# 12. cvičení z Matematické analýzy 2

5. - 9. prosince 2022

**12.1** (křivkový integrál z funkce)
Spočítejte $\int\limits_{\mathcal{C}} \sqrt{x^2+y^2}\, ds$, kde $\mathcal{C}$ se skládá postupně z křivek

- $\mathcal{C}_1$: horní polovina kružnice o poloměru $\frac{1}{2}$ se středem v $(\frac{1}{2}, 0)$ jdoucí v kladném smyslu z bodu $(1,0)$ do bodu $(0,0)$;
- $\mathcal{C}_2$: úsečka jdoucí z bodu $(0,0)$ do bodu $(-1,2)$.

**Řešení:**

• parametrizace $\mathcal{C}_1$: Křivka splňuje rovnici $(x-\frac{1}{2})^2 + y^2 = (\frac{1}{2})^2$, proto použijeme posunuté polární souřadnice.

$$\varphi_1: \quad x = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos t, \quad y = \tfrac{1}{2}\sin t \quad \text{pro} \quad 0 \le t \le \pi.$$

$$\varphi_1'(t): \quad x'(t) = -\tfrac{1}{2}\sin t, \quad y'(t) = \tfrac{1}{2}\cos t \qquad \text{a} \qquad ||\varphi_1'(t)|| = \sqrt{(-\tfrac{1}{2}\sin t)^2 + \tfrac{1}{4}\cos^2 t} = \tfrac{1}{2}.$$

Parametrizace má orientaci souhlasnou se zvolenou orientací. Takže

$$\int\limits_{\mathcal{C}_1} \sqrt{x^2+y^2}\ ds = \int\limits_0^\pi \sqrt{x^2+y^2}_{|\varphi_1(t)} \cdot ||\varphi_1'(t)||\ dt = \int\limits_0^\pi \tfrac{1}{2}\sqrt{(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\cos t)^2 + (\tfrac{1}{2}\sin)^2 t}\ dt =$$

$$= \tfrac{\sqrt{2}}{4}\int\limits_0^\pi \sqrt{1+\cos t}\ dt = \left[\begin{smallmatrix} 2u=t \\ 2du=dt \end{smallmatrix}\right] = \tfrac{\sqrt{2}}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos(2u)}\ du =$$

$$= \left\{\cos(2u) = \cos^2 u - \sin^2 u\right\} = \tfrac{\sqrt{2}}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos u\ du = \tfrac{\sqrt{2}}{2}\ .$$

• parametrizace $\mathcal{C}_2$: $\varphi_2(t) = (0,0) + t(-1,2) = (-t, 2t), \quad t \in \langle 0, 1\rangle$

$$\varphi_2'(t) = (-1,2) \qquad \text{a} \qquad ||\varphi_2'(t)|| = \sqrt{(-1)^2+2^2} = \sqrt{5}.$$

Parametrizace má orientaci souhlasnou se zvolenou orientací. Takže

$$\int\limits_{\mathcal{C}_2} \sqrt{x^2+y^2}\ ds = \int\limits_0^1 \sqrt{x^2+y^2}_{|\varphi_2(t)} \cdot ||\varphi_2'(t)||\ dt = \int\limits_0^1 5t\ dt = \frac{5}{2}\ .$$

Celkem tedy máme

$$\int\limits_{\mathcal{C}} (x+y)\, ds = \sum_{i=1}^2 \int\limits_{\mathcal{C}_i} (x+y)\, ds = \frac{5+\sqrt{2}}{2}$$

**Připomenutí:** Integrál z vektorového pole $\vec{F}$ podél dané orientované křivky $\mathcal{C}$ počítáme jako práci síly podél této křivky s normovaným tečným polem $\vec{T}$ (jež určuje orientaci křivky $\mathcal{C}$).

Jestliže parametrizace $\varphi : \langle a, b\rangle \to \mathcal{C}$ odpovídá zvolené parametrizaci, pak máme

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{\mathcal{C}} (\vec{F} \cdot \vec{T}) ds = \int_a^b \vec{F}(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\ dt\ .$$

Pokud parametrizace $\varphi$ je v opačném směru než námi zvolená orientace $\mathcal{C}$, pak máme

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = -\int_a^b \vec{F}(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\ dt\ .$$

**12.2** (křivkový integrál z vektorového pole)

Určete

$$\int_{\mathcal{C}} y\ dx - x\ dy$$

kde $\mathcal{C}$ je asteroida určená parametrizací

$$\varphi : \quad x = a\cos^3 t \ \ \& \ \ y = a \sin^3 t \ \ \& \ \ 0 \le t \le 2\pi$$

s parametrem $a > 0$ a orientaci danou touto parametrizací. (Asteroida je křivka daná rovnicí $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$).

**Řešení:**

Rovnice asteroidy se podobá rovnici kružnice, až na jiné exponenty. Máme

$$\varphi'(t) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = \Big(-3a\cos^2 t \cdot \sin t,\ 3a \sin^2 t \cdot \cos t\Big)$$

a pole

$$\vec{F} = \Big(y,\ -x\Big).$$

Takže můžeme psát

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\ dt = \int_0^{2\pi} (a\sin^3 t, -a\cos^3 t) \cdot \begin{pmatrix} -3a\cos^2 t \cdot \sin t \\ 3a \sin^2 t \cdot \cos t \end{pmatrix}\ dt =$$

$$= -3a^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 t \sin^2 t\ (\sin^2 t + \cos^2 t)\ dt = -\frac{3}{4}a^2 \int_0^{2\pi} \sin^2(2t)\ dt = -\frac{3}{4}\pi a^2.$$

**12.3** (křivkový integrál z vektorového pole)

Určete

$$\int_{\mathcal{C}} 2xy\ dx - x^2\ dy$$

kde $\mathcal{C}$ se skládá postupně z křivek

- $\mathcal{C}_1$: úsečka jdoucí z bodu $(2, -1)$ do bodu $(0, 0)$;
- $\mathcal{C}_2$: část paraboly o rovnici $x = 2y^2$ jdoucí z bodu $(0, 0)$ do bodu $(2, 1)$.

**Řešení:**

Máme pole $\vec{F} = (2xy,\ -x^2)$.

- parametrizace $\mathcal{C}_1$: $\varphi_1(t) = (2,-1) + t(-2,1) = (\underbrace{2-2t}_{x}, \underbrace{t-1}_{y}), \quad t \in \langle 0, 1 \rangle$

$$\varphi_1'(t) = (-2,1)\ .$$

Parametrizace má orientaci souhlasnou se zvolenou orientací. Takže

$$\int_{\mathcal{C}_1} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_0^1 (2xy,\ -x^2)_{|_{\varphi_1(t)}} \cdot \varphi_1'(t)\ dt = \int_0^1 \Big( -4(t-1)^2,\ -4(t-1)^2 \Big) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\ dt =$$

$$= 4 \int_0^1 (t-1)^2\ dt = 4 \left[ \frac{(t-1)^3}{3} \right]_0^1 = \frac{4}{3}$$

- parametrizace $\mathcal{C}_2$: Křivku můžeme parametrizovat např. pomocí souřadnice $y$:

$$\varphi_2 : \quad x = 2t^2, \quad y = t \ \text{ pro } \ 0 \le t \le 1.$$

$$\varphi_2'(t) : \quad x'(t) = 4t, \quad y'(t) = 1\ .$$

Parametrizace má orientaci souhlasnou se zvolenou orientací. Takže

$$\int_{\mathcal{C}_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_0^1 (2xy,\ -x^2)_{|_{\varphi_2(t)}} \cdot \varphi_2'(t)\ dt = \int_0^1 \Big( 4t^3,\ -4t^4 \Big) \cdot \begin{pmatrix} 4t \\ 1 \end{pmatrix}\ dt = 12 \int_0^1 t^4\ dt = \frac{12}{5}$$

Celkem tedy máme

$$\int_{\mathcal{C}} (x+y)\, ds = \sum_{i=1}^{2} \int_{\mathcal{C}_i} (x+y)\, ds = \frac{4}{3} + \frac{12}{5} = \frac{56}{15}$$

**12.4** (křivkový integrál z vektorového pole)

Určete

$$\int_{\mathcal{C}} y\ dx + z\ dy + x\ dz$$

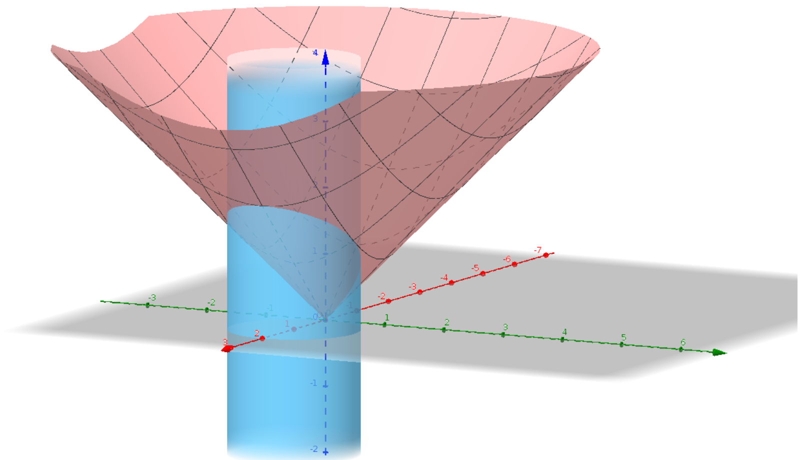
kde

$$\mathcal{C} : \quad x^2 + y^2 = z^2 \quad \& \quad x^2 + y^2 = 2x \quad \& \quad z \ge 0$$

je křivka s orientací v kladném smyslu při pohledu shora.

**Řešení:**

Máme pole $\vec{F} = (y,\ z,\ x)$. Rovnice $x^2 + y^2 = 2x$ je to samé jako $(x-1)^2 + y^2 = 1$ (což je válec). Křivka představuje tedy průnik kuželu s válcem jehož poloměr je 1 a osa kužele leží v plášti válce.



Parametrizaci uděláme pomocí obvyklých válcových souřadnic:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \\ z &= h \end{aligned}$$

Po dosazení do podmínek dostaneme

$$r^2 = h^2 \quad \& \quad r^2 = 2r\cos\varphi \quad \& \quad h \geq 0$$

které splníme (pro všechny možnosti) při volbě $r = 2\cos\varphi$, $h = r = 2\cos\varphi$ a $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ (pro lepší pochopení si křivku načrtněte). Tím dostaneme parametrizaci:

$$\mathcal{C}: \quad x(\varphi) = 2\cos^2\varphi\ , \quad y(\varphi) = 2\cos\varphi\sin\varphi\ , \quad z(\varphi) = 2\cos\varphi \quad \text{pro} \quad \varphi \in \langle -\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2} \rangle$$

která má požadovanou orientaci.

Opět můžeme využít formu, ve které byl integrál zadán:

$$\int_{\mathcal{C}} y\ dx + z\ dy + x\ dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Big( y(\varphi)\cdot\frac{dx}{d\varphi} + z(\varphi)\cdot\frac{dy}{d\varphi} + x(\varphi)\cdot\frac{dz}{d\varphi} \Big)\ d\varphi =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Big( -2\cdot \underbrace{4\sin^2\varphi\cdot\cos^2\varphi}_{=\sin^2(2\varphi)=\frac{1-\cos(4\varphi)}{2}} + 4\cos\varphi\cdot(\underbrace{\cos^2\varphi - \sin^2\varphi}_{=1-2\sin^2\varphi}) - 4\underbrace{\cos^2\varphi\cdot\sin\varphi}_{\text{lichá funkce}} \Big)\ d\varphi =$$

$$= -2\Big[\tfrac{\varphi}{2} - \tfrac{1}{8}\sin(4\varphi)\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + 4\Big[\sin\varphi - \tfrac{2}{3}\sin^3\varphi\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + 0 = \frac{8}{3} - \pi\ .$$

Jiná parametrizace pomocí posunutých válcových souřadnic:

$$\begin{aligned} x &= 1 + r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \\ z &= h \end{aligned}$$

Po dosazení do podmínek dostaneme

$$|h| = \sqrt{2r}\sqrt{1+\cos\varphi} \quad \& \quad r^2 = 1 \quad \& \quad h \geq 0$$

které splníme (pro všechny možnosti) při volbě $r = 1$, $h = \sqrt{2}\sqrt{1+\cos\varphi} = 2|\cos\frac{\varphi}{2}|$ a $-\pi \le \varphi \le \pi$. Tím dostaneme parametrizaci:

$$\mathcal{C}: \quad x(\varphi) = 1 + \cos\varphi\ , \quad y(\varphi) = \sin\varphi\ , \quad z(\varphi) = 2\cos\tfrac{\varphi}{2} \quad \text{pro} \quad \varphi \in \langle -\pi, \pi \rangle$$

která má požadovanou orientaci.

Nyní máme:

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F}\, d\vec{s} = \int_{-\pi}^{\pi} \Big( y(\varphi),\ z(\varphi),\ x(\varphi) \Big) \cdot \begin{pmatrix} x'(\varphi) \\ y'(\varphi) \\ z'(\varphi) \end{pmatrix} d\varphi =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \Big( \sin\varphi,\ 2\cos\tfrac{\varphi}{2},\ 1+\cos\varphi \Big) \cdot \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ -\sin\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix} d\varphi =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} -\sin^2\varphi + \underbrace{2\cos\frac{\varphi}{2}\cdot\cos\varphi}_{\cos(\frac{\varphi}{2}+\varphi)+\cos(\frac{\varphi}{2}-\varphi)} - \sin\frac{\varphi}{2} - \underbrace{\cos\varphi\cdot\sin\frac{\varphi}{2}}_{\frac{1}{2}\sin(\varphi+\frac{\varphi}{2})-\frac{1}{2}\sin(\varphi-\frac{\varphi}{2})} \quad d\varphi =$$

$$= -\pi + \Big[ \tfrac{2}{3}\sin(\tfrac{3}{2}\varphi) + 2\sin(\tfrac{\varphi}{2}) + 2\cos(\tfrac{\varphi}{2}) + \tfrac{1}{3}\cos(\tfrac{3}{2}\varphi) - \cos(\tfrac{\varphi}{2}) \Big]_{-\pi}^{\pi} = \frac{8}{3} - \pi\ .$$

**Poznámka:** Použili jsme vzorce

$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$$
$$\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y$$

a tedy

$$\cos x\cos y = \frac{1}{2}\Big( \cos(x+y) + \cos(x-y) \Big)$$

a

$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$$
$$\sin(x-y) = \sin x\cos y - \cos x\sin y$$

a tedy

$$\cos x\sin y = \frac{1}{2}\Big( \sin(x+y) - \sin(x-y) \Big)\ .$$

**12.5** (křivkový integrál z vektorového pole)

Určete

$$\int_{\mathcal{C}} (y^2+1)\ dx + 2z\ dy + x^2\ dz$$

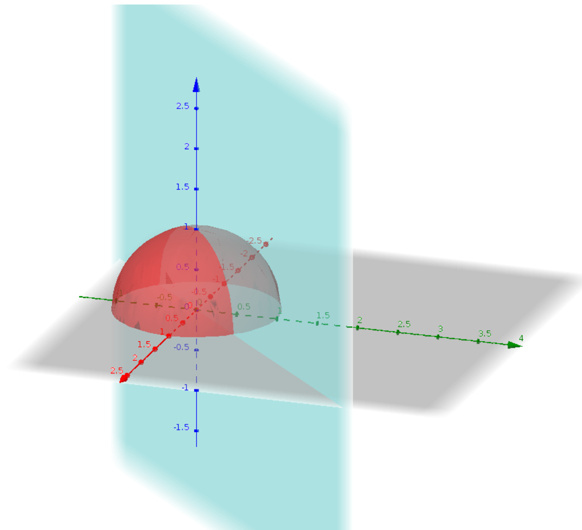
kde

$$\mathcal{C}: \quad x^2+y^2+z^2 = 1 \quad \& \quad x = y \quad \& \quad z \ge 0$$

je křivka s orientací od bodu $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ do bodu $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$.

**Řešení:**

Máme pole $\vec{F} = (y^2+1,\ 2z,\ x^2)$. Křivka představuje průnik horní části sféry a roviny kolmé k základně. Je to tedy polovina kružnice.



Ukážeme si na ní, jak můžeme využívat známých transformací souřadnic pro nalezení parametrizaci křivek.

Vzhledem k rovnicím určujícím naší křivku $\mathcal{C}$ můžeme dobře využít sférické souřadnice

$$\begin{aligned} x &= r \sin\vartheta \cos\varphi \\ y &= r \sin\vartheta \sin\varphi \\ z &= r \cos\vartheta \end{aligned}$$

Po dosazení do vztahu pro $\mathcal{C}$ dostaneme

$$r^2 = 1 \quad \& \quad r\sin\vartheta(\cos\varphi - \sin\varphi) = 0 \quad \& \quad r\cos\vartheta \geq 0$$

Vzhledem ke geometrickému náhledu a těmto rovnicím si vezmeme tuto volbu pro jednotlivé parametry:

$$r = 1 \quad \& \quad \varphi = \frac{\pi}{4} \quad \& \quad -\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$$

Může se zdát zvláštní brát si úhel $\vartheta$ i pro záporné hodnoty, ale vzhledem k tomu, že se měří od kladné části osy $z$ a úhel $\varphi$ máme teď pevně zvolený, to je v pořádku. Dostáváme tak parametrizaci:

$$\mathcal{C}: \quad x(\vartheta) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\vartheta \;, \quad y(\vartheta) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\vartheta \;, \quad z(\vartheta) = \cos\vartheta \quad \text{pro} \quad \vartheta \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$$

kterou bychom mohli koneckonců snadno dostat i z geometrického náhledu nebo při dosazení $x = y$ do rovnice $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (tj. zparametrizováním elipsy $2y^2 + z^2 = 1$). Tato parametrizace odpovídá i zvolené orientaci $\mathcal{C}$.

Pro výpočet opět můžeme využít formu, ve které byl integrál zadán:

$$\int_{\mathcal{C}} (y^2+1)\;dx + 2z\;dy + x^2\;dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( (y^2(\vartheta)+1) \cdot \frac{dx}{d\vartheta} + 2z(\vartheta) \cdot \frac{dy}{d\vartheta} + x^2(\vartheta) \cdot \frac{dz}{d\vartheta} \right) d\vartheta =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( (\tfrac{1}{2}\sin^2\vartheta + 1) \cdot \tfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\vartheta + 2\cos\vartheta \cdot \tfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\vartheta - \tfrac{1}{2}\sin^2\vartheta \cdot \sin\vartheta \right) d\vartheta =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\tfrac{1}{2}\sin^2\vartheta + 1)\cos\vartheta\;d\vartheta + \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\cos^2\vartheta}_{\frac{1+\cos(2\vartheta)}{2}}\;d\vartheta - \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sin^3\vartheta}_{\text{lichá funkce}}\;d\vartheta =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\tfrac{1}{6}\sin^3\vartheta + \sin\vartheta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \sqrt{2}\cdot\frac{\pi}{2} + 0 = \frac{7\sqrt{2}}{6} + \frac{\pi\sqrt{2}}{2}\ .$$

**12.6** (křivkový integrál z vektorového pole)

Určete

$$\int\limits_{\mathcal{C}} y\ dx + z\ dy + x\ dz$$

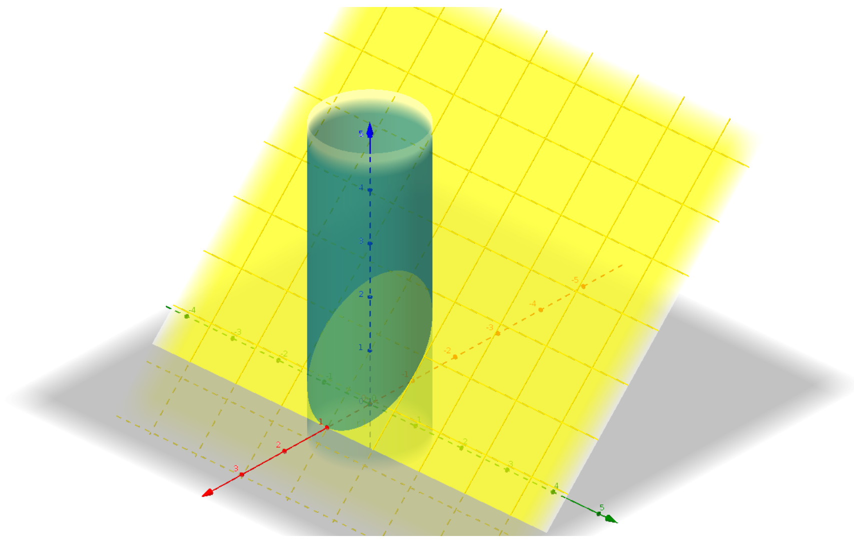
kde

$$\mathcal{C}:\quad x^2+y^2=1 \quad \& \quad x+z=1$$

je křivka s kladnou orientací při pohledu shora.

**Řešení:**

Máme pole $\vec{F} = (y,\ z,\ x)$. Křivka představuje průnik válce a šikmé roviny.



Je to tedy elipsa a její orientace je určena pomocí průmětu $\mathcal{C}$ do roviny $xy$, v němž má mít tento průmět kladnou orientaci (tím je myšleno to "při pohledu shora", tj. když se na křivku budeme dívat tak, aby osa $z$ směřovala k nám).

Průmět $\mathcal{C}$ do roviny $xy$ má rovnici $x^2+y^2=1$ a jeho kladná orientace je určena obvyklou parametrizaci

$$x(t) = \cos t\ ,\quad y(t) = \sin t \quad \text{pro} \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle\ .$$

Tím je určena i poslední složka, tj.

$$z(t) = 1 - x(t) = 1 - \cos t\ .$$

Pro parametrizaci jsme zde vlastně využili válcové souřadnice, které po dosazení do rovnosti určujících $\mathcal{C}$ poskytnou vztahy mezi jednotlivými parametry (výsledkem musí být jen jeden volný parametr, protože křivka je jednodimenzionální objekt).

Pro výpočet můžeme využít také formu, ve které je integrál zadán:

$$\int\limits_{\mathcal{C}} y\ dx + z\ dy + x\ dz = \int\limits_0^{2\pi} \left( y(t)\cdot\frac{dx}{dt} + z(t)\cdot\frac{dy}{dt} + x(t)\cdot\frac{dz}{dt} \right)\ dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \Big( \sin t \cdot (-\sin t) + (1-\cos t)\cdot \cos t + \cos t \cdot \sin t \Big)\ dt = \int_0^{2\pi} (-1 + \cos t + \cos t \cdot \sin t)\ dt =$$

$$= -2\pi + \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos t\ dt}_{=0} + \underbrace{\int_0^{2\pi} \frac{\sin(2t)}{2}\ dt}_{=0} = -2\pi\ .$$

**12.7** (křivkový integrál z vektorového pole)

Určete

$$\int_{\mathcal{C}} y^2\ dx + z^2\ dy + x^2\ dz$$

kde

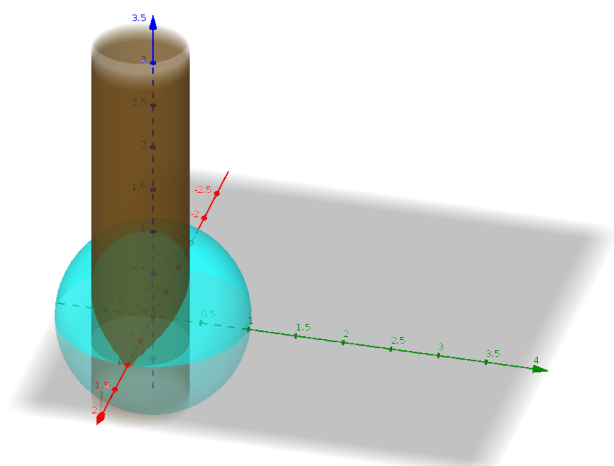
$$\mathcal{C}: \quad x^2+y^2+z^2 = 1 \quad \& \quad x^2+y^2 = x \quad \& \quad z \geq 0$$

je tzv. *Vivianiho* křivka (přesněji, jedna její část) s orientací v kladném smyslu při pohledu shora.

**Řešení:**

Máme pole $\vec{F} = (y^2,\ z^2,\ x^2)$. Rovnice $x^2+y^2 = x$ je to samé jako $(x-\frac{1}{2})^2 + y^2 = (\frac{1}{2})^2$ (což je válec).

Křivka představuje tedy průnik horní části sféry (o poloměru 1) s válcem jehož poloměr je $\frac{1}{2}$ a osa sféry leží v plášti válce.



Parametrizací můžeme udělat vícero způsoby:

- pomocí obvyklých válcových souřadnic:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \\ z &= h \end{aligned}$$

Po dosazení do podmínek dostaneme

$$r^2 + h^2 = 1 \quad \& \quad r^2 = r\cos\varphi \quad \& \quad h \geq 0$$

které splníme (pro všechny možnosti) při volbě $r = \cos\varphi$, $h = |\sin\varphi|$ a $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ (pro lepší pochopení si křivku načrtněte). Tím dostaneme parametrizaci:

$$\mathcal{C}: \quad x(\varphi) = \cos^2\varphi\ , \quad y(\varphi) = \cos\varphi\sin\varphi\ , \quad z(\varphi) = |\sin\varphi| \quad \text{pro} \quad \varphi \in \langle -\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\rangle$$

která má požadovanou orientaci.

- pomocí posunutých válcových souřadnic (do osy výše zmíněného válce):

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{2} + r\cos\alpha \\ y &= r\sin\alpha \\ z &= h \end{aligned}$$

Po dosazení do podmínek dostaneme

$$\frac{1}{4} + r\cos\alpha + r^2 + h^2 = 1 \quad \& \quad r^2 = (\tfrac{1}{2})^2 \quad \& \quad h \geq 0$$

které splníme (pro všechny možnosti) při volbě $r = \frac{1}{2}$, $h = \sqrt{\frac{1-\cos(2\cdot\frac{\alpha}{2})}{2}} = \sqrt{\sin^2(\frac{\alpha}{2})} = \sin(\frac{\alpha}{2})$ a $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ (pro lepší pochopení si křivku načrtněte). Tím dostaneme parametrizaci:

$$\mathcal{C}: \quad x(\alpha) = \tfrac{1}{2}(1+\cos\alpha)\ , \quad y(\alpha) = \tfrac{1}{2}\sin\alpha\ , \quad z(\alpha) = \sin(\tfrac{\alpha}{2}) \quad \text{pro} \quad \alpha \in \langle 0, 2\pi\rangle$$

která má požadovanou orientaci.

Pro výpočet zvolíme třeba tu druhou parametrizaci. Opět můžeme využít formu, ve které byl integrál zadán:

$$\int_{\mathcal{C}} y^2\ dx + z^2\ dy + x^2\ dz = \int_0^{2\pi} \Big(y^2(\alpha)\cdot\frac{dx}{d\alpha} + z^2(\alpha)\cdot\frac{dy}{d\alpha} + x^2(\alpha)\cdot\frac{dz}{d\alpha}\Big)\ d\alpha =$$

$$= \int_0^{2\pi} \Big(-\tfrac{1}{8}\sin^2\alpha\cdot\sin\alpha + \tfrac{1}{2}\sin^2(\tfrac{\alpha}{2})\cdot\cos\alpha + \tfrac{1}{8}(1+\cos\alpha)^2\cdot\cos(\tfrac{\alpha}{2})\Big)\ d\alpha =$$

$$= -\tfrac{1}{8}\int_0^{2\pi}(1-\cos^2\alpha)\cdot\sin\alpha\ d\alpha + \int_0^{2\pi}\tfrac{1}{2}\sin^2(\tfrac{\alpha}{2})\cdot\cos\alpha + \tfrac{1}{8}(1+\cos\alpha)^2\cdot\cos(\tfrac{\alpha}{2})\ d\alpha =$$

$$= \tfrac{1}{8}\Big[\cos\alpha - \tfrac{1}{3}\cos^3\alpha\Big]_0^{2\pi} + \left\{\begin{array}{c}\text{substituce:}\\ 2t = \alpha \\ 2dt = d\alpha\end{array}\right\} =$$

$$= 0 + \int_0^{\pi} \underbrace{\sin^2 t\cdot\cos(2t)}_{(1-\cos^2\alpha)(2\cos^2\alpha-1)} + \underbrace{\big(\tfrac{1+\cos(2t)}{2}\big)^2}_{(\cos^2 t)^2}\cdot\cos t\ dt = \int_0^{\pi}\cos^5\alpha - 2\cos^4\alpha + 3\cos^2\alpha - 1\ dt =$$

$$= \{\text{viz níže}\} = \frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot 0 + (-2)\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\pi + 3\cdot\frac{1}{2}\cdot\pi - \pi = -\frac{\pi}{4}\ .$$

Kde jsme pro $n \geq 2$ spočítali integrály

$$A_n := \int_0^\pi \cos t \cdot \cos^{n-1} t \; dt = \Big[ \sin t \cdot \cos^{n-1} t \Big]_0^\pi + \int_0^\pi (n-1) \cos^{n-2} t \cdot \sin^2 t \; dt =$$

$$= (n-1) \int_0^\pi \cos^{n-2} t \cdot (1 - \cos^2 t) \; dt = (n-1) A_{n-2} - (n-1) A_n.$$

Tedy máme $A_n = \frac{n-1}{n} A_{n-2}$ a $A_1 = 0$ a $A_0 = \pi$. Neboli, pro liché $n$ je $\int_0^\pi \cos^n t \; dt = 0$, což je vidět i z grafu funkce.