11. cvičení z Matematické analýzy 2

28. listopadu - 2.prosince 2022

11.1 (cylindrické souřadnice)

Zapište integrál pomocí cylindrických souřadnic a pak ho spočítejte:

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-y^2}}\int_{x^2+y^2}^{\sqrt{x^2+y^2}} xy^2z\,dz\,dx\,dy.$$

Řešení:

Oblast E je popsána jako

$$E:\quad -1\le y\le 1 \quad \& \quad 0\le x\le\sqrt{1-y^2} \quad \& \quad x^2+y^2\le z\le\sqrt{x^2+y^2}$$

neboli

$$E:\quad 0\le x \quad \& \quad x^2+y^2\le 1 \quad \& \quad x^2+y^2\le z\le\sqrt{x^2+y^2}\ .$$

Třetí z podmínek nám dává nerovnost $x^2+y^2\le\sqrt{x^2+y^2}$, ze které plyne podmínka $x^2+y^2\le 1$, kterou tímto můžeme také vynechat. Dostáváme tak jednodušší popis

$$E:\quad 0\le x \quad \& \quad x^2+y^2\le z\le\sqrt{x^2+y^2}$$

což je prostor ležící mezi rotačním paraboloidem $z=x^2+y^2$ a kuželem $z^2=x^2+y^2$ a to celé ještě v poloprostoru určeném $x\ge 0$. Průmět $\pi_{1,2}(E)$ oblasti E do roviny xy je polovina kruhu (určená pomocí $x\ge 0$) o průměru 1. Tento průmět už máme zapsaný v jednom z ekvivalentních vyjádření E a sice jako

$$\pi_{1,2}(E):\quad 0\le x \quad \& \quad x^2+y^2\le 1$$

V cylindrických souřadnicích Φ je parametrizací oblasti $E=\Phi(U)$ množina

$$U:\quad -\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2} \quad \& \quad 0\le r\le 1 \quad \& \quad r^2\le h\le r\ .$$

Pak můžeme psát

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-y^2}}\int_{x^2+y^2}^{\sqrt{x^2+y^2}} xy^2z\,dz\,dx\,dy = \iiint\limits_{E=\Phi(U)} xy^2z\,dV =$$

$$= \iiint\limits_{U} r^3h\cos\varphi\sin^2\varphi\cdot r\,d\varphi\,dh\,dr = \int_0^1\int_{r^2}^{r} r^3h\underbrace{\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\sin^2\varphi\,d\varphi\right)}_{=\left[\frac{\sin^3\varphi}{3}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{3}}\,dh\,dr =$$

$$= \int_0^1\int_{r^2}^{r}\frac{2}{3}r^3h\,dh\,dr = \frac{1}{3}\int_0^1 r^3\left[h^2\right]_{h=r^2}^{h=r}\,dr = \frac{1}{3}\int_0^1 r^3(r^2-r^4)\,dr = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{72}\ .$$

11.2 (cylindrické souřadnice)

Určete objem tělesa E omezeného zdola plochou $x^2 + y^2 = z$ a shora plochou $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.

Řešení:

Těleso E je určeno zdola paraboloidem a shora sférou, tedy jako

$$E: \quad x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{2 - x^2 - y^2}.$$

K její parametrizaci použijeme (obvyklé) válcové souřadnice. Průmět E do roviny xy bude kružnice jejíž poloměr r_0 bude dán průnikem obou ploch, tj. v nerovnostech pro E nastane rovnost $r_0^2 = \sqrt{2 - r_0^2}$. Tedy $0 = r_0^4 + r_0^2 - 2 = (r_0^2 + 2)(r_0^2 - 1)$ a proto $r_0 = 1$. Odpovídající množina U parametrizující E tak bude (opět např. z náčrtu nebo po dosazení $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = h$ do nerovností pro E):

$$U: \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad \& \quad 0 \leq r \leq 1 \quad \& \quad r^2 \leq h \leq \sqrt{2 - r^2}\ .$$

Pak můžeme psát

$$\text{objem}(E) = \iiint\limits_{E=\Phi(U)} 1 \ \mathrm{d}V = \iiint\limits_{U} r \ \mathrm{d}h \ \mathrm{d}r \ \mathrm{d}\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{r^2}^{\sqrt{2-r^2}} r \ \mathrm{d}h \ \mathrm{d}r \ \mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r(\sqrt{2 - r^2} - r^2) \ \mathrm{d}r \ \mathrm{d}\varphi$$

$$= \underbrace{\left(\int_0^{2\pi} 1 \ \mathrm{d}\varphi\right)}_{=2\pi} \cdot \underbrace{\left(\int_0^1 r\sqrt{2 - r^2} - r^3 \ \mathrm{d}r\right)}_{=\frac{2\sqrt{2}-1}{3} - \frac{1}{4}} = \pi \cdot \frac{8\sqrt{2} - 7}{6}\ ,$$

kde jsme spočítali integrál

$$\int_0^1 r\sqrt{2 - r^2} \ \mathrm{d}r = \left\{ {t=2-r^2 \atop dt=-2rdr} \right\} = -\frac{1}{2} \int_2^1 \sqrt{t} \ \mathrm{d}t = -\frac{1}{3} \left[t^{\frac{3}{2}}\right]_2^1 = \frac{2\sqrt{2} - 1}{3}\ .$$

Sférické souřadnice mají předpis:

$$\Psi: \begin{array}{rcl} x & = & (r\sin\vartheta)\cos\varphi \\ y & = & (r\sin\vartheta)\sin\varphi \\ z & = & r\cos\vartheta \end{array}$$

kde $(r, \varphi, \vartheta) \in \langle 0, +\infty) \times \langle 0, 2\pi) \times \langle 0, \pi\rangle$.

Poznámka: Sférické souřadnice jsou složením dvou (upravených) cylindrických souřadnic a sice:

$$\Psi = \Phi_2 \circ \Phi_1$$

$$\Phi_2: \begin{array}{rcl} x & = & \tilde{r}\cos\tilde{\varphi} \\ y & = & \tilde{r}\sin\tilde{\varphi} \\ z & = & \tilde{z} \end{array}\ , \quad \Phi_1: \begin{array}{rcl} \tilde{r} & = & r\sin\vartheta \\ \tilde{\varphi} & = & \varphi \\ \tilde{z} & = & r\cos\vartheta \end{array}$$

takže pro determinant máme

$$\det \Psi' = \det(\Phi_2)'_{|\Phi_1} \cdot \det(\Phi_1)' = \tilde{r}_{|\Phi_1} \cdot r = (r\sin\vartheta) \cdot r = r^2 \sin\vartheta.$$

11.3 (sférické souřadnice)

Zapište integrál pomocí sférických souřadnic a pak ho spočítejte:

(a)

$$\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{0}\int_{0}^{\sqrt{9-x^2-z^2}} y\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dydzdx,$$

(b)

$$\int_{0}^{3}\int_{0}^{\sqrt{9-y^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{18-x^2-y^2}} (x^2+y^2+z^2)\,dzdxdy.$$

Řešení:

(a) Oblast integrace je

$$E: \quad |x|\le 3 \quad \& \quad -\sqrt{9-x^2}\le z\le 0 \quad \& \quad 0\le y\le\sqrt{9-x^2-z^2}$$

neboli

$$E: \quad \underbrace{x^2\le 9 \quad \& \quad x^2+z^2\le 9 \quad \& \quad z\le 0}_{\text{průmět } E \text{ do roviny } xz} \quad \& \quad 0\le y \quad \& \quad x^2+y^2+z^2\le 9$$

a tedy

$$E: \quad z\le 0 \quad \& \quad 0\le y \quad \& \quad x^2+y^2+z^2\le 9,$$

což je čtvrtina koule o poloměru 3 a středem v počátku. Jako parametrizaci E si vezmeme sférické souřadnice

$$\Psi: \begin{array}{rcl} x &=& (r\sin\vartheta)\cos\varphi \\ y &=& (r\sin\vartheta)\sin\varphi \\ z &=& r\cos\vartheta \end{array}$$

a oblast

$$U: \quad 0\le r\le 3 \quad \& \quad 0\le\varphi\le\pi \quad \& \quad \frac{\pi}{2}\le\vartheta\le\pi\ .$$

Můžeme tedy psát

$$\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{0}\int_{0}^{\sqrt{9-x^2-z^2}} y\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dydzdx = \iiint_{E=\Phi(U)} y\sqrt{x^2+y^2+z^2}\ dV =$$

$$= \iiint_{U} r^2\sin\vartheta\sin\varphi\cdot r^2|\sin\vartheta|\ dV = \int_0^3\int_0^\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} r^4\sin^2\vartheta\sin\varphi\ dr\ d\varphi\ d\vartheta\ =$$

$$= \underbrace{\left(\int_0^3 r^4\ \mathrm{d}r\right)}_{=\frac{3^5}{5}}\cdot\underbrace{\left(\int_0^\pi \sin\varphi\ \mathrm{d}\varphi\right)}_{2}\cdot\underbrace{\left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^2\vartheta\ \mathrm{d}\vartheta\right)}_{=\frac{\pi}{4}} = \frac{3^5}{10}\pi\ .$$

(b) Oblast integrace je

$$E: \quad 0\le y\le 3 \quad \& \quad 0\le x\le\sqrt{9-y^2} \quad \& \quad \sqrt{x^2+y^2}\le z\le\sqrt{18-x^2-y^2}$$

neboli

$$E: \quad \underbrace{0 \le y \le 3 \quad \& \quad x^2+y^2 \le 9 \quad \& \quad 0 \le x}_{\text{průmět } E \text{ do roviny } xy \text{ (čtvrtkruh)}} \quad \& \quad \underbrace{\sqrt{x^2+y^2} \le z}_{\text{kužel}} \quad \& \quad \underbrace{x^2+y^2+z^2 \le 18}_{\text{koule}}$$

Podíváme se, kde plášť kuželu protne se sférou, tj. kdy nastává $z = \sqrt{x^2+y^2}$ a $x^2+y^2+z^2 = 18$. Po dosazení dostaneme

$$18 = x^2+y^2+\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 = 2(x^2+y^2) \quad \Leftrightarrow \quad x^2+y^2 = 9$$

Jako parametrizaci E si vezmeme sférické souřadnice

$$\Psi: \begin{array}{rcl} x &=& (r\sin\vartheta)\cos\varphi \\ y &=& (r\sin\vartheta)\sin\varphi \\ z &=& r\cos\vartheta \end{array}$$

a oblast

$$U: \quad 0 \le r \le \sqrt{18} \quad \& \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \quad \& \quad 0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{4}\ .$$

Tuto oblast můžeme získat i po dosazení parametrizace do podmínek E, tj.

$$E: \quad 0 \le r\sin\vartheta\sin\varphi \quad \& \quad r^2\sin^2\vartheta \le 9 \quad \& \quad 0 \le r\sin\vartheta\cos\varphi \quad \& \quad r|\sin\vartheta| \le r\cos\vartheta \quad \& \quad r^2 \le 18$$

odkud máme např. $r^2 \le \min\{\frac{9}{\sin^2\vartheta}, 18\} = 18$ protoze

$$18 \le \frac{9}{\sin^2\vartheta} \quad \Leftrightarrow \quad \sin^2\vartheta \le \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad |\sin\vartheta| \le \frac{\sqrt{2}}{2}$$

což je právě pro $\vartheta \in \langle 0,\ \frac{\pi}{4}\rangle$ splněno. Tento postup je ale náročnější než získat totéž z náčrtu.

Můžeme tedy psát

$$\int\limits_0^3 \int\limits_0^{\sqrt{9-y^2}} \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{18-x^2-y^2}} (x^2+y^2+z^2)\, dz dx dy = \iiint\limits_{E=\Phi(U)} (x^2+y^2+z^2)\ dV =$$

$$= \iiint\limits_U r^2 \cdot r^2 |\sin\vartheta|\ dV = \int\limits_0^{\sqrt{18}} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} r^4 \sin\vartheta\ d\vartheta\ d\varphi\ dr \ =$$

$$= \underbrace{\left(\int\limits_0^{\sqrt{18}} r^4\ \mathrm{d}r\right)}_{=\frac{18^2\sqrt{18}}{5}} \cdot \underbrace{\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 1\ \mathrm{d}\varphi\right)}_{=\frac{\pi}{2}} \cdot \underbrace{\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\vartheta\ \mathrm{d}\vartheta\right)}_{=1-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2\cdot 3^5}{5}\pi(\sqrt{2}-1)\ .$$

11.4 (sférické souřadnice)

(a) Vypočtěte těžiště tělesa

$$E: \quad x^2+y^2+z^2 \le R^2 \quad \& \quad z\cdot\tan(\alpha_0) \ge \sqrt{x^2+y^2},$$

s hustotou $\sigma(x,y,z) = z$, kde $R > 0$ a $\alpha_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$ jsou parametry.

(b) Určete hmotnost tělesa

$$E: \quad x^2 + y^2 + z^2 \le 1 \quad \& \quad z \ge \sqrt{x^2 + y^2},$$

s hustotou $\sigma(x, y, z) = x^2 + y^2$.

Řešení:

(a) Těleso E je průnikem koule o poloměru R a kužele s vrcholovým úhlem $2\alpha_0$, jehož špička je ve středu koule. Výhodné tedy bude použít sférické souřadnice

$$\Psi: \quad \begin{aligned} x &= (r \sin\vartheta)\cos\varphi \\ y &= (r \sin\vartheta)\sin\varphi \\ z &= r\cos\vartheta \end{aligned}$$

Parametrizace $E = \Psi(U)$ pak bude

$$U: \quad 0 \le r \le R \quad \& \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \quad \& \quad 0 \le \vartheta \le \alpha_0$$

Pro těžiště musíme nejdříve spočítat hmotnost:

$$m = \iiint\limits_{E=\Psi(U)} 1 \; dV = \iiint\limits_{U} r^2 \sin\vartheta \; dV = \int_0^R \int_0^{\alpha_0} \int_0^{2\pi} r^2 \sin\vartheta \; d\varphi \; d\vartheta \; dr =$$

$$= 2\pi \int_0^R \int_0^{\alpha_0} r^2 \sin\vartheta \; d\vartheta \; dr = 2\pi(1 - \cos\alpha_0) \int_0^R r^2 \; dr = \frac{2}{3}\pi R^3 (1 - \cos\alpha_0).$$

Protože těleso E je rotačně symetrické podle osy z, budou x-ová i y-ová souřadnice těžiště obě nulové. Zbývá tedy spočítat z-ovou souřadnici těžiště:

$$T_3 = \frac{1}{m} \iiint\limits_{E=\Psi(U)} z \; dV = \frac{1}{m} \iiint\limits_{U} r^3 \cos\vartheta \sin\vartheta \; d\varphi \; d\vartheta \; dr = \frac{1}{m} \int_0^R \int_0^{\alpha_0} \int_0^{2\pi} r^3 \frac{\sin 2\vartheta}{2} \; d\varphi \; d\vartheta \; dr =$$

$$= \frac{\pi}{m} \left(\int_0^R r^3 \; dr \right) \cdot \left(\int_0^{\alpha_0} \sin 2\vartheta \; d\vartheta \right) = \frac{\pi R^4}{8m}(1 - \cos 2\alpha_0) = \frac{3R}{16} \cdot \frac{1 - \cos 2\alpha_0}{1 - \cos\alpha_0} = \frac{3R}{8}(1 + \cos\alpha_0).$$

(b) Postupujeme podobně jako v (a). Těleso E je průnikem koule a kužele, jehož špička je ve středu koule. Parametrizace pomocí sférických souřadnic pak bude

$$U: \quad 0 \le r \le 1 \quad \& \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \quad \& \quad 0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{4}$$

Hmotnost je:

$$m = \iiint\limits_{E=\Psi(U)} x^2 + y^2 \; dV = \iiint\limits_{U} r^2 \sin^2\vartheta \cdot r^2 \sin\vartheta \; dV = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} r^4 \sin^3\vartheta \; d\varphi \; d\vartheta \; dr =$$

$$= \left(\int_0^1 r^4 \; dr \right) \cdot \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sin^3\vartheta}_{(1-\cos^2\vartheta)\sin\vartheta} \; d\vartheta \right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} 1 \; d\varphi \right) = \left\{ \begin{array}{c} -\cos\vartheta = t \\ \sin\vartheta \; d\vartheta = dt \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{2\pi}{5} \int_{-1}^0 1 - t^2 \; dt = \frac{2\pi}{5} \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{4\pi}{15}$$

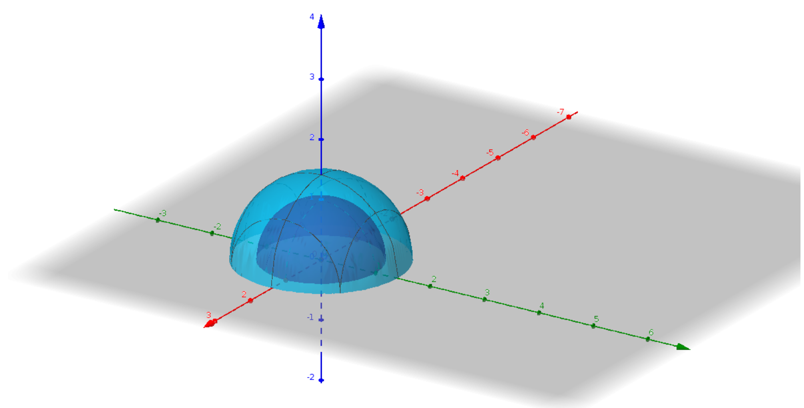
11.5 (sférické souřadnice)
Spočítejte

$$\iiint\limits_E xe^{(x^2+y^2+z^2)^2}\,dV$$

kde

$$E: \quad 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 2 \ \ \& \ \ z \ge 0\ .$$

Řešení:



Pro oblast E použijeme sférické souřadnice

$$\Psi: \quad \begin{aligned} x &= (r\sin\vartheta)\cos\varphi \\ y &= (r\sin\vartheta)\sin\varphi \\ z &= r\cos\vartheta \end{aligned}$$

a parametrizace $E = \Psi(U)$ pak bude

$$U: \quad 1 \le r \le 2 \quad \& \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \quad \& \quad 0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}\ .$$

Pro jakobián máme

$$\det\Psi' = r^2\sin\vartheta$$

a můžeme tedy psát

$$\iiint\limits_{E=\Psi(U)} xe^{(x^2+y^2+z^2)^2}\,dV = \iiint\limits_U r\sin\vartheta\cos\varphi\cdot e^{r^4}\cdot r^2\sin\vartheta\ dr\ d\varphi\ d\vartheta =$$

$$= \left(\int_1^2 r^3e^{r^4}\ dr\right)\cdot\underbrace{\left(\int_0^{2\pi}\cos\varphi\ d\varphi\right)}_{0}\cdot\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\vartheta\ d\vartheta\right) = 0\ .$$

11.6 (obecnější sférické souřadnice)

Vypočtěte těžiště tělesa

$$E: \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \quad \& \quad x, y, z \geq 0,$$

s hustotou $\sigma = 1$, kde $a, b, c > 0$ jsou parametry.

Řešení:

Oblast integrace E je osmina obecného elipsoidu. Použijeme proto upravené sférické souřadnice Φ (které parametrizují tento elipsoid):

$$\Phi: \quad \begin{array}{rcl} x/a & = & (r\sin\vartheta)\cos\varphi \\ y/b & = & (r\sin\vartheta)\sin\varphi \\ z/c & = & r\cos\vartheta \end{array},$$

které vzniknou složením "klasických" sférických souřadnic Ψ a lineární transformace $\mathcal{L}$, která deformuje jednotlivé osy:

$$\Phi = \mathcal{L} \circ \Psi, \qquad \mathcal{L}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) := (a\tilde{x}, b\tilde{y}, c\tilde{z}).$$

Máme tedy

$$\Phi' = \mathcal{L}' \circ \Psi' \quad \text{a} \quad \det \Phi' = (\det \mathcal{L}') \cdot (\det \Psi') = abc \cdot r^2 \sin\vartheta,$$

protože

$$\mathcal{L}' = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

Parametrizace U oblasti $E = \Phi(U)$ je

$$U: \quad 0 \leq r \leq 1 \quad \& \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \quad \& \quad 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Výpočet hmotnosti m oblasti E si usnadníme znalostí objemu koule o poloměru 1 (označme ji jako K) a toho, že objem E je jedna osmina objemu celého původního elipsoidu, který označme např. jako F. Protože $F = \mathcal{L}(K)$, máme:

$$m = \iiint_E 1 \; dV = \frac{1}{8} \iiint_{F=\mathcal{L}(K)} 1 \; dV = \frac{1}{8} \iiint_K |\det \mathcal{L}'| \; dV =$$

$$= \frac{abc}{8} \iiint_K 1 \; dV = \frac{abc}{8} \cdot \frac{4}{3}\pi = \frac{\pi abc}{6}.$$

Pro zjištění těžiště $\vec{T} = (T_1, T_2, T_3)$ se nyní stačí omezit jen na jednu složku (např. T_3), protože ostatní lze analogicky získat příslušným natočením elipsoidu do daného směru a zopakováním výpočtu. Máme tedy

$$T_3 = \frac{1}{m} \iiint_{E=\Phi(U)} z \; dV = \frac{1}{m} \iiint_U (cr\cos\vartheta) \cdot (abc\; r^2 \sin\vartheta) \; dV =$$

$$= \frac{3c}{\pi} \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3 \sin 2\vartheta \; d\varphi \; d\vartheta \; dr = \frac{3c}{\pi} \left(\int_0^1 r^3 \; dr \right) \cdot \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\vartheta \; d\vartheta \right) \cdot \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \; d\varphi \right) = \frac{3}{8} c.$$

Podobně tedy budeme mít $T_1 = \frac{3}{8}a$ a $T_2 = \frac{3}{8}b$.

Připomenutí: Integrál z funkce f podél křivky $\mathcal{C}$ spočítáme podle vztahu

$$\int_{\mathcal{C}} f \, ds = \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot ||\varphi'(t)|| \, dt,$$

kde φ je vhodná parametrizace křivky $\mathcal{C}$, tj. zobrazení $\varphi : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^n$, které je

- spojité a po částech spojitě diferencovatelné na intervalu $\langle a, b\rangle$ (tj. křivka může být v některých bodech "zlomená", ale stále to má být souvislá čára),
- až na konečně mnoho vyjímek $t_1, \ldots, t_n \in \langle a, b\rangle$ platí, že:
  φ je prosté na $\langle a, b\rangle$ a $\|\varphi'(t)\| \neq 0$ pro $t \in \langle a, b\rangle$ (tj. křivka může protínat konečněkrát sama sebe a vektor rychlosti chceme mít nenulový až konečně mnoho vyjímek),
- $\varphi(\langle a, b\rangle) = \mathcal{C}$.

Integrál z funkce nezávisí na volbě orientace křivky. Změnu orientace lze vždy provést např. jako

$$\psi(t) := \varphi(a + b - t) \quad \text{pro} \quad t \in \langle a, b\rangle \ .$$

11.7 (délka křivky)
Určete délku cykloidy Γ s parametrizací

$$\varphi : \quad x = t - \sin t \quad \wedge \quad y = 1 - \cos t$$

kde $0 \leq t \leq 2\pi$. Cykloida je křivka určená dráhou bodu, který je na kružnici (zde s poloměrem $a = 1$), která se valí bez tření po přímce.

Řešení:
Délka křivky Γ s parametrizací φ se vypočítá jako

$$\ell(\Gamma) = \int_a^b ||\varphi'(t)|| \, dt \quad \Big(= \int_\Gamma 1 \, ds \Big),$$

neboli jako integrál z konstantní funkce $f = 1$ podél dané křivky Γ. Máme

$$\varphi'(t) = \Big(1 - \cos t, \ \sin t\Big)$$

a

$$||\varphi'(t)|| = \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} = \sqrt{2 - 2\cos t}.$$

Takže můžeme psát

$$\ell(\Gamma) = \int_\Gamma 1 \, ds = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t} \, dt = \left[\begin{smallmatrix} 2u = t \\ 2du = dt \end{smallmatrix} \right] = 2\sqrt{2} \int_0^{\pi} \sqrt{1 - \cos(2u)} \, du =$$

$$= \Big\{ \cos(2u) = \cos^2 u - \sin^2 u \Big\} = 4 \int_0^{\pi} \sin u \, du = 8 \ .$$

11.8 (křivkový integrál z funkce)
Spočítejte $\int_{\mathcal{C}} (x + y) \, ds$, kde $\mathcal{C}$ se skládá postupně z křivek

- $\mathcal{C}_1$: levá polovina kružnice o poloměru 1 se středem v $(0,1)$ jdoucí v záporném smyslu z bodu $(0,0)$ do bodu $(0,2)$;
- $\mathcal{C}_2$: úsečka jdoucí z bodu $(0,2)$ do bodu $(1,0)$.

Řešení:
• parametrizace $\mathcal{C}_1$: Křivka splňuje rovnici $x^2+(y-1)^2=1$, proto použijeme posunuté polární souřadnice.

$$\varphi_1 : \quad x=\cos t, \quad y=1+\sin t \;\text{ pro }\; \tfrac{\pi}{2}\le t\le \tfrac{3\pi}{2}.$$

Tato parametrizace však probíhá křivku v opačném směru! To ale nevadí, protože integrál z funkce nezávisí na volbě orientace.

$$\varphi_1'(t): \quad x'(t)=-\sin t, \quad y'(t)=\cos t \quad \text{a} \quad ||\varphi_1'(t)||=\sqrt{(-\sin t)^2+\cos^2 t}=1.$$

Takže

$$\int_{\mathcal{C}_1}(x+y)\;ds=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}(x+y)_{|\varphi_1(t)}\cdot||\varphi_1'(t)||\;dt=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}1+\sin t+\cos t\;dt=\pi+2\;.$$

• parametrizace $\mathcal{C}_2$: $\varphi_2(t)=(0,2)+t(1,-2)=(t,2-2t), \quad t\in\langle 0,1\rangle$

$$\varphi_2'(t)=(1,-2) \quad \text{a} \quad ||\varphi_2'(t)||=\sqrt{1^2+(-2)^2}=\sqrt{5}.$$

Parametrizace má orientaci souhlasnou se zvolenou orientací. Takže

$$\int_{\mathcal{C}_2}(x+y)\;ds=\int_0^1(x+y)_{|\varphi_2(t)}\cdot||\varphi_2'(t)||\;dt=\int_0^1(2-t)\sqrt{5}\;dt=\frac{3\sqrt{5}}{2}\;.$$

Celkem tedy máme

$$\int_{\mathcal{C}}(x+y)\,ds=\sum_{i=1}^{2}\int_{\mathcal{C}_i}(x+y)\,ds=\pi+2+\frac{3\sqrt{5}}{2}$$