dx =$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{12}\right) = \frac{1}{96}.$$

(ii) Oblast integrace je

$$E: \quad 0 \le z \le x + 2y, \quad \underbrace{0 \le y \le x^2, \quad 0 \le x \le 1}_{\text{projekce } E \text{ do roviny } xy}.$$

I zde platí

$$\iiint_E y\ dV = \int_0^1 \int_0^{x^2} \int_0^{x+2y} y\ dz\ dy\ dx = \int_0^1 \int_0^{x^2} y(x+2y)\ dy\ dx = \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2}x + \frac{2y^3}{3}\right]_{y=0}^{y=x^2} dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{x^5}{2} + \frac{2x^6}{3}\ dx = \frac{1}{12} + \frac{2}{21} = \frac{5}{28}.$$

10.5 (trojný integrál - Fubiniho věta)
Vypočtěte

$$\iiint_E xy\ dV,$$

kde E je čtyřstěn s vrcholy $(0,0,0)$, $(0,1,0)$, $(1,1,0)$ a $(0,1,1)$.

Řešení:
Oblast integrace E je množina ohraničená rovinami $x = 0$, $y = 1$, $z = 0$ a $z = y - x$. Tedy můžeme psát např.

$$E: \quad 0 \le z \le y - x, \quad 0 \le x \le y, \quad 0 \le y \le 1.$$

Máme tedy

$$\iiint_E xy\ dV = \int_0^1 \int_0^y \int_0^{y-x} xy\ dz\ dx\ dy = \int_0^1 \int_0^y y^2x - x^2y\ dx\ dy = \int_0^1 \left[y^2\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}y\right]_{x=0}^{x=y} dy =$$

$$= \int_0^1 \frac{y^4}{2} - \frac{y^4}{3}\ dy = \left[\frac{y^5}{30}\right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{30}.$$

10.6 (trojný integrál - Fubiniho věta)

Načrtněte oblast integrace:

$$\int_0^1 \int_x^{2x} \int_0^{x+y} dz\, dy\, dx$$

Řešení:

Oblast integrace je

$$E: \quad 0 \le x \le 1 \quad \& \quad x \le y \le 2x \quad \& \quad 0 \le z \le x + y\ .$$

Projekce $\pi_{1,2}(E)$ do roviny xy je dána jako

$$\pi_{1,2}(E): \quad 0 \le x \le 1 \quad \& \quad x \le y \le 2x$$

což je trojúhelník s vrcholy $(0,0)$, $(1,1)$ a $(1,2)$. Oblast E je pak vše, co je nad trojúhelníkem až po rovinu $z = x + y$. Z polohy této roviny pak plyne, že E je pětistěn s vrcholy $(0,0,0)$, $(1,1,0)$, $(1,2,0)$, $(1,1,2)$ a $(1,2,3)$. Integrál vyjadřuje jeho objem.

Věta o substituci (trojný integrál): Nechť $U \subseteq \mathbb{R}^3$ je oblast integrace a $\Phi : U \to \mathbb{R}^3$ je zobrazení (nazývané *parametrizace*). Nechť dále platí, že

- Φ je spojité na U,
- Φ je prosté a spojitě diferencovatelné na U° (tj. na vnitřku U)
- $\det(d\Phi) \neq 0$ všude na U° a
- množina ∂U se skládá ze spojitě diferencovatelných ploch, křivek, případně bodů (tj. její příspěvek k hodnotě jakéhokoliv trojného integrálu je nulový)

Nechť f je integrabilní funkce na $\Phi(U)$. Pak

$$\iiint_{\Phi(U)} f\ dV = \iiint_U (f \circ \Phi)(\alpha, \beta, \gamma) \cdot |\det(d\Phi(\alpha, \beta, \gamma))|\ d\alpha\, d\beta\, d\gamma.$$

Cylindrické souřadnice mají předpis:

$$\Phi: \begin{array}{ccc} x & = & r\cos\varphi \\ y & = & r\sin\varphi \\ z & = & h \end{array}$$

kde $(r, \varphi, h) \in \langle 0, +\infty) \times \langle 0, 2\pi\rangle \times \mathbb{R}$. Dále je

$$d\Phi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \det(d\Phi) = r\ .$$

Moment setrvačnosti: Moment setrvačnosti J tělesa $E \subseteq \mathbb{R}^3$ s hustotou $\varrho(x,y,z)$ vzhledem k ose otáčení p je definován jako

$$J = \iiint_E v^2(x,y,z) \cdot \varrho(x,y,z)\ dV$$

kde funkce $v(x,y,z)$ je vzdálenost bodu (x,y,z) od osy p. Tělesa s velkým momentem setrvačnosti jsou např. setrvačníky, které je těžké roztočit a pak i zastavit.

10.7 (cylindrické souřadnice)

Zapište integrály pomocí cylindrických souřadnic a pak je spočítejte:

(a)

$$\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} (x^2 + y^2)\ dz\ dy\ dx.$$

(b)

$$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{x^2+y^2}^{2-x^2-y^2}(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\ dz\ dy\ dx\ .$$

Řešení:
(a) Oblast integrace je

$$E: \quad |x| \le 2 \quad \& \quad |y| \le \sqrt{4-x^2} \quad \& \quad \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 2$$

neboli

$$E: \quad x^2 \le 4 \quad \& \quad x^2+y^2 \le 4 \quad \& \quad \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 2$$

a tedy

$$E: \quad \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 2,$$

což je kužel s výškou 2 a poloměrem podstavy také 2, který stojí na svém vrcholu v počátku. Jako parametrizaci E si vezmeme

$$U: \quad 0 \le r \le h \le 2 \quad \& \quad 0 \le \varphi \le 2\pi\ .$$

Můžeme tedy psát

$$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2}(x^2+y^2)\ dz\ dy\ dx = \iiint\limits_{E=\Phi(U)}(x^2+y^2)\ dV =$$

$$= \iiint\limits_{U} r^2\cdot r\ dV = \int_0^2\int_0^h\int_0^{2\pi} r^3\ d\varphi\ dr\ dh = 2\pi\int_0^2\int_0^h r^3\ \ dr\ dh =$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^2 h^4\ \ dh = \frac{\pi}{10}\cdot 2^5 = \frac{16}{5}\pi.$$

Všimněme si, že spočítaný integrál vyjadřuje moment setrvačnosti kužele E s hustotou $\varrho(x,y,z)=1$ vzhledem k jeho ose symetrie (což je osa z).

(b) Oblast E je popsána jako

$$E: \quad -1 \le x \le 1 \quad \& \quad -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2} \quad \& \quad x^2+y^2 \le z \le 2-x^2-y^2$$

neboli

$$E: \quad |x| \le 1 \quad \& \quad |y| \le \sqrt{1-x^2} \quad \& \quad x^2+y^2 \le z \le 2-x^2-y^2$$

a ekvivalentně

$$E: \quad x^2+y^2 \le 1 \quad \& \quad x^2+y^2 \le z \le 2-x^2-y^2$$

což je prostě oblast ležící nad kruhem o poloměru 1 v rovině xy a je sevřena mezi grafy dvou funkcí (celkově vypadá jako "čočka"). Ještě si pro pořádek ověříme, že průmět oblasti do roviny xy je skutečně kruh o průměru 1 (jinak by totiž zadání nemělo smysl). Zřejmě ale je

$$x^2+y^2 \le 2-x^2-y^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2+y^2 \le 1$$

takže je to v pořádku.

V cylindrických souřadnicích Φ je parametrizací $E = \Phi(U)$ množina

$$U: \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \quad \& \quad 0 \le r \le 1 \quad \& \quad r^2 \le h \le 2 - r^2 \ .$$

Pak můžeme psát

$$\int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int\limits_{x^2+y^2}^{2-x^2-y^2} (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} \ dz \ dy \ dx = \iiint\limits_{E=\Phi(U)} (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} \ dV =$$

$$= \iiint\limits_{U} r^3 \cdot r \ d\varphi \ dh \ dr = \int\limits_0^1 \int\limits_{r^2}^{2-r^2} \int\limits_0^{2\pi} r^4 \ d\varphi \ dh \ dr = 2\pi \int\limits_0^1 \int\limits_{r^2}^{2-r^2} r^4 \ dh \ dr =$$

$$= 4\pi \int\limits_0^1 r^4(1-r^2) \ \ dr = 4\pi \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) = \frac{8}{35}\pi \ .$$

Všimněme si, že spočítaný integrál vyjadřuje moment setrvačnosti “čočky” E s hustotou $\varrho(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2}$ vzhledem k ose z.

10.8 (cylindrické souřadnice)
Určete moment setrvačnosti J tělesa

$$E: \quad x^2+y^2+z^2 \le 2 \ \ \& \ \ x^2+y^2 \le 1 \ \ \& \ \ x, y, z \ge 0.$$

vzhledem k ose otáčení z.

Řešení:
Těleso E je průnik koule o poloměru $\sqrt{2}$, válce o průměru 1, jehož osa prochází středem koule a 1. oktantu (tj. osminy prostoru se všemi souřadnicemi nezápornými). Použijeme proto cylindrické souřadnice:

$$\Phi: \quad x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi \qquad z = h \ .$$

Po dosazení do nerovností máme

$$r^2 + h^2 \le 2, \quad r^2 \le 1, \quad h \ge 0$$

přičemž rozsah úhlu je $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$. Oblast parametrizace U tak bude

$$U: \ \ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \quad \& \quad 0 \le r \le 1 \quad \& \quad 0 \le h \le \sqrt{2-r^2} \ .$$

Pak dostáváme

$$J = \iiint\limits_{E=\Phi(U)} x^2+y^2 \ \mathrm{d}V = \iiint\limits_{U} r^2 \cdot r \ \mathrm{d}h \ \mathrm{d}r \ \mathrm{d}\varphi = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^1 \int\limits_0^{\sqrt{2-r^2}} r^2 \cdot r \ \mathrm{d}h \ \mathrm{d}r \ \mathrm{d}\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int\limits_0^1 r^3\sqrt{2-r^2} \ \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi = \left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \ \mathrm{d}\varphi \right) \cdot \left(\int\limits_0^1 r^3\sqrt{2-r^2} \ \mathrm{d}r \right) = \left\{ \begin{smallmatrix} u=2-r^2 \\ du=-2rdr \end{smallmatrix} \right\} =$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_2^1 -\tfrac{1}{2}(2-u)\sqrt{u}\ \mathrm{d}u = \frac{\pi}{2}\int_1^2 u^{1/2} - \tfrac{1}{2}u^{3/2}\ \mathrm{d}u = \frac{\pi}{2}\left[\tfrac{2}{3}u^{3/2} - \tfrac{1}{5}u^{5/2}\right]_1^2 =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\frac{4}{3}\sqrt{2} - \frac{4}{5}\sqrt{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) = \pi\left(\frac{4}{15}\sqrt{2} - \frac{7}{30}\right)\ .$$

10.9 (cylindrické souřadnice)

Určete hmotnost tělesa E omezeného plochami $x^2 + z^2 = 1$, $x + \frac{y}{2} + z = 2$ a prostorem $x, y, z \geq 0$. Hustota tělesa je $\varrho(x, y, z) = |y|$.

Řešení:

Těleso E je část válce seříznuta šikmo rovinou $x + \frac{y}{2} + z = 2$ a ležící v části prostoru $x, y, z \geq 0$. Tedy:

$$E: \quad x^2 + z^2 \leq 1, \quad x \geq 0, \quad z \geq 0, \quad 0 \leq y \leq 4 - 2x - 2z.$$

Použijeme proto cylindrické souřadnice ve tvaru

$$\Phi: \begin{array}{rcl} x &=& r\cos\varphi \\ y &=& h \\ z &=& r\sin\varphi \end{array}$$

s absolutní hodnotou jakobiánu opět rovnou r.

Po dosazení této parametrizace do podmínek pro E a především pomocí geometrické představy E získáme oblast U parametrizace množiny E jako:

$$U: \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \quad \& \quad 0 \leq r \leq 1 \quad \& \quad 0 \leq h \leq 4 - 2r(\cos\varphi + \sin\varphi)\ .$$

Pak můžeme psát

$$\text{hmotnost}(E) = \iiint_E \varrho(x,y,z)\ dV = \iiint_E |y|\ dV = \iiint_U hr\ d\varphi\ dh\ dr =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1\int_0^{4-2r(\cos\varphi+\sin\varphi)} hr\ dh\ dr\ d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 r\cdot\frac{(4-2r(\cos\varphi+\sin\varphi))^2}{2}\ dr\ d\varphi =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 8r - 8r^2(\cos\varphi + \sin\varphi) + 2r^3(1 + 2\cos\varphi\sin\varphi)\ dr\ d\varphi =$$

$$= \underbrace{\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 8\ d\varphi\right)}_{=4\pi}\cdot\underbrace{\left(\int_0^1 r\ dr\right)}_{=\frac{1}{2}} - \underbrace{\left(\int_0^1 8r^2\ dr\right)}_{\frac{8}{3}}\cdot\underbrace{\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi + \sin\varphi\ d\varphi\right)}_{=2} + \underbrace{\left(\int_0^1 2r^3\ dr\right)}_{\frac{2}{4}}\cdot\underbrace{\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 + \sin(2\varphi)\ d\varphi\right)}_{=\frac{\pi}{2}+1} =$$

$$= \frac{27\pi - 58}{12}$$