2. cvičení z Matematické analýzy 2

26 - 30. září 2022

Motivace:

Pojem *otevřené* množiny intuitivně zavádíme jako množinu, která s každým bodem obsahuje ještě dost prostoru kolem něj (je to kvůli pozdějšímu použití pro derivování - potřebujeme se k bodu přiblížit "odkud-koliv").

Pojmem *uzavřené* množiny zase intuitivně myslíme takovou množinu, ze které nemůžeme vypadnout při "limitách posloupností," tj. taková množina obsahuje všechny body, ke kterým se můžeme z této množiny přiblížit libovolně blízko.

Kupodivu, tyto dva pojmy jsou nakonec navzájem doplňkové (viz níže).

Definice:

Okolím $U_\varepsilon(a_0)$ (tzv. otevřenou koulí) s poloměrem $\varepsilon > 0$ a středem v bodě $a_0 \in \mathbb{R}^n$ označujeme množinu

$$U_\varepsilon(a_0) \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in \mathbb{R}^n \mid ||a - a_0|| < \varepsilon\}$$

kde $||a - a_0||$ je *eukleidovská vzdálenost* bodů a a a_0, tj. pro

$$a_0 = (x_1, \ldots, x_n) \qquad \text{a} \qquad a = (y_1, \ldots, y_n)$$

je

$$||a - a_0|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}\ .$$

Připomeňme si, že pro množinu $A \subseteq \mathbb{R}^n$ si

- *vnitřek A°* množiny A definujeme jako množinu všech bodů $a \in A$, které jsou v A i s nějakým okolím:

$$a \in A^\circ \stackrel{\text{def}}{\iff} (\exists\ \varepsilon > 0)\ \ U_\varepsilon(a) \subseteq A$$

- *hranice ∂A* množiny A je množina všech bodů $a \in \mathbb{R}^n$, jejichž libovolná okolí zasahují jak do samotné množiny A, tak do jejího doplňku $\mathbb{R}^n \setminus A$:

$$a \in \partial A \stackrel{\text{def}}{\iff} (\forall\ \varepsilon > 0)\quad U_\varepsilon(a) \cap A \neq \emptyset \quad \wedge \quad U_\varepsilon(a) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \neq \emptyset$$

- *uzávěr $\overline{A}$* množiny A si definujeme jako množinu

$$\overline{A} \stackrel{\text{def}}{=} A \cup \partial A$$

  neboli (jak se dá snadno ověřit) jako množinu všech bodů $a \in \mathbb{R}^n$, jejichž libovolná okolí zasahují do množiny A:

$$a \in \overline{A} \iff (\forall\ \varepsilon > 0)\ \ U_\varepsilon(a) \cap A \neq \emptyset$$

Kromě toho ještě platí, že

$$\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ$$

a tedy

$$\overline{A} = A^\circ\ \ \dot\cup\ \ \partial A$$

kde "$\dot\cup$" znamená disjunktní sjednocení. Pro libovolnou množinu A se dále celý prostor $\mathbb{R}^n$ vždy disjunktně rozloží na vnitřek A°, hranici ∂A a *vnějšek* $(\mathbb{R}^n \setminus A)^\circ$:

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{A^\circ}_{\text{vnitřek}}\ \ \dot\cup\ \ \underbrace{\partial A}_{\text{hranice}}\ \ \dot\cup\ \ \underbrace{(\mathbb{R}^n \setminus A)^\circ}_{\text{vnějšek}}$$

A nakonec si ještě (teď už skutečně) definujme, že

- množina A je *otevřená* $\overset{\text{def}}{\iff} A = A^\circ$ (tj. A je rovna svému vnitřku)
- množina A je *uzavřená* $\overset{\text{def}}{\iff} A = \overline{A}$ (tj. A je rovna svému uzávěru).

A platí, že
$$A \text{ je otevřená} \iff \mathbb{R}^n \setminus A \text{ je uzavřená}$$
(tj. otevřenost a uzavřenost jsou vzájemně doplňkové pojmy).

Poznámka: Při zdůvodnění toho, že nějaká množina je otevřená, případně uzavřená, se dá využít následující věta:
Jestliže $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce (tento pojem bude sice definován později, ale např. polynom určitě spojitá funkce bude), pak

- množina $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid f(x_1, \dots, x_n) > 0\}$ je otevřená,
- množina $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid f(x_1, \dots, x_n) \geq 0\}$ je uzavřená.

2.1 Určete vnitřek, hranici a uzávěr definičních oborů následujících množin (z příkladu **1.1**):

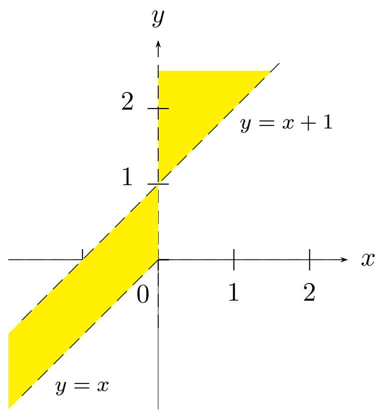
(a) $M: \;(x > 0 \;\wedge\; x+1 < y) \;\vee\; (x < 0 \;\wedge\; x < y < x+1)$,

(b) $M: \;\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \geq \frac{1}{4} \;\wedge\; (x-1)^2 + y^2 < 1$,

(c) $M: \;-y^2 \leq x \;\wedge\; x \leq y^2 \;\wedge\; 0 < y \leq 2$.

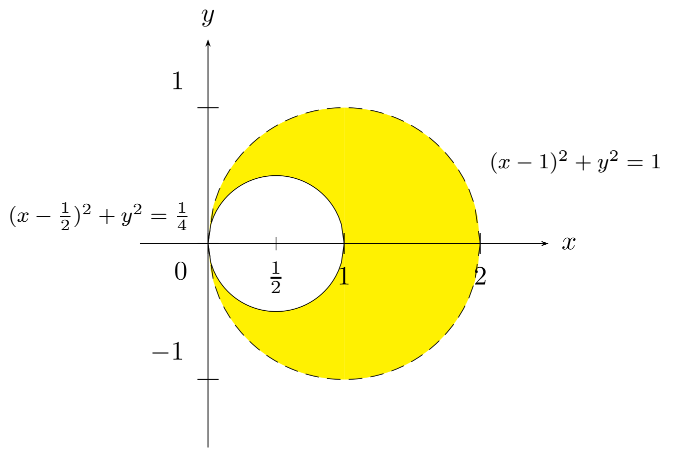
Řešení:
Tento příklad je určený pro "intuitivní" řešení pomocí náčrtů daných množin.

(a) Náčrtek množiny M:



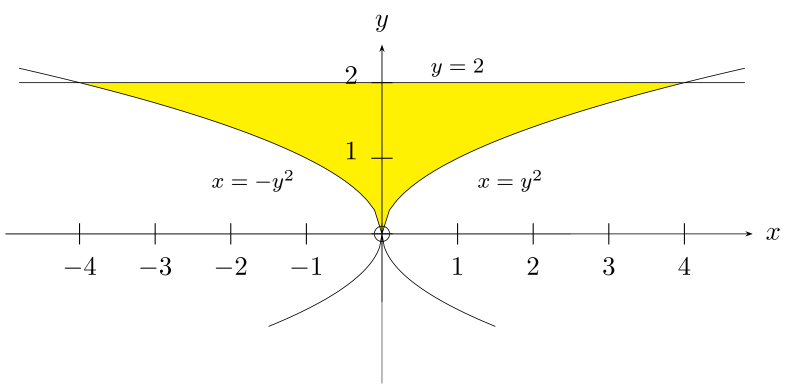
- (***vnitřek***): Množina M je zadána ostrými nerovnostmi, je tedy otevřená a proto $M^\circ = M$.
- (***hranice***) $\partial M: \quad y = x+1 \;\vee\; (y = x \;\wedge\; x \leq 0) \;\vee\; (x = 0 \;\wedge\; y \geq 0)$
  (Hranice jsou části přímek.)
- (***uzávěr***) $\overline{M}: \quad (x \geq 0 \;\wedge\; y - x \geq 1) \;\vee\; (x \leq 0 \;\wedge\; 0 \leq y - x \leq 1)$

(b) Množina M představuje oblasti vně a uvnitř kružnic.



- (***vnitřek***) M° : $\quad \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2>\frac{1}{4} \ \wedge \ (x-1)^2+y^2<1.$
- (***hranice***) $\partial M=\overline{M}\setminus M^\circ$: $\quad \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4} \ \vee \ (x-1)^2+y^2=1$
  (POZOR: je tu jiná logická spojka!)
- (***uzávěr***) $\overline{M}$: $\quad \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2\geq\frac{1}{4} \ \wedge \ (x-1)^2+y^2\leq 1.$

(c) Náčrtek množiny M:

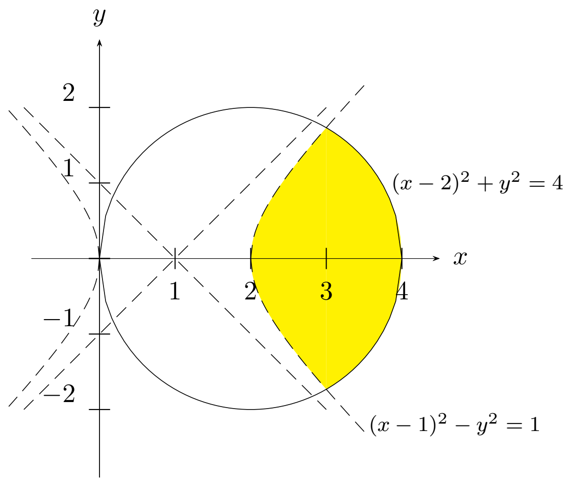


- (***vnitřek***) M° : $-y^2<x \ \wedge \ x<y^2 \ \wedge \ 0<y<2$
- (***hranice***) ∂M : $\quad (y=2 \ \wedge \ x\in\langle -4,4\rangle\ ) \ \vee \ (x=-y^2 \ \wedge \ y\in\langle 0,2\rangle\ ) \ \vee \ (x=y^2 \ \wedge \ y\in\langle 0,2\rangle\ )$
  (Hranice jsou části křivek.)
- (***uzávěr***) $\overline{M}$: $\quad -y^2\leq x \ \wedge \ x\leq y^2 \ \wedge \ 0\leq y\leq 2$

2.2 Určete vnitřek, hranici a uzávěr množiny z příkladu **1.2**:

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 2x - y^2 > 0 \ \wedge \ x^2 - 4x + y^2 \leq 0\} \ .$$

Řešení:
Tento příklad je určený pro "intuitivní" řešení pomocí náčrtů daných množin.



- (***vnitřek***) M° : $(x-1)^2 - y^2 > 1 \ \wedge \ (x-2)^2 + y^2 < 4$.
- (***hranice***): Hranice je jeden oblouk kružnice a jeden oblouk hyperboly. Musíme si dát pozor na zápis, protože bod $(0,0)$ na hranici naší množiny M není.

$$\partial M : \Big((x-1)^2 - y^2 = 1 \ \wedge \ (x-2)^2 + y^2 \leq 4 \ \wedge \ (x,y) \neq (0,0)\Big) \ \vee$$

$$\vee \ \Big((x-1)^2 - y^2 \geq 1 \ \wedge \ (x-2)^2 + y^2 = 4 \ \wedge \ (x,y) \neq (0,0)\Big)$$

- (***uzávěr***): Opět si musíme dát pozor na zápis, protože bod $(0,0)$ v uzávěru naší množiny M není, ačkoliv je průnikem hyperboly a kružnice.

$$\overline{M} : \quad (x-1)^2 - y^2 \geq 1 \ \wedge \ (x-2)^2 + y^2 \leq 4 \ \wedge \ (x,y) \neq (0,0) \ .$$

Poznámka: Můžeme si všimnout, že vnitřek (uzávěr, resp.) jsme v předchozích příkladech často získali tak, že jsme z neostrých nerovnosti udělali ostré (z ostrých neostré, resp.). Ale POZOR, takhle to obecně nefunguje, jak ukázal příklad **2.3** a jak je také vidět z následujícího příkladu:

Lze zvolit spojitou funkci $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tak, aby pro

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) > 0\}$$

a

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) \geq 0\}$$

bylo

$$\overline{A} \subsetneq B \quad \text{a} \quad A \subsetneq B^\circ$$

(neboli: po přidání neostré nerovnosti je uzávěr obecně MENŠÍ a po ubrání neostré nerovnosti je vnitřek obecně VĚTŠÍ.)

Taková funkce je např.

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2, & x < 0, \\ 0, & x \in \langle 0,1 \rangle, \\ -(x-1)^2, & x > 1\ . \end{cases}$$

kde je pak $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0\}$ a $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 1\}$.

Problém vzniká proto, že zatímco vrstevnice

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = c\}$$

pro hladiny $c \neq 0$ jsou křivky (objekty s dimenzí 1), tak pro $c = 0$ je vrstevnice plocha (objekt s dimenzí 2).

2.3 Určete vnitřek, hranici, vnějšek a uzávěr množiny $\mathbb{Q}^2 \subseteq \mathbb{R}^2$, kde $\mathbb{Q}$ je množina všech racionálních čísel.

Řešení:
Uvědomíme si, že v libovolném okolí (na reálné přímce) libovolného $r \in \mathbb{R}$ leží jak nějaké racionální číslo, tak také nějaké iracionální číslo. Dále pokud máme $|r_i - s_i| < \frac{\varepsilon}{2}$ pro $i = 1, 2$ (kde $r_i, s_i \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$) pak

$$||(r_1, r_2) - (s_1, s_2)|| = \sqrt{(r_1 - s_2)^2 + (r_2 - s_2)^2} \leq \sqrt{\left(\tfrac{\varepsilon}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{\varepsilon}{2}\right)^2} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} < \varepsilon\ .$$

Jestliže si nyní vezmeme libovolný bod $a = (r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2$ a zvolíme $\varepsilon > 0$, pak

- existují racionální čísla $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ tak, že $|r_i - q_i| < \frac{\varepsilon}{2}$
- a také iracionální čísla $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tak, že $|r_i - \alpha_i| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Speciálně tedy v libovolném ε-okolí $U_\varepsilon(a)$ bodu $a \in \mathbb{R}^2$ leží jak nějaký prvek z $(q_1, q_2) \in \mathbb{Q}^2$, tak nějaký prvek $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$. Proto můžeme ihned napsat, že

$$\overline{\mathbb{Q}^2} = \mathbb{R}^2, \quad (\mathbb{Q}^2)^\circ = \emptyset \quad \text{a} \quad \partial\mathbb{Q}^2 = \overline{\mathbb{Q}^2} \setminus (\mathbb{Q}^2)^\circ = \mathbb{R}^2 \setminus \emptyset = \mathbb{R}^2.$$

Připomenutí:
Jestliže chceme zjišťovat, jak se chová funkce v okolí nějakého bodu ve smyslu limity, pak se k tomuto bodu potřebujeme přiblížit pomocí bodu z definičního oboru dané funkce. Přitom však tyto body chceme mít jiné, než je samotný původní bod, ve kterém limitu zjišťujeme. To vede k následujícím pojmům:

- *Prstencovým okolím $P_\varepsilon(a_0)$* s poloměrem $\varepsilon > 0$ a středem v bodě $a_0 \in \mathbb{R}^n$ označujeme množinu

$$P_\varepsilon(a_0) \stackrel{\text{def}}{=} U_\varepsilon(a_0) \setminus \{a_0\} = \{a \in \mathbb{R}^n \mid 0 < ||a - a_0|| < \varepsilon\}$$

- bod a_0 je *hromadným bodem množiny M*, jestliže v každém svém okolí má nějaký bod této množiny, ale jiný než a_0, tj.:

$$(\forall\ \varepsilon > 0) \quad P_\varepsilon(a) \cap M \neq \emptyset$$

(hromadný bod je tedy určitě bodem uzávěru množiny M, ale není "osamocený").

Limita funkce je nyní definována takto:
Nechť $f : D \to \mathbb{R}$ je funkce s definičním oborem $D \subseteq \mathbb{R}^n$ a $a_0 \in \mathbb{R}^n$ je hromadný bod tohoto definičního oboru D. Následující definice a značení znamená, že hodnota $c \in \mathbb{R}$ je limitou funkce f v bodě a_0:

$$\lim_{a \to a_0} f(a) = c \stackrel{\text{def}}{\iff} (\forall\ \varepsilon > 0)(\exists\ \delta > 0)(\forall a \in D) \quad \underbrace{0 < \|a - a_0\| < \delta}_{a \in P_\delta(a_0)} \ \Rightarrow\ \underbrace{|f(a) - c| < \varepsilon}_{f(a) \in U_\varepsilon(c)}$$

(tj. když jsme v dostatečně malém prstencovém okolí $P_\delta(a_0)$ bodu a_0, pak se body odsud zobrazují funkcí f do zvoleného malého okolí $U_\varepsilon(c)$ hodnoty c.)

2.4 Zjistěte, zda existuje limita $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{x-y}$.

Řešení:
Definiční obor funkce $f(x,y) = \frac{x+y}{x-y}$ je

$$D(f): \quad x \neq y \; .$$

Bod $(0,0)$ je zřejmě hromadný bod množiny $D(f)$. Abychom zjistili, jakou hodnotu by případná limita měla mít, vyzkoušíme se přiblížit k počátku po různých přímkách, konkrétně po přímkách $y = kx$, kde $k \neq 1$. Pak máme

$$\lim_{x\to 0} f(x,kx) = \lim_{x\to 0} \frac{x+kx}{x-kx} = \frac{1+k}{1-k} \; .$$

Tato hodnota je ale různá pro různé k. Původní limita funkce f tedy neexistuje.

2.5 Vyšetřete existenci limity $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)^2}{x-y}$.

Řešení:
Definiční obor funkce $f(x,y) = \frac{(x+y)^2}{x-y}$ je

$$D(f): \quad x \neq y \; .$$

Bod $(0,0)$ je zřejmě hromadný bod množiny $D(f)$. Abychom zjistili, jakou hodnotu $c \in \mathbb{R}$ by případná limita měla mít, vyzkoušíme se přiblížit k bodu $a_0 = (0,0)$ po vhodné křivce. Nejjednodušší jsou obvykle přímky. Vezměme si tedy přímku $y = kx$, kde $k \neq 1$. Pro $x \to 0$ máme $(x,kx) \to (0,0)$. Takže nás bude zajímat

$$\lim_{x\to 0} f(x,kx) = \lim_{x\to 0} \frac{(x+kx)^2}{x-kx} = \lim_{x\to 0} \frac{(1+k)^2}{1-k} x = 0 \; .$$

Pokud naše původní limita existuje musí mít tedy hodnotu $c = 0$ (to, že jsme prověřili přímky a dostali stejnou hodnotu, ale ještě NIC o existenci limity NEŘÍKÁ! K tomu bychom museli stejnou hodnotu dostat také pro VŠECHNY možné další křivky, po kterých se můžeme dostat do bodu a_0).

Můžeme se pokusit najít jiná přiblížení (viz níže) anebo můžeme využít jednoduché kritérium pro neexistenci (konečné) limity (viz Poznámky k limitám):

- $f(x,y) = \frac{h(x,y)}{g(x,y)}$, kde $h(x,y) = (x+y)^2$ a $g(x,y) = x - y$ jsou spojité funkce
- položme $M: \; x = y \; \wedge \; (x,y) \neq (0,0)$
- pro každé $a \in M$ je $g(a) = 0$ a $h(a) \neq 0$
- $a_0 = (0,0)$ je hromadný bod množiny M

Pak NEEXISTUJE (konečná) limita $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

(Vzhledem k už nalezené limitě 0 při nějakém přiblížení z toho vyplývá, že ani případná "nekonečná" limita nemůže existovat.)

Zjistili jsme tedy, že $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)^2}{x-y}$ neexistuje.

Poznámka: Jestliže chceme najít přiblížení, pro které vyjde jiná hodnota než 0, můžeme v tomto případě zkusit "variaci konstanty k" a vzít křivku ve tvaru $y(x) = k(x) \cdot x$, kde $k(x)$ je zatím neznámá funkce a kdy chceme, aby pro $x \to 0$ bylo také $y(x) \to 0$. Křivku dosadíme do funkce:

$$f\big(x, y(x)\big) = \frac{\big(x + k(x) \cdot x\big)^2}{x - k(x) \cdot x} = \frac{\big(1 + k(x)\big)^2}{1 - k(x)} \cdot x$$

Nyní bude stačit, když se např. $\frac{x}{1-k(x)}$ bude blížit k nenulové hodnotě $d \in \mathbb{R}$ a současně i $\big(1 + k(x)\big)^2$ se bude blížit ke konečné nenulové hodnotě.

Stačí položit $\frac{x}{1-k(x)} = d$, tj. $k(x) = 1 - \frac{x}{d}$. Musíme ještě ověřit, že v tomto případě je křivka

$$y(x) = k(x) \cdot x = \Big(1 - \frac{x}{d}\Big)\, x$$

stále v definičním oboru $D(f)$ (což by stačilo i jen pro x blízká k 0). To je ale ihned vidět. Dále také zřejmě je $y(x) \to 0$ pro $x \to 0$.

A nakonec vidíme, že

$$f\big(x, y(x)\big) = \cdots = \frac{\big(1 + k(x)\big)^2}{1 - k(x)} \cdot x = d\Big(2 - \frac{x}{d}\Big)^2 \quad \overset{x \to 0}{\longrightarrow} \quad 4d$$

což je kýžený výsledek.

Současně si všimneme, že k bodu $(0,0)$ se blížíme v tomto případě po parabole $y(x) = x - \frac{x^2}{d}$ jejíž tečna v bodě $(0,0)$ je právě přímka $y = x$, kterou jsme vyloučili z definičního oboru $D(f)$. Toto je v jistém smyslu i návod pro jiné příklady - hledejme křivky "napodobující" hranici definičního oboru v daném bodě.

2.6 Vyšetřete existenci limity $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x+y}$.

Řešení:

Budeme postupovat podobně jako v příkladu **2.5**. Definiční obor funkce $f(x,y) = \frac{xy}{x+y}$ je

$$D(f): \quad x \neq -y\ .$$

Bod $(0,0)$ je zřejmě hromadný bod množiny $D(f)$. Při pohledu na funkci můžeme rovnou využít kritérium pro neexistenci (konečné) limity (viz Poznámky k limitám):

- $f(x,y) = \frac{h(x,y)}{g(x,y)}$, kde $h(x,y) = xy$ a $g(x,y) = x + y$ jsou spojité funkce
- položme $M: \ x = -y \ \wedge \ (x,y) \neq (0,0)$
- pro každé $a \in M$ je $g(a) = 0$ a $h(a) \neq 0$
- $a_0 = (0,0)$ je hromadný bod množiny M

Pak NEEXISTUJE (konečná) limita $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

(Kromě toho při přiblížení po přímce $y = x$ máme $f(x,x) = \frac{x^2}{x+x} = \frac{x}{2} \quad \overset{x\to 0}{\longrightarrow} \quad 0$, takže ani případná "nekonečná" limita neexistuje.)

Zjistili jsme tedy, že $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x+y}$ neexistuje.

Poznámka:

(a) Přiblížení, pro které vyjde jiná hodnota než 0, můžeme opět zkusit hledat ve tvaru $y(x) = k(x) \cdot x$, kde $k(x)$ je zatím neznámá funkce a kdy chceme, aby pro $x \to 0$ bylo také $y(x) \to 0$. Křivku dosadíme do funkce:

$$f\big(x, y(x)\big) = \frac{k(x) \cdot x^2}{x + k(x) \cdot x} = \frac{k(x)}{1 + k(x)} \cdot x$$

Nyní bude stačit, když se $\frac{x}{1+k(x)}$ bude blížit k nenulové hodnotě $d \in \mathbb{R}$ a současně i $k(x)$ se bude blížit ke konečné nenulové hodnotě.
Stačí proto položit $\frac{x}{1+k(x)} = d$, tj. $k(x) = \frac{x}{d} - 1$. Křivka

$$y(x) = k(x) \cdot x = \left(\frac{x}{d} - 1\right) x$$

pro $x \neq 0$ je pak stále v definičním oboru $D(f)$. Dále také zřejmě je $y(x) \to 0$ pro $x \to 0$.
A po dosazení dostaneme

$$f\big(x, y(x)\big) = \cdots = \frac{k(x)}{1+k(x)} \cdot x = x - d \quad \overset{x\to 0}{\longrightarrow} \quad -d$$

což jsme potřebovali.
Současně si všimněme, že k bodu $(0,0)$ se opět blížíme po parabole $y(x) = \frac{x^2}{d} - x$ jejíž tečna v bodě $(0,0)$ je právě přímka $y = -x$, kterou jsme vyloučili z definičního oboru $D(f)$.

(b) Vhodné přiblížení můžeme hledat i pomocí polárních souřadnic (a to obvykle tak, že parametrem bude úhel φ, pro který budeme hledat vhodnou funkci vzdálenosti $\varrho(\varphi)$):

$$x(\varphi) = \varrho(\varphi)\cos\varphi$$
$$y(\varphi) = \varrho(\varphi)\sin\varphi$$

tak, aby $\varrho(\varphi) \to 0$ pro $\varphi \to \varphi_0$ pro nějaké vhodné $\varphi_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ neboť chceme mít $\Big(x(\varphi), y(\varphi)\Big) \overset{\varphi\to\varphi_0}{\longrightarrow} (0,0)$ (což je bod, kde limitu hledáme).
Opět dosadíme

$$f\big(x(\varphi), y(\varphi)\big) = \frac{\varrho^2(\varphi)\cos\varphi\sin\varphi}{\varrho(\varphi)\cdot(\cos\varphi + \sin\varphi)} = \frac{\cos\varphi\sin\varphi}{\cos\varphi + \sin\varphi}\varrho(\varphi)$$

Potřebujeme nějak vyvážit, to že $\varrho(\varphi) \to 0$, a jako jediná protiváha se nabízí výraz $\cos\varphi + \sin\varphi$ ve jmenovateli zlomku. Proto zvolíme φ_0 tak, aby $\cos\varphi_0 + \sin\varphi_0 = 0$, tedy např. $\varphi_0 = -\frac{\pi}{4}$.
Dále pro $0 \neq d \in \mathbb{R}$ položíme zase $\frac{\varrho(\varphi)}{\cos\varphi+\sin\varphi} = d$, čímž dostaneme $\varrho(\varphi) := d(\cos\varphi + \sin\varphi)$ a skutečně je pak $\varrho(\varphi) \to 0$ pro $\varphi \to -\frac{\pi}{4}$.
Současně opět (díky tomu, že $\varphi \neq -\frac{\pi}{4}$ a hodnoty φ jsou blízké k $-\frac{\pi}{4}$) budeme mít, že křivka

$$x(\varphi) = d(\cos\varphi + \sin\varphi)\cos\varphi$$
$$y(\varphi) = d(\cos\varphi + \sin\varphi)\sin\varphi$$

je v definičním oboru $D(f)$ (protože pouze body na přímce $y = -x$ mají úhel buď $-\frac{\pi}{4}$ nebo $\frac{3\pi}{4}$).
Zbývá už jen zjistit, k čemu se budou blížit hodnoty funkce f pro tuto křivku:

$$f\big(x(\varphi), y(\varphi)\big) = \cdots = \frac{\cos\varphi\sin\varphi}{\cos\varphi + \sin\varphi}\varrho(\varphi) = d\cos\varphi\sin\varphi \quad \overset{\varphi\to-\frac{\pi}{4}}{\longrightarrow} \quad -d\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{d}{2}$$

což jsme opět potřebovali.
Opět si všimněme, že úhel φ průvodiče křivky se zase přibližuje k úhlu přímky $y = -x$, která je vyřazena z definičního oboru $D(f)$.