13. cvičení z Matematické analýzy 2

12. - 16. prosince 2022

Definice konzervativního pole: Spojité vektorové pole $\vec{F}$ na otevřené množině $U \subseteq \mathbb{R}^n$ nazýváme *konzervativní*, pokud práce síly z bodu A do bodu B (v případě že dané body lze propojit alespoň jednou křivkou ležící v U) nezávisí na způsobu, jakým oba body propojíme (na bodech A a B ale záviset může). V tom případě pro tuto práci volíme značení $\int_A^B \vec{F}\, d\vec{s}$.

Věta (o potenciálu): Následující podmínky jsou ekvivalentní pro spojité vektorové pole $\vec{F}$ na otevřené množině $U \subseteq \mathbb{R}^n$:

- pole $\vec{F}$ je konzervativní na U,
- práce pole $\vec{F}$ podél jakékoliv uzavřené křivky $\mathcal{C} \subseteq U$ je nulová,
- existuje funkce (tzv. *potenciál*) $f : U \to \mathbb{R}$, že $\operatorname{grad}(f) = \vec{F}$.

Pak platí, že

$$\int_A^B \vec{F}\, d\vec{s} = \int_A^B \operatorname{grad}(f)\, d\vec{s} = f(B) - f(A)\ .$$

Definujme si tzv. rotaci pole jako

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z},\ \ -\frac{\partial F_3}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial z},\ \ \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

kde $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ je formálně definovaný vektor složený z operátorů parciálních derivací.

Věta: Pro spojitě diferencovatelné vektorové pole $\vec{F}$ na otevřené množině $U \subseteq \mathbb{R}^3$ (tj. v dimenzi 3) platí:

- $\vec{F}$ je konzervativní $\Rightarrow \operatorname{rot}(\vec{F}) = \vec{0}$
  (podmínka $\operatorname{rot}(\vec{F}) = \vec{0}$ vlastně znamená záměnnost druhých parciálních derivací potenciálu f)
- Jestliže množina U je *jednoduše souvislá* a $\operatorname{rot}(\vec{F}) = \vec{0}$ (všude na U), pak $\vec{F}$ je konzervativní.

Definice jednoduše souvislé množiny: Množina $U \subseteq \mathbb{R}^n$ se nazývá jednoduše souvislá, jestliže se jakákoliv uzavřená křivka v U dá v rámci U spojitě stáhnout do bodu.

Příkladem jednoduše souvislé množiny je $\mathbb{R}^n$ nebo $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.
Příkladem otevřené množiny, která není jednoduše souvislá je $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $\mathbb{R}^3 \setminus$ "přímka" nebo torus (tj. "pneumatika").

Poznámka: Nulová rotace je obecně opravdu jen nutnou podmínkou pro existenci potenciálu, jak ukazuje příklad vektorového pole

$$\vec{F} = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0 \right)$$

na množině $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \neq 0\}$, která není jednoduše souvislá.
Máme

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) = \left(0, 0, -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} + \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \right) = \vec{0}$$

ale práce síly $\vec{F}$ podél kružnice $\Gamma : \varphi(\alpha) = (\cos\alpha, \sin\alpha, 0)$, $\alpha \in \langle 0, 2\pi \rangle$ je nenulová:

$$\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} (-\sin\alpha, \cos\alpha, 0) \cdot \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix} d\alpha = \int_0^{2\pi} 1\ d\alpha = 2\pi.$$

Pole tedy nemá potenciál na celém U. Na druhé straně, na určitých podmnožinách U lze potenciál pole $\vec{F}$ nalézt, např.

$$f_1(x,y,z) = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) \qquad \text{na} \qquad U_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \neq 0\}$$

nebo

$$f_2(x,y,z) = \operatorname{arccotg}\left(\frac{x}{y}\right) \qquad \text{na} \qquad U_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y \neq 0\}.$$

13.1 (konzervativní pole, potenciál)

Určete hodnotu parametru α tak, aby následující pole byla konzervativní. Najděte jejich potenciál a hodnotu práce síly z bodu A do B.

(i) $\vec{F}(x,y,z) = (x^2+y, \quad y^2+\alpha x, \quad ze^z)$, $A=(0,1,0)$, $B=(-1,1,0)$.

(ii) $\vec{F}(x,y,z) = (y+z, \quad x+z, \quad x+\alpha y)$, $A=(0,0,0)$, $B=(1,1,1)$.

(iii) $\vec{F}(x,y,z) = \left(\frac{\alpha}{z}, \quad -\frac{3}{z}, \quad \frac{3y-x}{z^2}\right)$, $A=(1,0,1)$, $B=(-1,1,2)$.

Řešení:

(i) Po dosazení máme

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) = (0-0, \quad 0-0, \quad \alpha-1)\,,$$

tedy rotace je nulová na celém $\mathbb{R}^3$ právě když $\alpha = 1$ a pole $\vec{F}$ pak má potenciál. Počítání rotace pole nám tedy sice rozhodne o existenci potenciálu, ale neurčí jeho tvar. Ten musíme zjistit dalším výpočtem, jehož postup v sobě také zahrnuje (případné) zjištění neexistence potenciálu (viz dále). Pokud nás tedy zajímá pouze (ne)existence potenciálu, je jednodušší a rychlejší spočítat rotaci a pokud chceme přímo potenciál najít, použijeme následující postup a v tom případě je počítání rotace zbytečné.

Potenciál je funkce $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ taková, že

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x^2 + y \tag{1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = y^2 + \alpha x \tag{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = ze^z\,. \tag{3}$$

Z první rovnice dostaneme

$$f(x,y,z) = \int (x^2+y)\ dx = \frac{x^3}{3} + xy + C(y,z),$$

kde $C : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je neznámá funkce závislá nyní pouze na y a z. Nalezený tvar funkce f teď dosadíme do druhé rovnice

$$y^2 + \alpha x = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^3}{3} + xy + C(y,z)\right) = x + \frac{\partial C}{\partial y}$$

tedy

$$\frac{\partial C}{\partial y}(y,z) = y^2 + (\alpha-1)x.$$

Levá strana rovnice nezávisí na proměnné x, tedy i pravá strana na ní nesmí záviset, takže musí být $\alpha = 1$. Pak máme

$$\frac{\partial C}{\partial y}(y,z) = y^2.$$

Dostáváme $C(y,z) = \int y^2\ dy = \frac{y^3}{3} + D(z)$, kde $D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je opět neznámá funkce závislá pouze na z. Zatím tedy máme

$$f(x,y,z) = \frac{x^3}{3} + xy + \frac{y^3}{3} + D(z)$$

a dosazením do poslední rovnice máme

$$ze^z = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x^3}{3} + xy + \frac{y^3}{3} + D(z)\right) = \frac{\partial D}{\partial z}.$$

Takže $D(z) = \int ze^z\ dz = (z-1)e^z + K$, kde $K \in \mathbb{R}$ je konstanta. Celkově tak máme potenciál

$$f(x,y,z) = \frac{x^3}{3} + xy + \frac{y^3}{3} + (z-1)e^z + K.$$

Práce pole pak je

$$\int_A^B \vec{F}\ d\vec{s} = f(B) - f(A) = f(-1,1,0) - f(0,1,0) = -2 - \Big(-\frac{2}{3}\Big) = -\frac{4}{3}\ .$$

- -

(ii) Pokud se nám podaří najít potenciál, nepotřebujeme počítat rotaci. A naopak, jestliže rovnice pro potenciál nebudou řešitelné, tak pole nemůže být konzervativní.

Pro potenciál f máme

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y + z \tag{4}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x + z \tag{5}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = x + \alpha y \quad . \tag{6}$$

Z první rovnice máme:

$$f(x,y,z) = \int y + z\ dx = xy + xz + C(y,z),$$

kde $C : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je neznámá funkce závislá nyní pouze na y a z. Nalezený tvar funkce f teď dosadíme do druhé rovnice

$$x + z = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\Big(xy + xz + C(y,z)\Big) = x + \frac{\partial C}{\partial y}$$

tedy

$$\frac{\partial C}{\partial y} = z.$$

Dostáváme $C(y,z) = \int z\ dy = yz + D(z)$, kde $D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je opět neznámá funkce závislá pouze na z. Dostáváme tedy zatím

$$f(x,y,z) = xy + xz + yz + D(z)$$

a dosazením do poslední rovnice máme

$$x + \alpha y = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\Big(xy + xz + yz + D(z)\Big) = x + y + \frac{\partial D}{\partial z}.$$

Takže $\frac{\partial D}{\partial z}(z) = (\alpha - 1)y$, a tudíž $\alpha = 1$, jinak by pravá strana závisela na y, zatímco levá ne. Dále máme $\frac{\partial D}{\partial z} = 0$ a tedy $D(z) = K$, kde $K \in \mathbb{R}$ je konstanta. Celkově tak máme potenciál pouze pro $\alpha = 1$ a to

$$f(x,y,z) = xy + xz + yz + K.$$

Práce pole pak je

$$\int_A^B \vec{F}\ d\vec{s} = f(B) - f(A) = f(1,1,1) - f(0,0,0) = 3 - 0 = 3\ .$$

- -

(iii) Zde je podstatné podívat se na definiční obor:

$$D(\vec{F}): \quad z \neq 0$$

Znamená to, že po vyjmutí roviny z $\mathbb{R}^3$ vzniknou dva poloprostory, které navzájem nejdou propojit křivkou.

Pokud se nám podaří najít potenciál, nepotřebujeme počítat rotaci.

Pro potenciál f musí platit

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\alpha}{z} \tag{7}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{3}{z} \tag{8}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{3y - x}{z^2} \quad . \tag{9}$$

Začneme třeba první rovnici:

$$f(x, y, z) = \int \frac{\alpha}{z}\, dx = \frac{\alpha x}{z} + C(y, z),$$

kde $C : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je neznámá funkce závislá nyní pouze na y a z. Nalezený tvar funkce f teď dosadíme do druhé rovnice

$$-\frac{3}{z} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\alpha x}{z} + C(y, z)\right) = \frac{\partial C}{\partial y}$$

tedy

$$\frac{\partial C}{\partial y} = -\frac{3}{z}.$$

Dostáváme $C(y, z) = \int -\frac{3}{z}\, dy = -\frac{3y}{z} + D(z)$, kde $D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je opět neznámá funkce závislá pouze na z. Dostáváme tedy zatím

$$f(x, y, z) = \frac{\alpha x - 3y}{z} + D(z)$$

a dosazením do poslední rovnice máme

$$\frac{3y - x}{z^2} = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\alpha x - 3y}{z} + D(z)\right) = -\frac{\alpha x - 3y}{z^2} + \frac{\partial D}{\partial z}.$$

Takže

$$\frac{\partial D}{\partial z}(z) = \frac{(\alpha - 1)x}{z^2}$$

Levá strana rovnice nezávisí na proměnné x a y, tedy i pravá strana na nich nesmí záviset, takže musí být $\alpha = 1$. Pak máme

$$\frac{\partial D}{\partial z}(z) = 0$$

a tedy $D(z) = K$, kde $K \in \mathbb{R}$ je konstanta. Celkově tak máme potenciál

$$f(x, y, z) = \frac{x - 3y}{z} + K.$$

Teď určíme práci pole: Nejdříve zkontrolujeme, jestli body $A = (-1, 1, 2)$ a $B = (1, 0, 1)$ vůbec lze propojit křivkou, tj. jestli leží ve stejném poloprostoru. Ty jsou určeny pomocí hodnoty z, tedy jako

$$P_+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0\}$$

$$P_- = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z < 0\}$$

Zřejmě máme $A, B \in P_+$ a proto má smysl ptát se na práci pole z A do B:

$$\int_A^B \vec{F}\, d\vec{s} = f(B) - f(A) = f(-1,1,2) - f(1,0,1) = 2 - 1 = 1\ .$$

Připomenutí: Integrál z funkce $f : M \to \mathbb{R}$ je určený jako

$$\iint_M f\ dS = \iint_U f(\Phi(u,v)) \cdot \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\|\ dS\ ,$$

kde $\Phi : U \to M$ je vhodná parametrizace.

13.2 (plošný integrál z funkce)
Spočítejte

(i)

$$\iint_M z^2\ dS,$$

kde M je částí válce $x^2 + y^2 = 1$ mezi rovinami $z = 0$ a $z = x + 1$.

(ii)

$$\iint_M z\ dS,$$

kde M je částí válce $x^2 + y^2 = 2$ vymezená rovinou $z = 0$ a plochou $z = x^2 + (y-1)^2$.

(iii)

$$\iint_M x^2 z + y^2 z\ dS,$$

kde M je povrch polokoule $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \geq 0$.

Řešení:
(i) Plocha je určena jako

$$M : \quad x^2 + y^2 = 1 \quad \& \quad 0 \leq z \leq x + 1.$$

Její parametrizaci vytvoříme pomocí cylindrických souřadnic jako

$$\Phi(\varphi, z) = (\cos\varphi, \sin\varphi, z)$$

s definičním oborem

$$U : \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad \& \quad 0 \leq z \leq 1 + \cos\varphi.$$

Máme

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} &= (-\sin\varphi, \quad \cos\varphi, \quad 0) \\
\frac{\partial \Phi}{\partial z} &= (\quad 0, \quad 0, \quad 1) \\
\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \Phi}{\partial z} &= (\cos\varphi, \quad \sin\varphi, \quad 0)
\end{aligned}$$

$$\left\| \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right\| = 1.$$

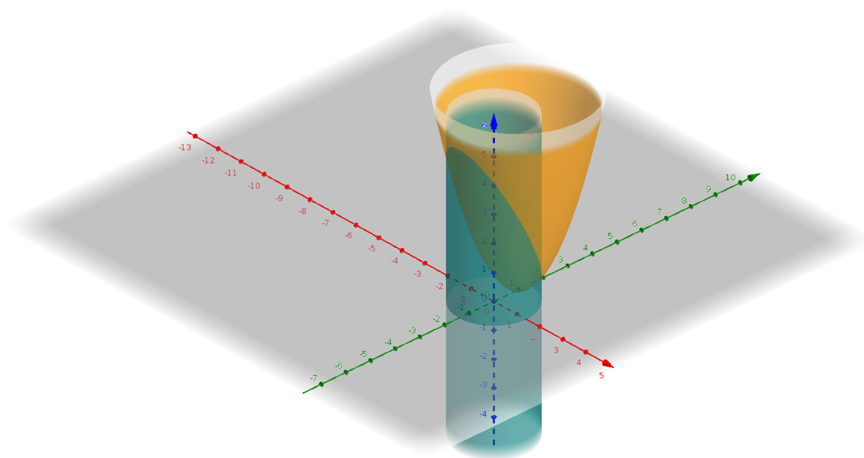
Takže pro funkci $f(x,y,z) = z^2$ máme

$$\iint_M f\, dS = \iint_U z^2\, dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{1+\cos\varphi} z^2\, dz\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{(1+\cos\varphi)^3}{3}\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{3} + \cos\varphi + \cos^2\varphi + \frac{\cos^3\varphi}{3} \right) d\varphi =$$

$$= \frac{2}{3}\pi + 0 + \pi + 0 = \frac{5}{3}\pi.$$

(ii) Plocha je určena jako

$$M: \quad x^2 + y^2 = 1 \quad \& \quad 0 \le z \le x^2 + (y-1)^2.$$



Její parametrizaci vytvoříme pomocí cylindrických souřadnic

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \\ z &= h \end{aligned}$$

kde po dosazení z první podmínky dostaneme $r^2 = 2$ a po dosazeni $r = \sqrt{2}$ z druhé podmínky pak

$$0 \le h \le (\sqrt{2}\cos\varphi)^2 + (\sqrt{2}\sin\varphi - 1)^2 = 3 - 2\sqrt{2}\sin\varphi$$

Tím dostaneme předpis

$$\Phi(\varphi, h) = (\sqrt{2}\cos\varphi, \sqrt{2}\sin\varphi, h)$$

s definičním oborem

$$U: \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \quad \& \quad 0 \le h \le 3 - 2\sqrt{2}\sin\varphi.$$

Dále je

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial \Phi}{\partial \varphi} &= (-\sqrt{2}\sin\varphi, \quad \sqrt{2}\cos\varphi, \quad 0) \\ \tfrac{\partial \Phi}{\partial h} &= (\qquad 0, \qquad 0, \quad 1) \\ \tfrac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \times \tfrac{\partial \Phi}{\partial h} &= (\ \sqrt{2}\cos\varphi, \quad \sqrt{2}\sin\varphi, \quad 0) \end{aligned}$$

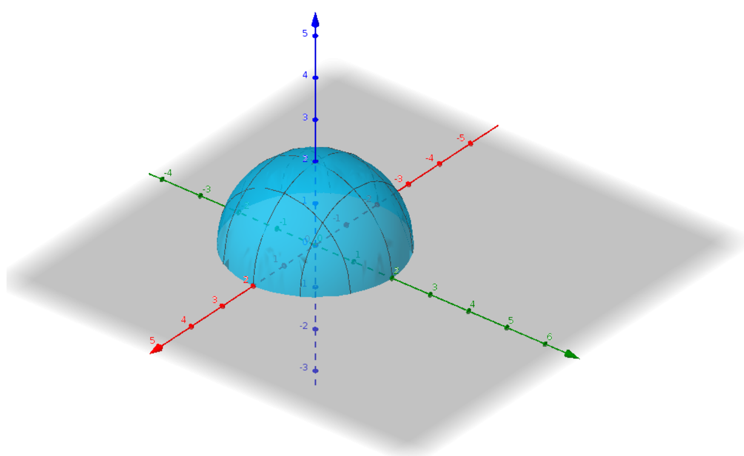
$$\left\| \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \Phi}{\partial h} \right\| = \sqrt{2}.$$

Takže pro funkci $f(x, y, z) = z$ máme

$$\iint\limits_M f \; dS = \iint\limits_U z \; dS = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{3-2\sqrt{2}\sin\varphi} h \cdot \sqrt{2} \; dh \; d\varphi = \sqrt{2} \int\limits_0^{2\pi} \frac{(3 - 2\sqrt{2}\sin\varphi)^2}{2} \; d\varphi =$$

$$= \sqrt{2} \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{9}{2} - 6\sqrt{2}\sin\varphi + 4\sin^2\varphi \right) \; d\varphi = \sqrt{2}(9\pi + 0 + 4\pi) = 13\sqrt{2}\pi.$$

(iii) Plocha $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 4 \; \& \; z \geq 0\}$ je polovina sféry.



Zparametrizujeme ji pomocí sférických souřadnic jako

$$\Phi(\varphi, \vartheta) = (2\sin\vartheta\cos\varphi, \quad 2\sin\vartheta\sin\varphi, \quad 2\cos\vartheta)$$

s definičním oborem

$$U: \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad \& \quad 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Dále máme

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = (-2\sin\vartheta\sin\varphi, \quad 2\sin\vartheta\cos\varphi, \quad 0 \quad)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} = (\quad 2\cos\vartheta\cos\varphi, \quad 2\cos\vartheta\sin\varphi, \quad -2\sin\vartheta).$$

Výpočet normy vektorového součinu si zjednodušíme tím, že si všimneme, že dané vektory jsou na sebe kolmé, tj. $\frac{\partial \Phi}{\partial u} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial v} = 0$. Pak je

$$\left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\| = \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right\| \cdot \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\| = 4|\sin\vartheta|.$$

Máme tedy

$$\iint_M x^2 z + y^2 z \; dS = \iint_U \left(8\sin^2\vartheta\cos\vartheta\right)\cdot 4|\sin\vartheta| \; dS = \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 32\sin^3\vartheta\cos\vartheta \; d\vartheta\right)\cdot\left(\int_0^{2\pi} 1 \; d\varphi\right) =$$

$$= 2\pi\Big[8\sin^4\vartheta\Big]_{\vartheta=0}^{\vartheta=\frac{\pi}{2}} = 16\pi.$$

Připomenutí: Tok vektorového pole $\vec{F}: M \to \mathbb{R}^3$ orientovanou plochou $M \subseteq \mathbb{R}^3$ se spočítá jako

$$\iint_M \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint_U \vec{F}(\Phi(u,v))\cdot\left(\frac{\partial\Phi}{\partial u}\times\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right) dS \;,$$

kde $\Phi : U \to M$ je opět vhodná parametrizace, $U \subseteq \mathbb{R}^2$, a orientace daná vektorovým polem $\frac{\partial\Phi}{\partial u}\times\frac{\partial\Phi}{\partial v}$ souhlasí se zadanou parametrizací plochy M. (Pokud by orientace nesouhlasila, stačí jen změnit pořadí ve vektorovém součinu, tj. změnit znaménko integrálu.)

13.3 (plošný integrál z vektorového pole - tok)
Spočítejte

$$\iint_M \vec{F}\cdot d\vec{S}$$

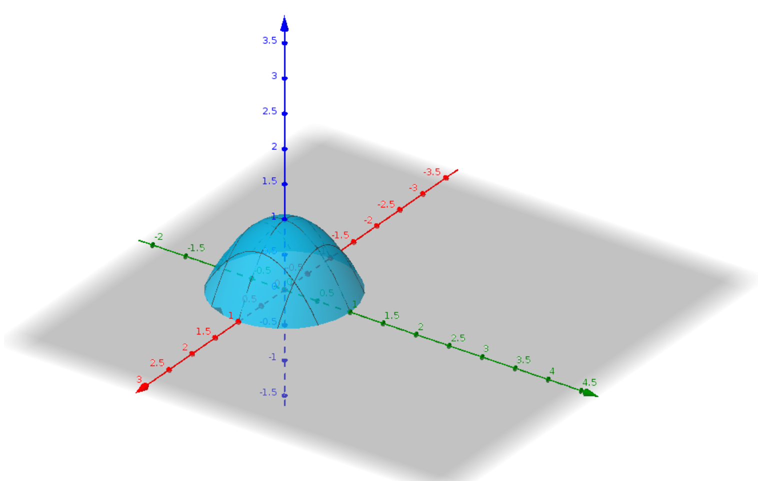
kde

(i) $\vec{F}(x,y,z) = (x,\; y,\; z)$ a M je část paraboloidu $z = 1 - x^2 - y^2$ pro $z \geq 0$ s orientací danou vektorovým polem směřujícím vzhůru.

(ii) $\vec{F}(x,y,z) = (0,\; x,\; -y)$ a M je částí sféry $x^2+y^2+z^2 = 1$, $0 \leq y$, $0 \leq z$ s horní orientací.

(iii) $\vec{F}(x,y,z) = (x,\; y^2,\; yz)$ a M je na plášti kuželu $x^2+y^2 = (z-1)^2$ pro $0 \leq z \leq 1$ s orientací danou vektorovým polem směřujícím vzhůru.

Řešení:
(i)



Plochu S zparametrizujeme přirozeně jako graf funkce:

$$\Phi(x,y) = \Big(x,\ y,\ 1-x^2-y^2\Big)$$

s definičním oborem

$$U: \quad x^2+y^2 \le 1.$$

Máme

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial\Phi}{\partial x} &= \big(1, \quad 0, \quad -2x\big) \\ \tfrac{\partial\Phi}{\partial y} &= \big(0, \quad 1, \quad -2y\big) \end{aligned}$$

a

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} \times \frac{\partial\Phi}{\partial y} = \big(2x, \quad 2y, \quad 1\big).$$

Třetí složka tohoto vektoru je kladná, takže toto pole je orientované v souhlase se zadáním. Takže máme

$$\iint\limits_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint\limits_U \vec{F}\big(\Phi(x,y)\big)\cdot\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\times\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) dS \ = \iint\limits_U (x,y,1-x^2-y^2)\cdot\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 1 \end{pmatrix} dS \ =$$

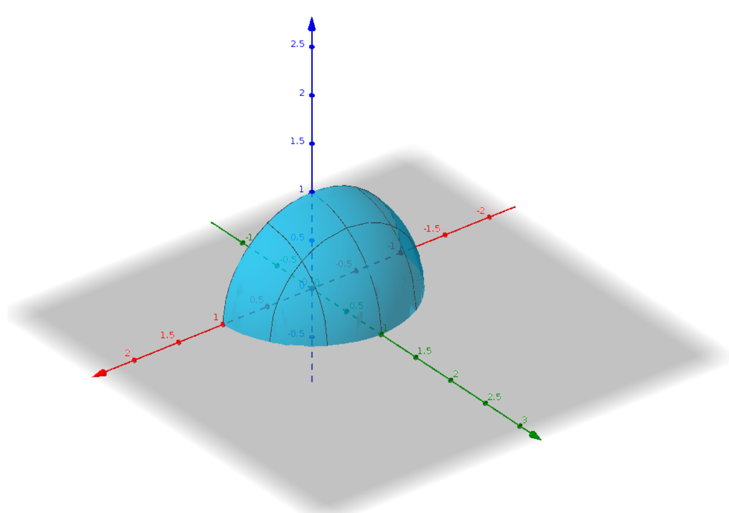
$$= \iint\limits_U (1+x^2+y^2)\ dS = \begin{bmatrix} \scriptstyle x=r\cos\varphi \\ \scriptstyle y=r\sin\varphi \\ \scriptstyle 0\le r\le 1 \\ \scriptstyle 0\le\varphi\le 2\pi \end{bmatrix} = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^1 (1+r^2)r\ drd\varphi = \left(\int\limits_0^1 (1+r^2)r\ dr\right)\cdot\left(\int\limits_0^{2\pi} 1\ d\varphi\right) =$$

$$= 2\pi\left[\frac{(1+r^2)^2}{4}\right]_{r=0}^{r=1} = 2\pi\cdot\frac{3}{4} = \frac{3}{2}\pi.$$

Poznámka: Ke zjištění hodnoty integrálu můžeme použít i Gaussovu větu (viz třeba příklad **14.12**), protože tok pole podstavou $x^2+y^2\le 1$, $z=0$ je v tomto případě nulový (neboť pole je rovnoběžné s podstavou).

- -

(ii)



Plochu M zparametrizujeme pomocí sférických souřadnic jako

$$\Phi(\varphi, \vartheta) = (\sin\vartheta\cos\varphi, \quad \sin\vartheta\sin\varphi, \quad \cos\vartheta)$$

s definičním oborem

$$U: \quad 0 \le \varphi \le \pi \quad \& \quad 0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}.$$

Máme

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial\Phi}{\partial\varphi} &= \big(\; -\sin\vartheta\sin\varphi, \quad \sin\vartheta\cos\varphi, \qquad 0 \quad \big) \\ \tfrac{\partial\Phi}{\partial\vartheta} &= \big(\quad \cos\vartheta\cos\varphi, \quad \cos\vartheta\sin\varphi, \quad -\sin\vartheta\big) \end{aligned}$$

a odsud je

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} \times \frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta} = \big(-\sin^2\vartheta\cos\varphi, \; -\sin^2\vartheta\sin\varphi, \; -\sin\vartheta\cos\vartheta\big).$$

Třetí složka tohoto vektoru je záporná (na vnitřku definičního oboru), takže toto pole je orientované opačně k zadání. Takže máme

$$\iint\limits_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = -\iint\limits_U \vec{F}\big(\Phi(\varphi,\vartheta)\big)\cdot\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\times\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta}\right) dS \; =$$

$$= -\iint\limits_U (0, \sin\vartheta\cos\varphi, -\sin\vartheta\sin\varphi)\cdot\begin{pmatrix} -\sin^2\vartheta\cos\varphi \\ -\sin^2\vartheta\sin\varphi \\ -\sin\vartheta\cos\vartheta \end{pmatrix} dS \; =$$

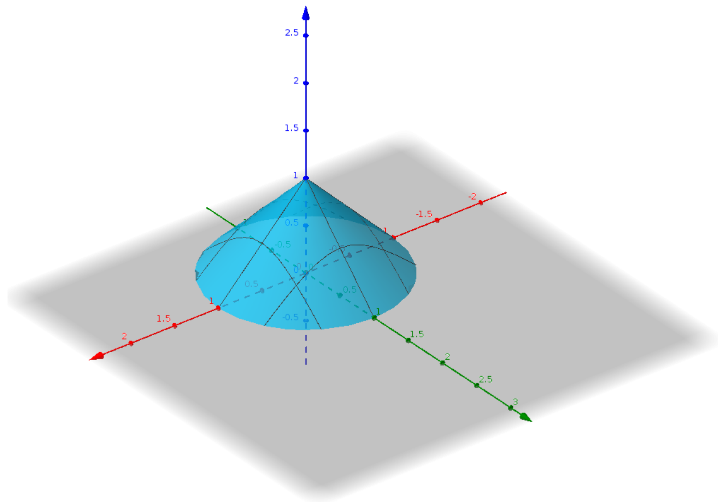
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\pi} \sin^3\vartheta\cdot(\sin\varphi\cos\varphi) - (\sin^2\vartheta\cos\vartheta)\cdot\sin\varphi \; d\vartheta \; d\varphi =$$

$$= \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2\vartheta)\sin\vartheta \; d\vartheta\right)\cdot\left(\underbrace{\int_0^{\pi} \frac{\sin(2\varphi)}{2} \; d\varphi}_{=0}\right) - \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\vartheta\cos\vartheta \; d\vartheta\right)\cdot\left(\int_0^{\pi} \sin\varphi \; d\varphi\right) =$$

$$= 0 - \left[\frac{\sin^3\vartheta}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot\Big[-\cos\varphi\Big]_0^{\pi} = -\frac{2}{3} \; .$$

- -

(iii) Plochu M je část kužele a je zadaná také jako graf funkce $z = 1 - \sqrt{x^2+y^2}$ pro $x^2+y^2 \le 1$.



Můžeme ji proto takto přirozeně zparametrizovat:

$$\Phi(x,y) = \Big(x,\ y,\ 1-\sqrt{x^2+y^2}\Big)$$

s definičním oborem

$$U: \quad x^2+y^2 \le 1.$$

Všimněme si, že v bodě $(0,0)$ nemá tato funkce derivaci (je to vrchol kužele). Ale protože jde jen o jeden bod, nemá to vliv na integrál.

Dále máme

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial\Phi}{\partial x} &= \big(1,\quad 0,\quad -\tfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\big) \\ \tfrac{\partial\Phi}{\partial y} &= \big(0,\quad 1,\quad -\tfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\big) \end{aligned}$$

a

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} \times \frac{\partial\Phi}{\partial y} = \Big(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad 1\Big).$$

Třetí složka tohoto vektoru je kladná, takže toto pole je orientované v souhlase se zadáním. Takže máme

$$\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint_U \vec{F}\big(\Phi(x,y)\big)\cdot\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\times\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) dS \ = \iint_U \big(x, y^2, y(1-\sqrt{x^2+y^2})\big)\cdot\begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 1 \end{pmatrix} dS \ =$$

$$= \iint_U \frac{x^2+y^3-y(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} + y\ dS = \iint_U \frac{x^2(1-y)}{\sqrt{x^2+y^2}} + y\ dS =$$

$$= \begin{bmatrix} \scriptstyle x=r\cos\varphi \\ \scriptstyle y=r\sin\varphi \\ \scriptstyle 0\le r\le 1 \\ \scriptstyle 0\le\varphi\le 2\pi \end{bmatrix} = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \Big(r\cos^2\varphi(1-r\sin\varphi)+r\sin\varphi\Big) r\ dr d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2\cos^2\varphi - r^3\cos^2\varphi\sin\varphi + r^2\sin\varphi\ dr d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\varphi+\sin\varphi}{3} - \frac{\cos^2\varphi\sin\varphi}{4}\ d\varphi =$$

$$= \frac{\pi}{3} + \left[\frac{\cos^3\varphi}{12}\right]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{3}\ .$$

Poznámka: Ke zjištění hodnoty integrálu můžeme použít i Gaussovu větu (viz třeba příklad **14.12**), protože tok pole podstavou $x^2+y^2 \le 1$, $z=0$ je v tomto případě nulový (neboť pole je rovnoběžné s podstavou).

Nechť $E \subseteq \mathbb{R}^2$ je oblast integrace, která je omezená, a nechť její hranice ∂E je tvořena uzavřenou křivkou $\mathcal{C}$, co sama sebe nikde neprotíná (tzv. jednoduchá uzavřená křivka). Nechť orientace křivky $\mathcal{C}$ je taková, že při jejím procházení máme v daném místě oblast E vždy po levé straně.

Podle **Greenovy věty** pro pole $\vec{F} = (F_1, F_2)$ máme

$$\int\limits_{\mathcal{C}=\partial E} \vec{F}\cdot d\vec{s} = \iint\limits_{E} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\ dS,$$

kde výraz na pravé straně si můžeme pamatovat jako $\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ F_1 & F_2 \end{vmatrix}$. Je to analogie rotace pole (jakéhosi "víru" v daném bodě) ve třech dimenzích. Interpretací Greenovy věty je to, že "víry" pole uvnitř oblasti se v sousedních bodech vyruší a zbyde jen "vír" na okraji oblasti.

Poznámka: Hranici E může být tvořena i z více uzavřených křivek, u kterých opět požadujeme, aby hranice ležela po jejich levé straně při procházení po směru dané křivky.

13.4 (Greenova věta)

Použijte Greenovu větu k nalezení práce síly $\vec{F}(x,y) = (2xy^3,\ 4x^2y^2)$ vykonané na částici podél křivky $\mathcal{C}$, která je hranicí oblasti M ohraničené křivkami $y=0$, $x=1$ a $y=x^3$ v prvním kvadrantu. Křivka $\mathcal{C}$ je orientována v kladném smyslu (tj. proti směru hodinových ručiček).

Řešení:

Máme tedy oblast

$$M: \quad 0 \le x \le 1 \quad \& \quad 0 \le y \le x^3.$$

Její hranicí je po částech diferencovatelná křivka, která má orientaci odpovídající použití Greenovy věty.

Dále je

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 8xy^2 - 6xy^2 = 2xy^2$$

a proto

$$\int\limits_{\mathcal{C}=\partial M} \vec{F}\cdot d\vec{s} = \iint\limits_{M} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\ dS = \iint\limits_{M} 2xy^2\ dS = \int_0^1\int_0^{x^3} 2xy^2\ dy\ dx = \int_0^1 \frac{2}{3}x^{10}\ dx = \frac{2}{33}.$$

13.5 (Greenova věta)

Pomocí Greenovy věty spočítejte

$$\int\limits_{\mathcal{C}} (3y - e^{\sin x})\,dx + (7x + \sqrt{y^4+1})\,dy$$

kde $\mathcal{C}$ je kladně orientovaná kružnice $x^2+y^2=9$.

Řešení:
Naše oblast M je kruh o poloměru 3

$$M : \quad x^2 + y^2 \le 3^2$$

a pole je

$$\vec{F}(x,y) = \left(3y - e^{\sin x},\ 7x + \sqrt{y^4+1}\right) .$$

Orientace křivky $\mathcal{C}$ je v souhlase s Greenovou větou. Můžeme proto psát (s využitím znalosti obsahu kruhu)

$$\int\limits_{\mathcal{C}=\partial M} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \iint\limits_M \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) \ dS = \iint\limits_M (7-3)\ dS = \iint\limits_M 4\ dS = 4 \cdot \pi \cdot 3^2 = 36\pi\ .$$

Je vidět, že původní křivkový integrál bychom těžko počítali, ale s využitím Greenovy věty je výpočet snadný.

Gaussova věta

$$\iint\limits_{\partial E} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint\limits_E \operatorname{div}(\mathbf{F})\ dV$$

dává do souvislosti tok pole $\mathbf{F}$ přes okraj $M = \partial E$ oblasti E v $\mathbb{R}^3$ s integrálem přes tuto oblast E. Okraj ∂E má zde vždy vnější orientaci. Funkce

$$\operatorname{div}(\mathbf{F}) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z},$$

která se integruje v M se nazývá divergence pole $\mathbf{F}$ a interpretuje se jako "zdroj" pole v daném bodě (při kladné hodnotě) případně "odtok" pole v daném bodě (při záporné hodnotě). Smyslem Gaussovy věty tedy je, že celková "změna pole" v objemu odpovídá příslušnému toku pole přes okraj.

13.6 (Gaussova věta)

Pomocí Gaussovy věty spočítejte tok pole $\vec{F} = (3x,\ xy,\ 2xz)$ povrchem krychle $E = \langle 0,1\rangle^3 \subseteq \mathbb{R}^3$ s vnější orientací.

Řešení:
Máme

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = 3 + x + 2x = 3 + 3x$$

a tedy

$$\iint\limits_{\partial E} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint\limits_E \operatorname{div}(\vec{F})\ dV = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 (3+3x)\ dx\ dy\ dz = \left(\int\limits_0^1 3 + 3x\ dx\right) \cdot \left(\int\limits_0^1 \int\limits_0^1 1\ dy\ dz\right) = \frac{9}{2}.$$